УДК 534.1+539.3

СТОХАСТИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ ПЛАСТИНИ

Швидка С.П.

Розглядається тонка ізотропна прямокутна пластина із сторонами a , b та товщиною h з прямокутними включеннями однакової жорсткості D_i, що знаходиться під дією поверхневого випадкового навантаження. Дослідження проводиться при припущеннях, що прийняті в [1,2], з використанням імпульсивних функцій. Це дозволяє розглядати суцільну пластинку-модель із змінними параметрами щільності ρ та жорсткості D, еквівалентною конструкції з включеннями. Досліджуються пластини шарнірно оперті по зовнішньому контуру.

У більшості випадків характеристики діючих на деформівну систему випадкових навантажень можна вважати незмінними у досить широких інтервалах спостерігання. Це дозволяє трактувати навантаження як стаціонарний випадковий процес. Крім того, майже всі стаціонарні випадкові навантаження, що становлять інтерес, є ергодичними [3]. Одними з найважливіших є навантаження, математичне сподівання яких дорівнює нулю, а спектральна щільність має вигляд:

$$S_q(x_1, y_1, x_2, y_2, i\omega) = \frac{s}{2\pi}\delta(x_2 - x_1)\delta(y_2 - y_1)\,, \tag{1}$$

$$S_q(x_1, y_1, x_2, y_2, i\omega) = \psi(\omega)\exp(-\alpha|x_1 - x_2| - \beta|y_1 - y_2|)\,, \tag{2}$$

де δ - дельта-функції; s - інтенсивність білого шуму, $\psi(\omega)$ - дійсна додатня функція частоти, α, β - дійсні додатні числа або функції частоти.

Вихідне рівняння руху пластини має вигляд [1,2]. Функція, що апроксимує прогин пластини з включенням, задається у вигляді ряду за формами власних коливань $W_{mn}(x, y)$:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) W_{mn}(x, y)\,, \tag{3}$$

де $W_{mn}(x, y) = \sin\alpha_m x \sin\beta_n y$, $\alpha_m = m\pi / a$; $\beta_n = n\pi / b$, $f_{mn}(t)$ – випадкові функції часу (узагальнені координати).

Застосування до стохастичного диференціального рівняння [2] варіаційного методу Бубнова-Гальоркіна зводить поставлену задачу до системи стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + 2\gamma_{mn}\omega_{mn}\frac{df_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 f_{mn} = Q_{mn}(t)\,, \quad m, n = \overline{1, \infty}\,. \tag{4}$$

Тут $Q_{mn}(t)$ – узагальнені сили,

$$Q_{mn}(t) = \frac{1}{A_{mn}}\int_0^a\int_0^b q(x, y, t) W_{mn}(x, y)\,dxdy\,,$$

де $$A_{mn} = \int_0^a\int_0^b \rho h W_{mn}^2(x, y)\,dxdy\,. \tag{5}$$

Дисипативні члени введені вже після переходу до звичайних диференціальних рівнянь, γ_{mn} – коефіцієнти затухання відповідних форм коливань. Решта позначень відповідає [4].

Той факт, що система рівнянь (4) розпалася на окремі рівняння, дає можливість досліджувати поведінку кожної узагальненої координати f_{mn} незалежно від інших. Для того, щоб зробити висновок про поведінку пружної системи треба також враховувати кореляцію між різними ступенями свободи. Система рівнянь (4) досліджується за допомогою методу диференціальних рівнянь відносно моментних функцій [3]. Якщо зовнішнє навантаження є стаціонарним процесом, то моментні функції другого порядку залежать лише від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$.

Спектральні щільності та кореляційні функції стаціонарного випадкового процесу зв'язані між собою співвідношеннями Вінера-Хінчина, враховуючи які, отримують спектральні щільності $S_{f_{mn} f_{rs}}(i\omega)$ для узагальнених координат:

$$S_{f_{mn} f_{rs}}(i\omega) = S_{Q_{mn} Q_{rs}}(i\omega)\left(\left(\omega_{mn}^2 - 2i\varepsilon_{mn}\omega - \omega^2\right)\left(\omega_{rs}^2 + 2i\varepsilon_{rs}\omega - \omega^2\right)\right)^{-1}, \qquad (6)$$

$$m, n, r, s = \overline{1, \infty}$$

де $\varepsilon_{mn} = \gamma_{mn}\omega_{mn}$.

Для випадкових навантажень, спектральні щільності яких мають вигляд (1), (2), відповідно отримуємо:

$$S_{Q_{mn}Q_{rs}}(i\omega) = \frac{sab\delta_{mnrs}}{8\pi A_{mn}A_{rs}}, \qquad (7)$$

$$S_{Q_{mn}Q_{rs}}(i\omega) = \frac{\psi(\omega)(ab)^2}{16A_{mn}A_{rs}} I_{mr}(\omega) J_{ns}(\omega), \qquad (8)$$

де

$$I_{mr}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4}{m^2\pi^2}\left\{\dfrac{\alpha a}{1+(\alpha_m^*)^2} + \dfrac{2\left[1-(-1)^m e^{-\alpha a}\right]}{(1+(\alpha_m^*)^2)^2}\right\}, & m = r; \\ \dfrac{8}{mr\pi^2}\dfrac{1-(-1)^m e^{-\alpha a}}{(1+(\alpha_m^*)^2)(1+(\alpha_r^*)^2)}, & m \neq r. \end{cases}$$

$$I_{mr}(\omega) = 0, \quad m \neq r, |m \pm r| \text{ - непарне}, \qquad (9)$$

де $\alpha_m^* = \alpha a/(m\pi); \quad \alpha_r^* = \alpha a/(r\pi)$.

$$J_{ns}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left\{\dfrac{\beta b}{1+(\beta_n^*)^2} + \dfrac{2\left[1-(-1)^n e^{-\beta b}\right]}{(1+(\beta_n^*)^2)^2}\right\}, & n = s; \\ \dfrac{8}{ns\pi^2}\dfrac{1-(-1)^n e^{-\beta b}}{(1+(\beta_n^*)^2)(1+(\beta_s^*)^2)}, & n \neq s. \end{cases}$$

$$J_{ns}(\omega) = 0, \; n \neq s, |n \pm s| \text{ - непарне}, \qquad (10)$$

де $\beta_n^* = \beta b/(n\pi); \quad \beta_s^* = \beta b/(s\pi)$.

За відомими спектральними щільностями знаходять математичні сподівання, кореляційні функції та інші характеристики другого порядку для вихідного процесу та його похідних. У випадку, коли стохастичне навантаження є просторово-часовим білим шумом, отримуємо наступні співвідношення ймовірнісних характеристик для нормального прогину *w(x,y,t)*:

кореляційну функцію

$$K_w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sab\exp(-|\tau|\varepsilon_{mn})}{16A_{mn}^2\varepsilon_{mn}\omega_{mn}^2}\left(\cos\tau\omega_\varepsilon + \frac{\varepsilon_{mn}}{\omega_\varepsilon}\sin|\tau|\omega_\varepsilon\right)\sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n y_1 \sin\alpha_m x_2 \sin\beta_n y_2, \qquad (11)$$

дисперсію

$$\sigma_w^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sab}{16A_{m\,n}^2\varepsilon_{m\,n}\omega_{m\,n}^2}\ \sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n y_1 \sin\alpha_m x_2 \sin\beta_n y_2\,, \qquad (12)$$

спектральну щільність

$$S_w(i\omega) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sab}{8\pi A_{m\,n}^2}\left(\left(\omega_{m\,n}^2-\omega^2\right)^2+4\varepsilon_{m\,n}^2\omega^2\right)^{-1}\ \sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n y_1 \sin\alpha_m x_2 \sin\beta_n y_2\,, \qquad (13)$$

де $\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_{m\,n}^2-\varepsilon_{m\,n}^2}$.

Отримана кореляційна функція (11), крім дисперсії, залежить від двох параметрів ε_{mn} і ω_{mn}, значення яких суттєво впливають на властивості процесу та зумовлюють загальний характер його реалізацій. Параметр ε_{mn} характеризує швидкість зменшення кореляційної залежності між ординатами процесу; значення відношення $\varepsilon_{mn}/\omega_\varepsilon$ характеризує "ступінь нерегулярності процесу": при малому значенні цього відношення ординати процесу, що взяті через періоди часу $2\pi/\omega_\varepsilon$, мають сильну кореляцію і реалізація процесу схожа на синусоїду; при великому значенні $\varepsilon_{mn}/\omega_\varepsilon$ періодичність з частотою ω_ε непомітна. Дисперсія (12) дозволяє робити висновок про амплітудні значення випадкового процесу, що є визначаючим для оцінок динамічної міцності. З формули видно, що дисперсія зменшується при збільшенні жорсткості, демпфірування та маси пластини.

Для порівняльного аналізу зручніше використовувати нормовану кореляційну функцію:

$$r_w(\tau) = K_w/\sigma_w^2 . \qquad (14)$$

Щоб привести (13) до безрозмірного вигляду, використано характерне значення частоти ω_0, введене як [3]:

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D_0 g}{\rho_0 h}}\,,$$

де ρ_0, D_0 - щільність і жорсткість основної області матеріалу пластини.

У випадку суцільної пластини співвідношення (11)-(13) мають той же вигляд, що і результати, наведені в роботі [3]. При дослідженні питання про збіжність ряду (11) можна побачити, що внаслідок наявності множника $e^{-|\tau|\varepsilon_{m\,n}}$ зазначений ряд збігається рівномірно для $t \ge t_0 \rangle 0$ при будь-якому $t_0 \rangle 0$.

Нижче наведено результати деяких обчислень за співвідношеннями (11)-(14) для пластини з параметрами [4]: $a = b = 100$ см, *h=0.5 см,* $E = 2\cdot 10^6$ кг/см^2, *ρ=8·10^{-6} кгсек^2/см^4*, $\mu = 0.3$, $\varepsilon_{m\,n} = 0.02\omega_{m\,n}$. На рис. 1 зображено криві, які характеризують зміну нормованої кореляційної функції нормального прогину в точці $(0.15a;0.15b)$ квадратної пластини з центральним квадратним вирізом із стороною $0.25\,a$ в залежності від числа членів ряду. Із графіків можна бачити, що криві нормованих кореляційних функцій у випадках m=n=2, m=n=5, m=n=10 практично збігаються. Характер зміни нормованої кореляційної функції прогину в центрі пластини в залежності від жорсткості включення демонструється на рис.2. Як видно, збільшення параметру $\psi = (D_0 - D_i)/D_0$ веде до зменшення кореляції прогинів. Вздовж восі абсцис відкладались величини відносних розмірів вирізу – відношення довжини сторони вирізу a^* до довжини сторони пластини a . Вздовж восі ординат відкладались величини параметру дисперсії прогину $K_{\sigma_W^2}$, рівного відношенню дисперсії прогину пластин з отвором до дисперсії суцільної пластини. Вплив розташування центру непідкріпленого квадратного вирізу $(x_c;y_c)$ на дисперсію прогину в точці пластини $(0.15a;0.15b)$ ілюструється графіками рис.3. Проведене теоретичне дослідження дозволяє зробити висновок, що дисперсія прогину пластини незначно змінюється при зміщенні центра вирізу вздовж восей симетрії та дещо різко – до кутів пластини. Зміну величини параметра дисперсії прогину в центрі пластини $K_{\sigma_W^2}$ в залежності від жорсткості центрального

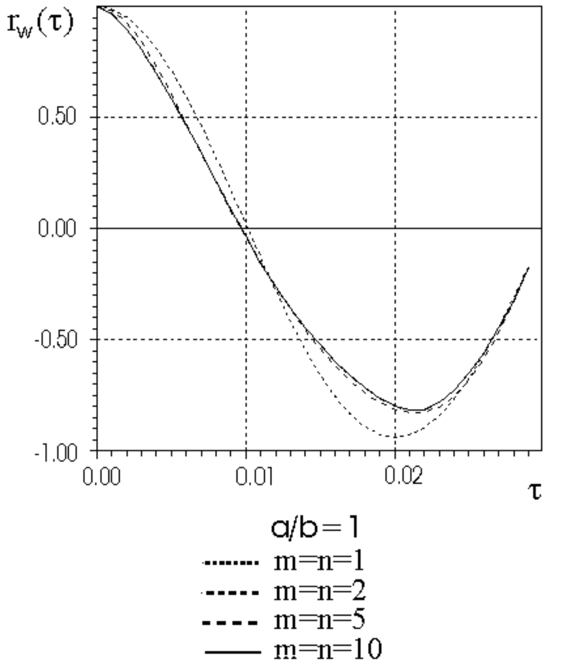

Рис.1. Нормовані кореляційні функції прогину пластини з центральним квадратним вирізом із стороною $0.25a$.

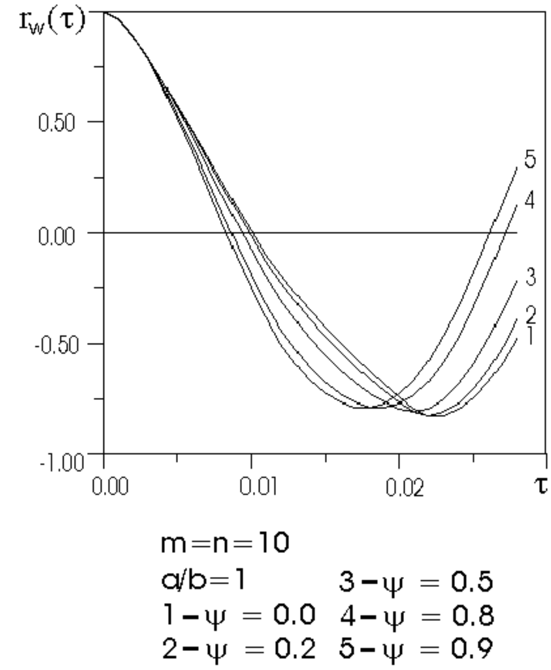

Рис.2. Нормовані кореляційні функції прогину пластини з центральним квадратним включенням із стороною $0.5a$.

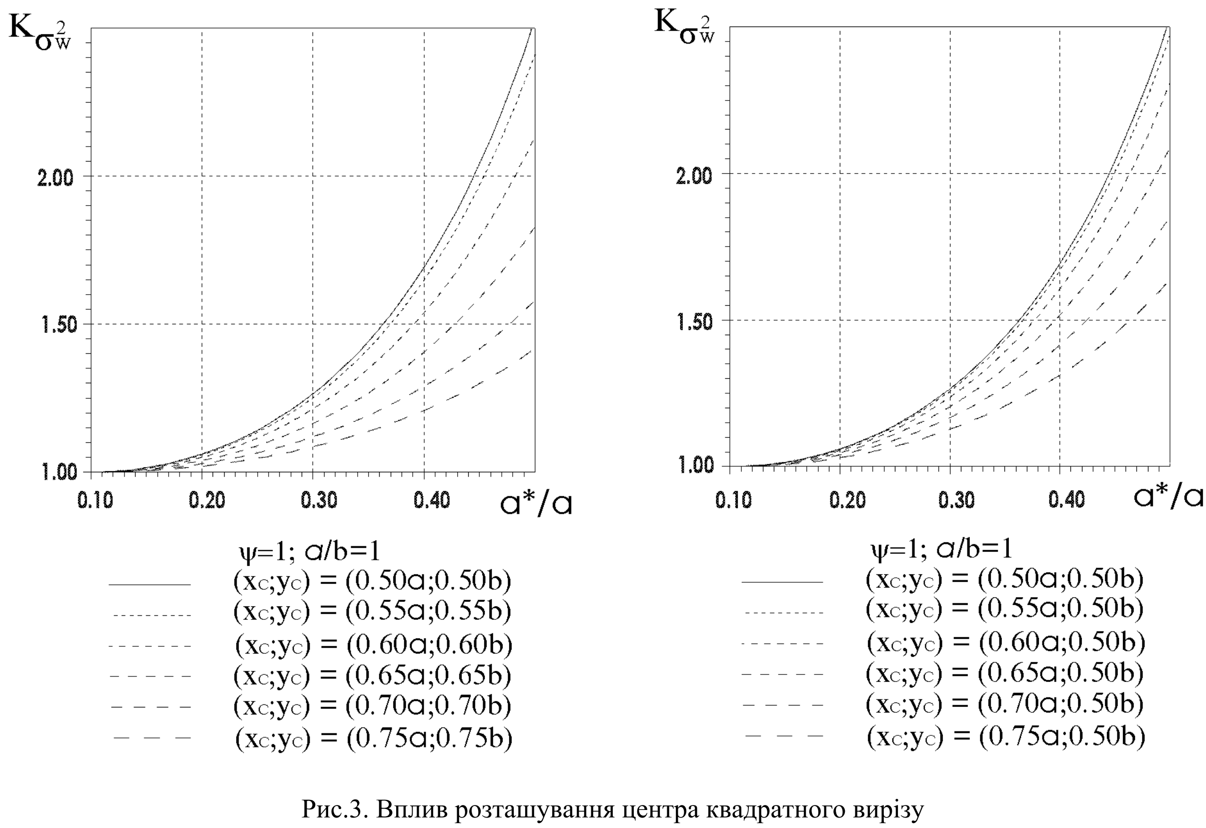

Рис.3. Вплив розташування центра квадратного вирізу на величину параметра дисперсії прогину пластини.

квадратного включення демонструють графіки рис.4. В усіх випадках характерним є зростання коефіцієнта $K_{\sigma_W^2}$ при збільшенні відносних розмірів включення, що пояснюється впливом на дисперсію прогину маси пластини, яка має іншу жорсткість. На рис.5 зображено графіки спектральної щільності для прогину в центрі квадратної пластини з центральним квадратним включенням із стороною $0.5a$.

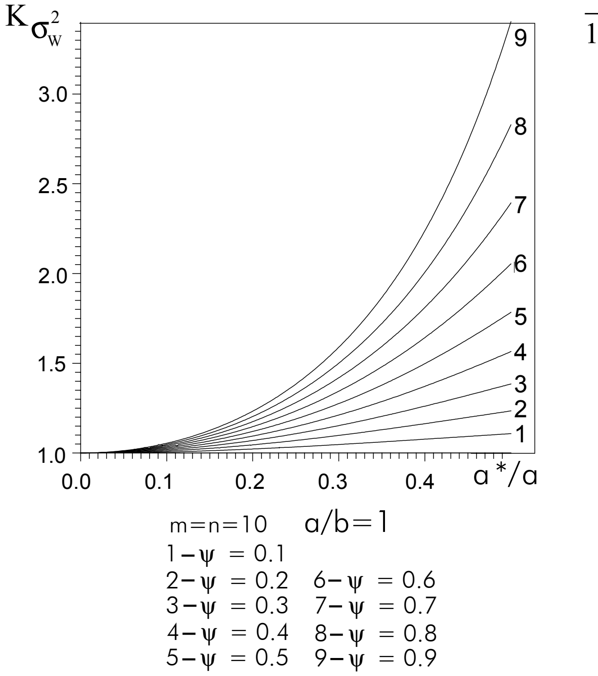

Рис.4. Вплив відносного розміру квадратного включення на величину параметра дисперсії прогину пластини.

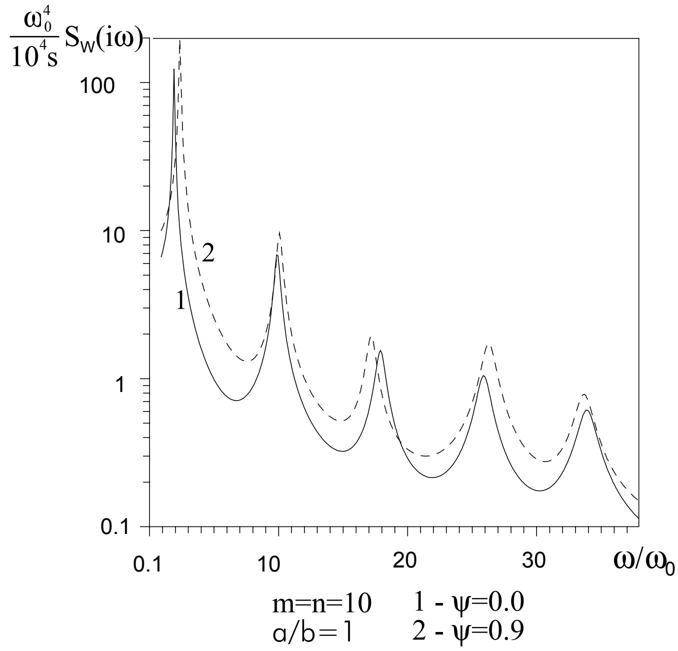

Рис.5. Спектральні щільності прогину в центрі пластини з центральним квадратним включенням із стороною $0.5a$.

Значення спектральної щільності відкладені в логарифмічному масштабі. Кожен максимум функції відповідає одній з власних частот пластини. Перший максимум відповідає нижчій власній частоті коливань пластини, яка при зменшенні жорсткості включення зростає. Оскільки спектр випадкового процесу в основному зосереджено у відносно вузькій області частот навколо власних частот коливань пластини, то процес є вузькосмуговим. Припущення про вузькосмуговість процесу на виході для систем з малим затуханням добре підтверджується експериментально та є цілком обгрунтовано [6].

Таким чином, отримані формули дозволяють проводити аналіз ймовірнісних характеристик пластин з включеннями від геометричних та фізичних параметрів при випадкових навантаженнях з метою вибору їх оптимальних значень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями.- М.: Машиностроение. -1981.- 191 с.

2. Швидка С. П. Коливання прямокутних пластин з включеннями як відгук на дію поверхневого випадкового навантаження // Вісник Запорізького держ. університету. - ЗДУ, 1998.- №1 – С. 81-83.

3. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. - М. Наука, 1979.- 336с.

4. Швыдкая С. П. Распределение экстремумов временных амплитуд случайного процесса колебаний пластин с включениями // Придніпровський наук. вісник. Механіка та математика – 1997.- №12(23) – С. 9-11.

5. Диментберг М.Ф. Вынужденные колебания пластин при нагрузке, представляющей собой пространственно-временной случайный процесс // Инжен. журнал.- 1961.- т.1.- вып.2.

6. Макеев В.П. Гриненко Н.И. Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций.- М.:Наука, 1984.- 231с.