

УДК 539.3

ДО КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПЕРВІСНО ТОРКАЮТЬСЯ У ТОЧЦІ

Шишканова Г.А.

При розгляданні задачі про контакт двох пружних тіл звичайно припускається, що обидва тіла обмежені опуклими поверхнями і у точці дотику мають загальну дотичну площину. Точка первісного дотику стиснутих тіл є регулярною точкою поверхонь обох тіл. Стиснення відбувається під дією сил Q , лінія дії яких перпендикулярна загальній дотичній площині до поверхонь тіл у точці первісного дотику.

Випадок, коли для поверхні одного із стиснутих тіл або для поверхонь обох тіл, що зазнають тиснення, точка первісного дотику є особливою, розглядався для вісесиметричної контактної задачі.

Зокрема, розглядалися випадки, коли точка первісного дотику стиснутих тіл є кутовою точкою осьового перерізу поверхні одного із тіл, що зазнають стиснення, або осьовий переріз поверхні одного із контактуючих тіл має в точці первісного дотику неперервно обертову дотичну, але кривина перерізу в цій точці нескінченно велика [1,3].

При відсутності радіальної симетрії розв'язання аналогічних контактних задач пов'язано з певними математичними труднощами.

Розглянемо невісесиметричну контактну задачу при стисненні двох тіл, коли точка первісного дотику тіл для поверхні одного з них є кутовою точкою. Початок координат помістимо в точку первісного дотику і вважатимемо, що рівняння поверхонь, обмежуючих стиснені тіла, є

$$z^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}, \quad A z = x^2 + y^2. \quad (1)$$

Позначимо через Ω проекцію області контакту на площину $z=0$ і через $p(x,y)$ - нормальне тиснення в точці контакту з координатами (x,y) та вважатимемо, що тертя відсутнє. У такому випадку в області контакту повинно виконуватися рівняння [1], яке запишемо в циліндричних координатах:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta)}{r} d\Omega = c (\delta - \rho_0^2 - a_1 \rho_0 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}), \quad (2)$$

де

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0), \quad (\rho_0, \theta_0) \in \Omega, \quad (3)$$

$$A c = \frac{\pi E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{\pi E_2}{1 - \nu_2^2};$$

E_1, E_2 - модулі пружності; ν_1, ν_2 - коефіцієнти Пуассона для стиснених тіл;

ε - ексцентриситет, $\varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $\beta < \alpha$, $\varepsilon < 1$, $a_1 = \frac{A}{\alpha}$, $\frac{\delta}{A} = \delta$ - зближення точок контактуючих тіл.

Нормальне тиснення, що діє в області контакту Ω , повинно врівноважуватися рівнодійною Q зовнішніх стискуючих сил, що діє на кожне із стиснених тіл.

$$\iint_{\Omega} p(\rho, \theta) d\Omega = Q. \quad (4)$$

Щоб знайти невідому площину контакту Ω , невідоме тиснення $p(\rho, \theta)$ та зближення тіл, потрібно до рівнянь (2), (4) додати умову на межі Γ площадки контакту, де $p(\rho, \theta)$ дорівнює нулю, тобто

$$p(\rho, \theta)|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Через те, що права частина рівняння (2) залежить від ε , природно припустити, що шуканий розподіл тиснення $p(\rho, \theta)$, який діє в області Ω , зближення точок стиснених тіл та невідоме рівняння межі Γ площинки контакту мають бути подані у вигляді розкладу за параметром ε :

$$p(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} p_i(\rho, \theta); \quad \delta = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \delta_i; \quad (6)$$

$$\rho = a(1 + f(\varepsilon, \theta)); \quad (7)$$

де
$$f(\varepsilon, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} f_i(\theta).$$

Функції $f_i(\theta)$, $p_i(\rho, \theta)$ - неперервні і мають неперервні похідні різних порядків у Ω .

Щоб виконати умову (4) на межі площинки контакту введемо нові змінні (R, φ) за формулами

$$\begin{aligned} \rho &= R(1 + f(\varepsilon, \varphi)) \\ \theta &= \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Перетворення (8) рівняння (7) межі Γ області Ω переводить у рівняння $R=a$ кола D , крім того, при $\varepsilon=0$ - $\rho=R$.

У нових змінних розклад (6) для $p(\rho, \theta)$ має вигляд:

$$p(R, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(R, \varphi) \varepsilon^{2i}. \quad (9)$$

Тут $P_i(R, \varphi)$ для $i=0,1,2$, необхідні в перших наближеннях, пов'язані з невідомими $p_i(\rho, \theta)$ такими залежностями

$$\begin{aligned} P_0(R, \varphi) &= p_0(R, \varphi). \\ P_1(R, \varphi) &= p_1(R, \varphi) + p'_0(R, \varphi) \cdot R f_1(\varphi). \\ P_1(R, \varphi) &= p_2(R, \varphi) + p'_0(R, \varphi) \cdot R f_2(\varphi) + \\ &+ p'_1(R, \varphi) \cdot R f_1(\varphi) + \frac{1}{2} p''_0(R, \varphi) \cdot R^2 f_1^2(\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Штрих позначає похідну за змінною R .

Інтеграл, що входить у рівняння (2), також представимо у вигляді розвинення за степенями ε . При цьому врахуємо, що рівняння контура Γ області інтегрування Ω з викинутою особливою точкою залежить від ε [2,4].

Далі, розвинувши за степенями ε праву частину рівняння (2), а також рівняння рівноваги (4) та граничну умову (5), одержуємо рекурентні системи рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів у рядах (6), (7), (9):

$$\begin{aligned} c(\delta_i - \varphi_i(\rho_0, \theta_0)) &= \iint_D \frac{P_i(\rho, \theta)}{r} ds + \Phi_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}), \\ Q_i &= \iint_D P_i(\rho, \theta) ds + F_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}), \\ P_i(\rho, \theta)|_{\rho=a} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Тут} \quad a_1 \rho \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + \rho^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\rho, \theta) \varepsilon^{2i}, \quad (12)$$

$$Q_0 = Q; \quad Q_i = 0 \text{ при } i \neq 0; \quad D: 0 \leq \rho \leq a. \quad (13)$$

Інтегро-диференціальні оператори, що входять до складу систем (11), необхідні в перших наближеннях при $i=0,1,2$, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 0, \quad \Phi_1(P_0) = L_1(P_0); \\ \Phi_2(P_0, P_1) &= L_1(P_1) + L_2(P_0); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L_1(P_0) &= (1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1(\theta) d\Omega, \\ L_2(P_0) &= (1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_2(\theta) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1^2(\theta) d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_0 &= 0; \quad F_1(P_0) = 2 \iint_D P_0(\rho, \theta) f_1(\theta) d\Omega, \\ F_2(P_0, P_1) &= \iint_D [2P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + 2P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_1^2(\theta)] d\Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, при визначенні функції $p(\rho, \theta)$, що характеризує розподіл нормального тиснення на площинці контакту, зближення тіл δ та рівняння контуру площинки контакту Ω , які є розв'язком задачі для невідомої області Ω , у кожному наближенні приходимо до розв'язання аналогічної задачі (11) для кругової області D .

При практичних розрахунках для обчислення нормального тиснення на площинці контакту Ω вздовж променя $\theta = \theta_*$, що проходить через точку $M(\rho_*, \theta_*)$ на контурі області Ω , одержуємо таку залежність:

$$p(\rho, \theta_*) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\left(\frac{\rho}{\rho_*}, \theta_*\right) \varepsilon^{2i}.$$

У нульовому наближенні при розв'язанні поставленої задачі замість системи рівнянь (2), (4) при умові (5) для визначення функції $p(\rho, \theta)$ і δ , а також рівняння межі Ω (7) маємо для кругової області D систему рівнянь (11) при $i=0$, яка має такий розв'язок при $A=1$ в (1):

$$\begin{aligned} p_0(\rho) &= c_{10} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} + c_2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \\ \delta_0 &= \frac{\pi a}{2} \left(a_1 + \frac{4a}{2\pi} \right), \quad c_{10} = -\frac{c a_1}{2\pi}, \quad c_2 = \frac{4c a_1}{\pi^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

де a є дійсним коренем рівняння

$$a^3 + \frac{3a_1\pi}{16} a^2 - \frac{3Q}{8c} = 0. \quad (18)$$

Враховуючи одержані співвідношення (17), коефіцієнти в рядах (6) при ε^2 визначаємо, розв'язуючи систему (11) при $i=1$. Виходячи з її вигляду, розв'язок маємо представити у вигляді

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 2n\theta; \\ P_1(\rho, \theta) &= \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos 2n\theta + c_{11} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} \end{aligned} \quad (19)$$

З умови задовільнення розв'язку (19) рівнянням системи (11) при $i=1$ визначаємо невідомі сталі A_n , D_n , c_{11} :

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{a_1 c}{16\pi(c_2 - c_{10})}; \quad A_1 = \frac{3a_1 c}{8\pi(2c_2 + c_{10})}; \\ A_n &= 0, \quad n \neq 0, 1; \quad D_n = 0; \quad n \neq 0, 1. \\ D_0 &= A_0 c_2; \quad D_1 = A_1 c_2; \quad c_{11} = \frac{c a_1}{8\pi}; \\ \delta_1 &= \frac{a a_1 \pi}{16}. \end{aligned} \quad (20)$$

Знання розв'язків (17), (19) у нульовому і першому наближеннях дозволяє із системи (11) одержати таку систему при $i=2$, розв'язком якої є функції:

$$P_2(\rho, \theta) = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} (G_0 + G_1 \cos 2\theta + G_2 \cos 4\theta) + c_{12} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}; \quad (21)$$

$$f_2(\theta) = B_0 + B_1 \cos 2\theta + B_2 \cos 4\theta,$$

$$B_0 = \frac{1}{c_2 - c_{10}} \left[\frac{2A_0^2 + A_1^2}{4} (c_{10} - 2c_2) + \frac{13}{32} c_{11} + c_{11} A_0 + \frac{c_{10}}{2} A_0^2 \right];$$

$$B_1 = \frac{1}{2c_2 + c_{10}} \left[-\frac{9}{4} c_{11} - c_{11} A_1 + c_{10} A_0 A_1 \right];$$

$$B_2 = \frac{4}{16c_2 - 5c_{10}} \left[-\frac{15}{32} c_{11} + c_2 A_1^2 - \frac{13}{16} A_1^2 c_{10} \right]. \quad (22)$$

$$c_{12} = -\frac{13c a_1}{128}; \quad G_0 = c_2 B_0; \quad G_1 = c_2 B_1;$$

$$G_2 = 2c_2 B_2 - \frac{1}{2} c_{10} B_2 - \frac{1}{2} c_2 A_1^2 + \frac{3}{8} A_1^2 c_{10};$$

$$\delta_2 = \frac{\pi^2 a}{4c} (c_2 A_1^2 - 4c_{11} A_0 + 2c_2 A_0^2 + 2c_{12} - 4c_{10} B_0 + 4c_2 B_0).$$

Отримані залежності (17), (19), (21) разом з (18), (20), (22) визначають розв'язок (6), (7) з точністю до ε^4 .

Припускаючи, що Q така, що $a=a_1$, одержуємо рівняння контура Γ області контакту Ω з точністю до ε^4 у вигляді:

$$\rho = a(1 + \varepsilon^2(-0,03525 + 0,1832 \cos 2\theta) + \varepsilon^4(-0,04164 + 0,1502 \cos 2\theta + 0,02010 \cos 4\theta)).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.:Наука, 1980.-304 с.
2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.
3. Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. - 270 с.
4. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой// Прикладная механика. - 1990. - т.26. - №5. - С. 9-15.