

УДК 517.97

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ФЛАГОВОГО ПРОСТОРУ

Стеганцева П.Г., Величко І.Г.

Флаговий простір відноситься до класичних неєвклідових просторів і його метричні особливості добре вивчені (див., наприклад, [1,2,3]). Флагова геометрія являє собою математичну модель принципу відносності механіки Галілея - Ньютона [2]. Стаття, що пропонується, присвячена диференціальній геометрії кривих та поверхонь флагового простору.

1. Різні означення флагового простору. Сучасні основи геометрії включають три аспекти : аксіоматичний, проєктивний, метричний. В аксіоматику флагового простору включаються всі аксіоми системи Вейля, крім аксіоми V_4^* , яка замінюється такою аксіомою :

V_4^* . Існує хоча б один вектор, скалярний квадрат якого додатний. Існують принаймні два лінійно незалежних вектора, скалярні квадрати яких рівні нулю.

Таким чином, базовою частиною флагової геометрії, як і євклідової, є афінна геометрія, але їх метричні властивості різні. Векторно- аксіоматичну побудову флагового простору здійснено, наприклад, у роботі [3]. У ній також розглянуто деякі питання аналітичної геометрії прямих і площин цього простору. Зауважимо лише, що прямі і площини флагового простору нерівноправні, існують три типи прямих та площин: неізотропні, слабо ізотропні та сильно ізотропні. Це пояснюється тим, що згідно з аксіоматикою флаговий простір містить два типи ненульових векторів – з додатнім і рівним нулю скалярним квадратом, у той час як у євклідовому просторі будь-який ненульовий вектор має додатній скалярний квадрат.

Проективно - групова точка зору на геометрію полягає в наступному. У проєктивному просторі фіксується деяка фігура F і з проєктивної групи перетворень проєктивного простору виділяються ті перетворення, відносно яких фігура F інваріантна. Ці перетворення також утворюють групу, яка називається фундаментальною групою. Сама фігура називається абсолютом геометрії. Вивчення інваріантів фундаментальної групи і складає предмет геометрії.

З цієї точки зору флаговим простором називається проєктивний простір, абсолют якого складається з проєктивної площини ω , подвійної дійсної прямої g на ній та подвійної дійсної точки Ω на прямій g . Абсолют флагового простору називається ще флагом. Матриця перетворень фундаментальної групи флагового простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

З метричної точки зору флаговий простір є простором з квадратичною метрикою. Вона задається за допомогою квадратичної форми, значення якої на векторі $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ визначається за формулою $f(\bar{x}) = x_1^2$.

2. Канонічний репер кривої. Дериваційні формули. Криві флагового простору будемо задавати за допомогою векторної функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Натуральним параметром кривої назвемо такий параметр S , для якого виконується умова

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1. \quad (1)$$

Оскільки у флаговому просторі вектор $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$ має модуль $|\bar{a}|$, що дорівнює $|x_a|$, то вимога (1) рівносильна вимозі $|\bar{x}'(t)| = 1$. Наприклад, параметризація кривої $\bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ є натуральною. Для переходу до натуральної параметризації кривої достатньо за натуральний параметр взяти першу координату векторної функції, що задає криву.

Означення. Дотичною до кривої в даній точці називається пряма, що проходить через цю точку в напрямку вектора $\bar{r}'(t)$.

Дотична до кривої у відповідності до класифікації векторів флагового простору може бути неізотропною, слабо ізотропною або сильно ізотропною прямою.

Означення. Стичною площиною кривої в даній точці назвемо площину, що проходить через цю точку в напрямку векторів $\bar{r}'(t)$ та $\bar{r}''(t)$.

Крім скалярного добутку двох векторів будемо розглядати ще одну бінарну операцію на множині усіх векторів флагового простору, а також тернарну операцію на цій множині. Результати цих операцій будемо називати відповідно добутком двох і добутком трьох векторів.

Добутком двох векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ флагового простору називається

число $\overline{ab} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, а добутком трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}$ та $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ - число

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ці операції мають такі властивості:

1. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$
2. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\overline{ab})$
3. $\overline{ab} = -\overline{ba}$
4. $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\overline{bc} = \overline{a_1bc} + \overline{a_2bc}$
5. $(\lambda\bar{a})\overline{bc} = \lambda(\overline{abc})$

Будемо розглядати у флаговому просторі тільки ті криві, що мають у кожній своїй точці неізотропний дотичний вектор.

У кожній точці M неізотропної кривої $\bar{r} = \bar{r}(t)$ флагового простору побудуємо такий репер $\{M, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$, для якого виконуються умови:

1. Вектор $\bar{m}_1$ є одиничним вектором дотичної прямої.
2. Вектор $\bar{m}_2$ лежить у стичній площині, ортогональний до вектора $\bar{m}_1$, причому $\bar{m}_1 \bar{m}_2 = 1$.
3. Вектор $\bar{m}_3$ напрямлений так, що $\bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{m}_3 = 1$.

Таким чином, якщо крива має рівняння $\bar{r}(x) = (x, y(x), z(x))$, тобто параметризована натуральним параметром, то $\bar{m}_1 = \bar{r}'(x) = (1, y'(x), z'(x))$. Для знаходження вектора $\bar{m}_2$ необхідно продиференціювати вектор $\bar{r}(x)$ ще раз, і, так як вектор $\bar{m}_1$ одиничний, то вектори $\bar{r}''(x)$ і $\bar{m}_1$

ортогональні, тому вектори $\bar{r}''(x)$ і $\bar{m}_2$ колінеарні. Коефіцієнт колінеарності знаходимо із вимоги 2.

$$\text{Таким чином, } \bar{m}_2 = \frac{\bar{r}''(x)}{y''(x)} = \left(0, 1, \frac{z''(x)}{y''(x)} \right).$$

Вектор $\bar{m}_2$ будемо називати *одиничним вектором головної нормалі*. Він є слабо ізотропним вектором. Очевидно, що вимозі 3 задовольняє вектор $\bar{m}_3 = (0, 0, 1)$, тобто одиничний вектор бінормалі один і той же в довільній точці кривої і є сильно ізотропним вектором. Побудований репер можна називати *ортонормованим*, маючи на увазі, що нормування відбувається за допомогою вимог $\bar{m}_1 \bar{m}_2 = 1$ та $\bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{m}_3 = 1$, оскільки говорити про норму ізотропних векторів немає сенсу.

Якщо крива має рівняння $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, тобто її задано не в натуральній параметризації, то вектор $\bar{r}''(t)$ вже не буде ортогональним до дотичної прямої і для знаходження вектора $\bar{m}_2$ застосуємо процес ортогоналізації. Одержимо

$$\bar{m}_1 = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|} = \left(\pm 1, \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{z'(t)}{x'(t)} \right), \quad \bar{m}_2 = \left(0, 1, \frac{z''(t) \mp \frac{x''(t)z'(t)}{|x'(t)|}}{y''(t) \mp \frac{x''(t)y'(t)}{|x'(t)|}} \right), \quad \bar{m}_3 = (0, 0, 1)$$

Неважко отримати дериваційні формули побудованого репера кривої, які будемо називати як і в евклідовому просторі формулами Френе кривої. Перша формула, очевидно, має вигляд $\frac{d\bar{r}}{dx} = \bar{m}_1$, де x натуральний параметр.

Далі, $\frac{d\bar{m}_1}{dx} = k\bar{m}_2$, де $k = y''(x)$. Продиференціювавши ще один раз, одержимо

$$\frac{d\bar{m}_2}{dx} = \left(0, 0, \left(\frac{z''(x)}{y''(x)} \right)' \right) \text{ тобто } \mathfrak{K} = \left(\frac{z''(x)}{y''(x)} \right)'$$

Остання формула Френе має вигляд $\frac{d\bar{m}_3}{dx} = \bar{0}$.

Таким чином, матриця дериваційних формул Френе має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{K} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де k і $\mathfrak{K}$ є скалярними функціями параметра x .

3. Кривина та скрут. Частинні випадки кривих. Будемо називати k і $\mathfrak{K}$, що визначаються формулами Френе, відповідно *кривиною* та *скрутом* кривої. Легко вивести формули для обчислення кривини і скруту кривої, що задана в натуральній параметризації.

Дійсно, добуток $\frac{d\bar{r}}{dx} \frac{d^2\bar{r}}{dx^2}$ дорівнює k , а добуток $\frac{d\bar{r}}{dx} \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \frac{d^3\bar{r}}{dx^3}$ дорівнює $k^2 \mathfrak{K}$.

$$\text{Таким чином, отримуємо } k = \frac{d\bar{r}}{dx} \frac{d^2\bar{r}}{dx^2}, \quad \mathfrak{K} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dx} \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \frac{d^3\bar{r}}{dx^3}}{\left(\frac{d\bar{r}}{dx} \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \right)^2}.$$

Як і у евклідовому просторі систему рівнянь $\begin{cases} k = k(x) \\ \mathfrak{K} = \mathfrak{K}(x) \end{cases}$, де x - натуральний параметр, будемо називати натуральними рівняннями кривої.

Розглянемо питання про знаходження параметричних рівнянь кривої за її натуральними рівняннями.

Нехай натуральні рівняння кривої мають вигляд $\begin{cases} k = const \\ \mathfrak{K} = const \end{cases}$. Будемо шукати параметричні рівняння цієї

кривої у вигляді $\bar{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Так як $k = y''(x)$, то $y(x) = \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2$. Оскільки

$\mathfrak{K} = \left(\frac{z''(x)}{y''(x)} \right)'$, то $z(x) = \frac{k\mathfrak{K}x^3}{6} + C_3x^2 + C_4x + C_5$ де $C_1, \dots, C_5$ - довільні сталі. Одержані криві є аналогами гвинтових ліній евклідового простору.

Інший частинний випадок дають натуральні рівняння $\begin{cases} k = const \\ \mathfrak{K} = 0 \end{cases}$. Отримаємо криву

$\bar{r}(x) = \left(x, \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2, C_3x^2 + C_4x + C_5 \right)$. За її неявними рівняннями

$$\begin{cases} y = \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2 \\ y - z = (C_1C_3 - C_4)x + C_2C_3 - C_5 \end{cases} \quad \text{можна зробити висновок, що вона плоска.}$$

Плоскі криві флагової геометрії, що мають постійну кривину, називаються циклами[2].

4. Поверхні флагового простору. Дотична площина та нормаль. Поверхні флагового простору будемо задавати векторною функцією двох скалярних аргументів $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Параметричні рівняння поверхні можна записати у вигляді $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$.

Означення. Поверхня F , що задана за допомогою векторної функції $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, називається *регулярною*, якщо в кожній її точці вектори $\bar{r}_u$ та $\bar{r}_v$ неколінеарні.

Означення. Дотичною площиною $T_M F$ регулярної поверхні F у точці M називається площина, що визначається векторами $\bar{r}_u$ та $\bar{r}_v$.

Зупинимось лише на випадку поверхонь, в яких дотична площина в кожній точці неізотропна. Будемо пов'язувати з кожною точкою M регулярної неізотропної поверхні рухомий репер $(M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Розглянемо криві перетину поверхні F площинами, що проходять через пряму g абсолюта флагового простору. Такі площини у відповідності до класифікації площин сильно ізотропні.

Розглянемо також криві перетину поверхні площинами, що проходять через пряму ΩA абсолюта, де A - полюс прямої g [4]. Ці площини слабо ізотропні. Будемо розглядати таку параметризацію поверхні, в якій розглянуті криві пешої сім'ї є координатними лініями $u = const$, а криві другої сім'ї - координатними лініями $v = const$. Тоді вектор $\bar{r}_v$ є дотичним вектором кривої першої сім'ї і він слабо ізотропний, а вектор $\bar{r}_u$ - неізотропний вектор, що визначає напрям дотичної прямої до кривої другої сім'ї. Введемо позначення $(\bar{r}_u, \bar{r}_u) = E$. Ясно, що $E > 0$.

Таким чином, якщо параметри u і v поверхні вибрано описаним вище способом, то вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ рухомого репера в точці M поверхні виберемо таким чином: $\bar{e}_1 = \bar{r}_u, \bar{e}_2 = \bar{r}_v, \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Сильно ізотропну пряму, що проходить через точку M поверхні, будемо називати *нормаллю* до поверхні.

Означимо на поверхні *першу квадратичну форму* рівністю $I = d\bar{r}^2$. Оскільки $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, то $I = Edu^2$. Очевидно, що I невизначена для ізотропних кривих. Якщо ж крива неізотропна, то за допомогою I можна визначити її довжину $s = \int_a^b |d\bar{r}| = \int_a^b \sqrt{I}$.

Другою квадратичною формою поверхні будемо називати квадратичну форму $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, коефіцієнти якої обчислюються за формулами $L = \bar{r}_{uu}\bar{r}_u\bar{r}_u$, $M = \bar{r}_{uv}\bar{r}_u\bar{r}_v$, $N = \bar{r}_{vv}\bar{r}_u\bar{r}_v$.

Дериваційні формули побудованого рухомого реперу поверхні можна по аналогії з евклідовим простором записати у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{r}_{11} &= \Gamma_{11}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{11}^2 \bar{r}_2 + \alpha \bar{e}_3, \\ \bar{r}_{12} &= \Gamma_{12}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{12}^2 \bar{r}_2 + \beta \bar{e}_3, \\ \bar{r}_{22} &= \Gamma_{22}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{22}^2 \bar{r}_2 + \gamma \bar{e}_3,\end{aligned}\tag{2}$$

де $\bar{r}_1 = \bar{r}_u$, $\bar{r}_2 = \bar{r}_v$, $\bar{r}_{11} = \bar{r}_{uu}$, $\bar{r}_{12} = \bar{r}_{uv}$, $\bar{r}_{22} = \bar{r}_{vv}$. Для обчислення коефіцієнтів Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ та α, β, γ дериваційних формул домножимо кожен з рівностей (2) скалярно на вектор $\bar{r}_1$, а потім на вектор $\bar{r}_2$, а також знайдемо добутки $\bar{r}_{11}\bar{r}_1\bar{r}_2$, $\bar{r}_{12}\bar{r}_1\bar{r}_2$, $\bar{r}_{22}\bar{r}_1\bar{r}_2$. З урахуванням того, що

$$(\bar{r}_1, \bar{r}_1) = E, (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 0, (\bar{r}_2, \bar{r}_2) = 0,$$

одержимо
$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \Gamma_{22}^1 = 0, \alpha = \frac{L}{r_1 r_2 e_3}, \beta = \frac{M}{r_1 r_2 e_3}, \gamma = \frac{N}{r_1 r_2 e_3}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. - Киров: Кировский государственный педагогический институт имени В.И.Ленина, 1991. - 121с.
2. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. - М.: Наука, 1969. - 212с.
3. Понарин Я.П. Построение трехмерной флаговой геометрии на основе системы аксиом Вейля. - Депонировано в ВИНТИ 22.03.82, 1252-82 ДЕП. - 19с.
4. Кованцов М.І. Проективна геометрія. – К.: Вища школа, 1969.