УДК 681.3:771.537.442

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Толок А.В., Мухин В.В.

В предлагаемом способе визуального анализа используются известные принципы исследования функций посредством производных. Этот принцип предполагает выделение таких функциональных свойств, как ***возрастание и убывание функции***, ***определение экстремальных точек***, ***максимум и минимум функции***, ***выпуклость и вогнутость***, а ***также точки перегиба функции***.

Задача состоит в получении наглядных графических образов как вспомогательных элементов отображения этих свойств для выделения некоторых "качеств" исследуемой функции.

Под ***графическим образом*** вспомогательных элементов в данном случае будем понимать совокупность отрезков, отображающих конкретные функциональные свойства посредством использования градаций цветового изменения.

Рассмотрим общую концепцию, на которой построен предлагаемый подход исследования функции.

Возрастание и убывание функции.

По определению [1-5] функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если на этом промежутке производная $f'(x) > 0$, и убывающей, если $f'(x) < 0$.

Исходя из определения, свойство возрастания и убывания функции делится на чередование двух «качеств» вдоль рассматриваемой числовой оси ***x*** и не зависит от количественных характеристик, таких как изменение уклона возрастания или изменение уклона убывания. Этот факт позволяет выделить понятия «возрастания» и «убывания» как проявления свойства, отображаемого как область, принадлежащую одному из этих качеств и окрашенную в соответствующий цвет.

На рис. 1 показан пример визуального выделения проявлений свойства "возрастания и убывания" с помощью окраски числовой оси соответственно белым и черным цветом.

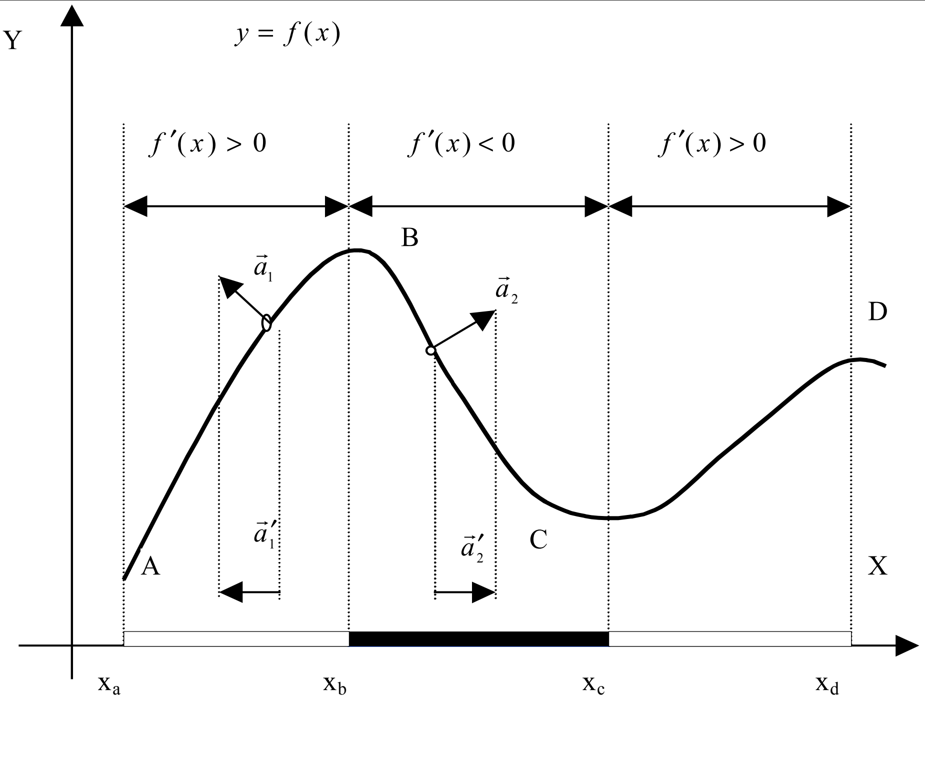

Рис.1. Пример визуализации свойства функции (возрастание, убывание)

Интересным является тот факт, что одномерный образ несёт визуальную информацию о свойстве возрастания и убывания и определяет положение экстремальных точек функции. Геометрический смысл заключается в определении направления проекции вектора нормали $\vec{a}'$ для каждой точки кривой на ось ***Ox***. Если направление проекции нормали совпадает с положительным направлением самой оси, определяемым направлением её единичного вектора $\vec{i}$, то можно утверждать, что функция убывает, в противном случае функция возрастает, т.е.

$$\vec{a}' \uparrow\uparrow \vec{i} \to f'(x) < 0,$$
$$\vec{a}' \uparrow\downarrow \vec{i} \to f'(x) > 0.$$

Однако в рассмотренном выше образе отсутствует информация о всех критических точках исследуемой функции и отсутствуют выпуклые и вогнутые зоны, поэтому неопределимы точки перегиба.

Критические точки. Под критическими точками принято понимать значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или в бесконечность либо терпит разрыв. Эта информация также подлежит визуализации посредством цветовых или тоновых сочетаний. Например, использование градаций цветового перехода “от черного к белому” позволяет отобразить области существования

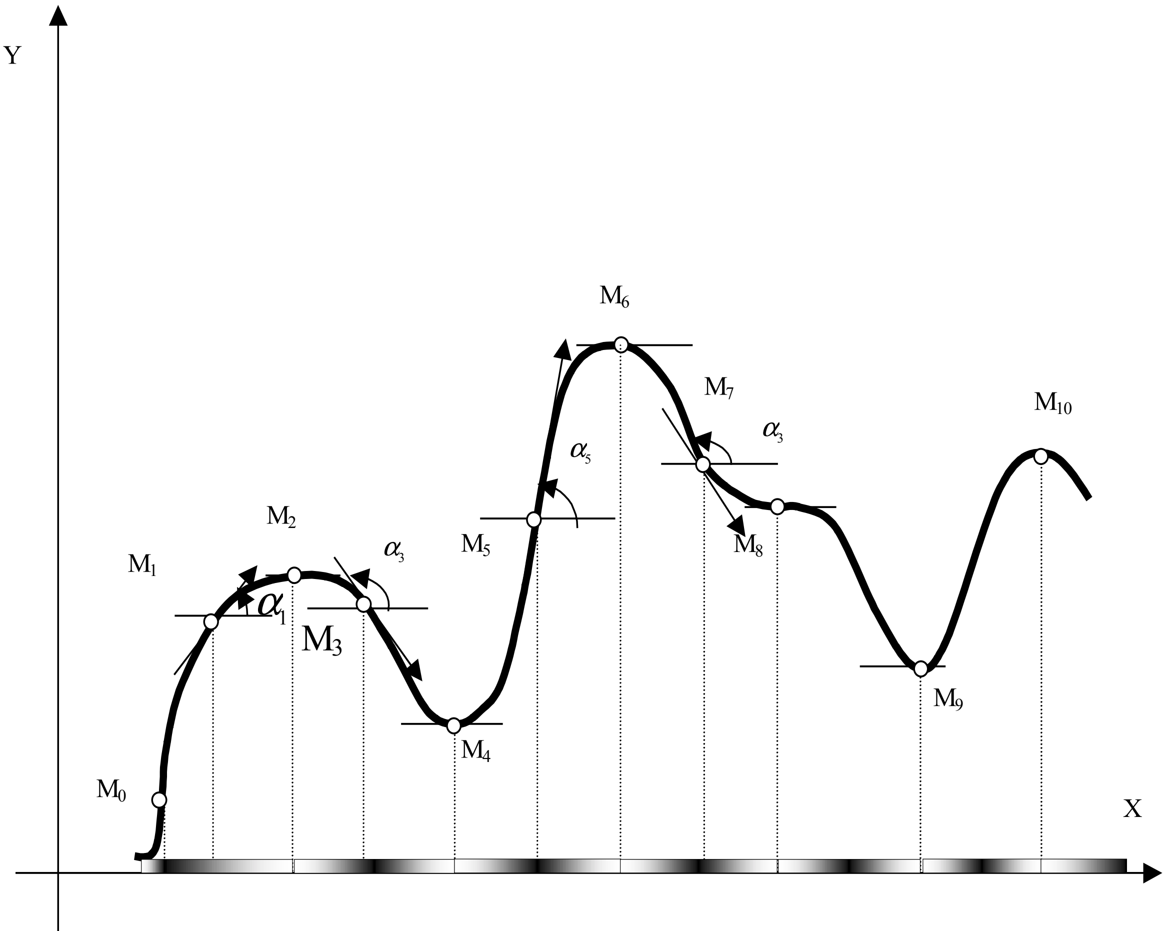

Рис.2 Пример визуализации свойства функции «критические точки»

критических точек (рис.2), при этом отбрасывается информация о возрастании и убывании исследуемой функции. Геометрический смысл заключается в определении угла α, образуемого вектором нормали для каждой точки кривой и осью Ox. Если наклон нормали совпадает с наклоном оси Ox, то можно утверждать, что производная функции стремится к бесконечности. Если направление нормали перпендикулярно оси Ox, то можно утверждать, что производная функции равна нулю, т.е.

$$\vec{a} \perp \vec{r} \to (f'(x) \to \infty),$$
$$\vec{a} \,//\, \vec{r} \to f'(x) = 0.$$

Присвоив каждому из этих случаев соответственно черный и белый цвет, а промежуточным положениям вектора нормали - соответствующую градацию перехода от черного к белому, получим искомый образ (рис. 2). Полученный результат достаточно наглядно отображает изменение кривизны исследуемой функции, отбросив информацию о возрастании и убывании, а также выпуклости и вогнутости. К тому же полностью отсутствует информация о максимуме и минимуме рассматриваемой кривой.

Выпуклость – вогнутость.

Точка M_i будет являться точкой перегиба, если существует вторая производная $f''(x_i) = 0$, причём имеющая в противоположных окрестностях этой точки разные знаки. Область функции $f(x)$, где вторая производная $f''(x) < 0$ называется ***выпуклым***, а при $f''(x) > 0$ - ***вогнутым участком функции*** $f(x)$.

Геометрически процедуру определения выпуклых и вогнутых участков можно представить как изменение угла наклона вектора нормали α в окрестности точки M_i. Это изменение можно записать как угол между нормалями в точках M_i' и M_i'', расположенных в противоположных окрестностях точки M_i при условии сохранения последовательности обхода. В этом случае интерес представляет не значение угла, а его знак - направление изменения угла α (рис.3).

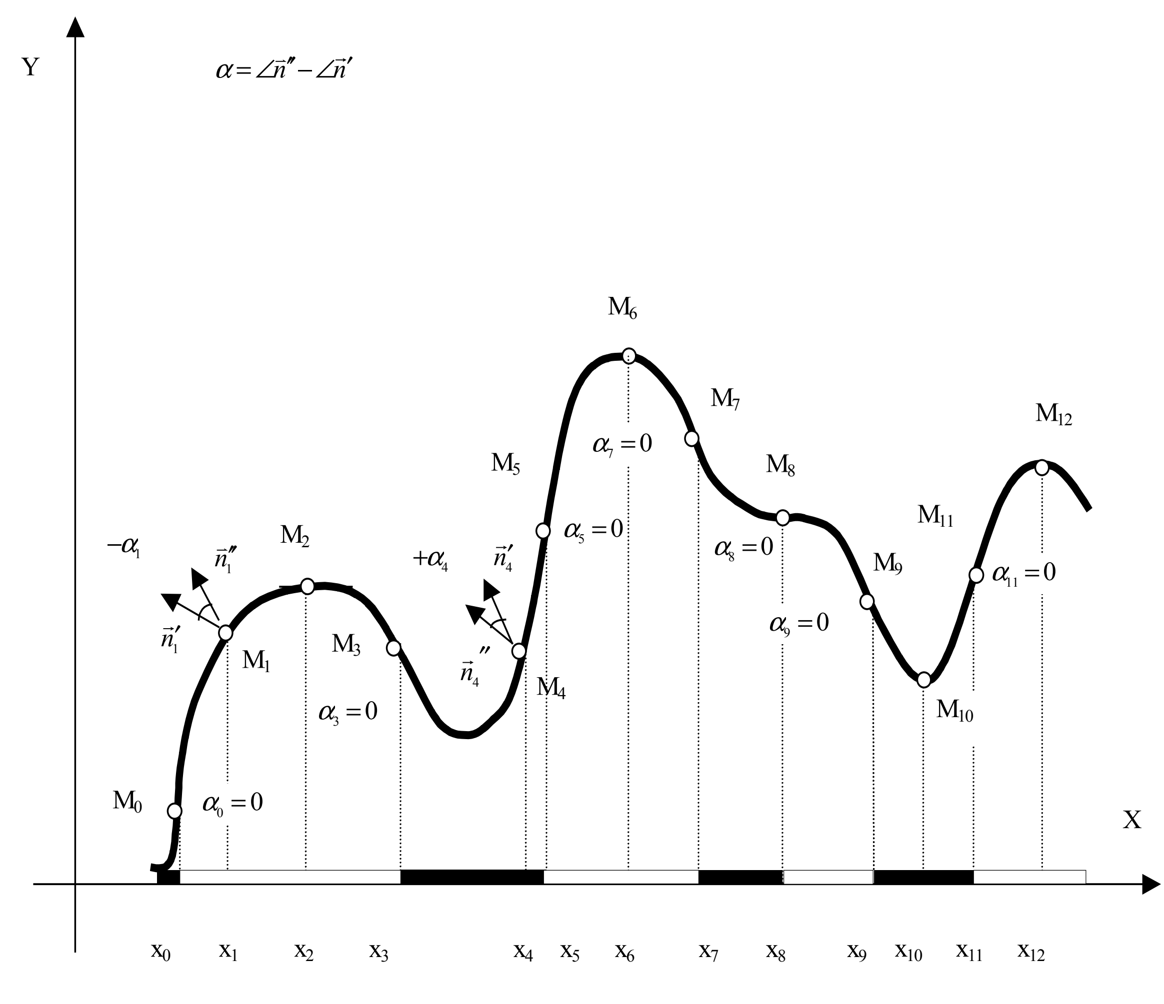

Рис.3 Пример визуализации свойства функции «выпуклость- вогнутость»

Определив знак угла как качество, соответствующее проявлениям свойства «выпуклость - вогнутость» и присвоив каждому из них определенный цвет, например, белый и черный соответственно, получаем области, характеризующие знак второй производной.

Максимум и минимум.

Из определения следует, что если существует производная $f'(a)$, то функция $f(x)$ может иметь в точке ***a*** внутренний максимум или минимум лишь в том случае, когда при $x = a$

$f'(a) = 0$ (необходимое условие экстремума).

Если существует вторая производная $f''(a)$, то функция $f(x)$ имеет в точке ***a***

максимум при $f'(a) = 0$ и $f''(a) < 0$,

минимум при $f'(a) = 0$ и $f''(a) > 0$.

Имея графические аналоги для исследования обоих случаев рис.2 и рис.3, предлагается использовать комбинированный способ определения искомых точек (рис.4.)

На рис.4 наглядно отображаются области существования локальных максимумов и минимумов рассматриваемой функции, где максимум включает в себя сочетание белого цвета в критической точке первого образа с белым цветом области выпуклости функции, а минимум включает в себя сочетание белого цвета в критической точке с черным цветом области вогнутости функции.

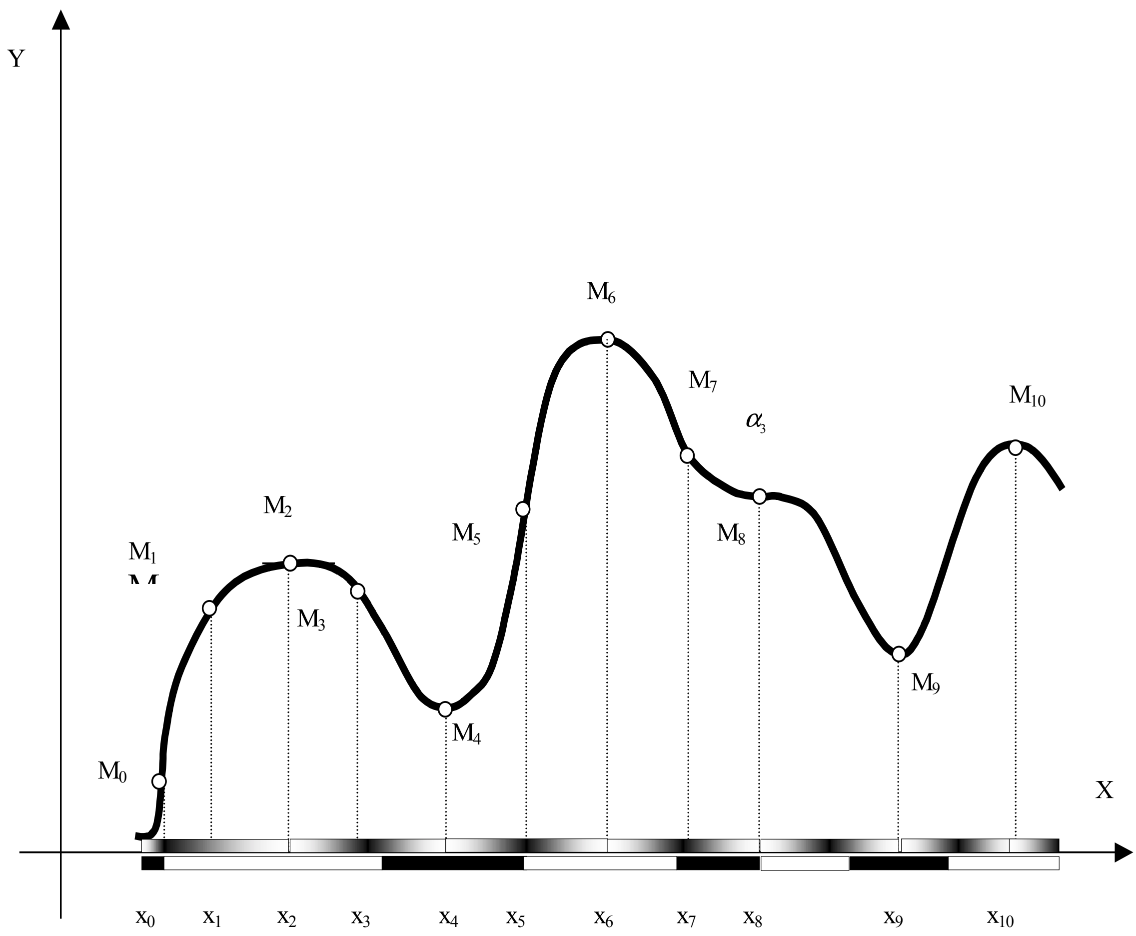

Рис.4 Пример визуализации свойства функции максимум и минимум

Таким образом, для исследуемой кривой можно выделить множество аргументов $x = \{x_2, x_6, x_{10}\}$, значение функции для которых будет локальным максимумом, и множество аргументов $x = \{x_0, x_4, x_9\}$, значение функции для которых будет локальным минимумом.

Критическая точка *M₈* не относится ни к одному из перечисленных множеств, поскольку $f''(x_8) = 0$, а значит, не выполняется второе условие определения.

Предлагаемый способ исследования функции одного аргумента достаточно легко переносим на анализ поверхности функции двух переменных $f(x, y)$, где по тому же принципу пространственный образ разбивается на плоские проекции, отображающие вышеперечисленные области, содержащие визуальную информацию о свойствах функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наук. Думка,1979. – 320 С.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. -М.: Наука,1969.- Т.1. - 607 С.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.-Харьков,1970.- С.212-568.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов.-М.:Высшая школа, 1988. - С. 18 – 271.
5. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. –К.:Наук.Думка,1972. - С.171-224.