

УДК 336.774.5

ЙМОВІРНІСНІ ОЦІНКИ ДОПУСТИМОЇ СУМИ КРЕДИТІВ

Приварнікова А.О.

В умовах нестабільної економіки різко збільшується ризик від операцій кредитування внаслідок неповернення кредитів, тому важливо оцінити допустиму суму кредитів, яка не порушує стабільності роботи кредитних установ.

Сума неповернених кредитів S пропорційна сумі виданих кредитів Q ;

$$S = kQ, \quad (1)$$

де k - доля неповернених кредитів.

У загальному випадкові Q і k випадкові величини з законами розподілу $f_1(Q), f_2(k)$.

Нехай R - гранична величина втрат від кредитних операцій, яка не порушує стабільності кредитної установи. У загальному випадку її також можна вважати випадковою величиною з законом розподілу $f_3(R)$.

Будемо вважати, що стабільність кредитної установи забезпечена, якщо втрати від кредитування не перевищують R із заданою ймовірністю:

$$P(S < R) = H. \quad (2)$$

Якщо R не випадкова величина ($R = R_0$), стабільність забезпечується за умови:

$$P(S < R_0) = H. \quad (3)$$

При відомому законі розподілу $f(k, Q)$ закон розподілу $g(S)$ можна представити у вигляді [1]:

$$g(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{Q} f\left(\frac{S}{Q}, Q\right) dQ \quad (4)$$

Вважаючи випадкові величини Q , k незалежними, закон їх розподілу представимо у вигляді:

$$f(k, Q) = f_1(Q) f_2(k) = f_1(Q) f_2\left(\frac{S}{Q}\right). \quad (5)$$

Таким чином, закон розподілу неповернених сум кредитів можна представити:

$$g(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{Q} f_1(Q) f_2\left(\frac{S}{Q}\right) dQ. \quad (6)$$

Тоді H згідно з (2) є ймовірність попадання в область D , обмежену $S > 0$, $R > 0$, $S < R$:

$$H = P(S < R) = \iint_D f(R, S) dR dS \quad (7)$$

Приймаючи R, S незалежними, тобто $f(R, S) = g(S) f_3(R)$, одержимо:

$$H = \int_0^{+\infty} f_3(R) \left[\int_0^R g(S) dS \right] dR = \int_0^{+\infty} g(S) \left[\int_S^{+\infty} f_3(R) dR \right] dS \quad (8)$$

Для випадку, коли $R = R_0$ згідно з (3) маємо:

$$H = \int_0^{R_0} g(S) dS. \quad (9)$$

У загальному випадку $g(S)$ задається в інтегральній формі (6). У деяких випадках $g(S)$ можна представити аналітично. Якщо Q розподілено за законом рівномірної густини в інтервалі

$$(Q_{\min}, Q_{\max}), \text{ тобто } f_1(Q) = \frac{1}{Q_{\max} - Q_{\min}}, \text{ а } k \text{ за законом Релея } f_2(k) = \frac{k}{a^2} e^{-\frac{k}{2a^2}},$$

тоді для $g(S)$ одержимо:

$$g(S) = \frac{S\sqrt{2\pi}}{(Q_{\max} - Q_{\min})a} \left[\Phi\left(\frac{S}{Q_{\min}a}\right) - \Phi\left(\frac{S}{Q_{\max}a}\right) \right], \quad a = \frac{m_k}{\sqrt{\pi/2}}, \quad (10)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функція Лапласа, m_k - математичне сподівання k .

Якщо в (1) Q не являється випадковою величиною, а k - випадковою, то закон розподілу S як функції випадкового аргументу k можна представити у вигляді:

$$g(S) = \frac{1}{Q} f_2\left(\frac{S}{Q}\right) \quad (11)$$

За допомогою (8) можна одержати залежність:

$$Q = \varphi(a_i, b_i, H), \quad (12)$$

де a_i, b_i - параметри законів розподілу $f_2(k), f_3(R)$.

Величина Q є ймовірнісною оцінкою допустимої суми кредитів, яка забезпечує стабільність роботи кредитної установи з ймовірністю H .

Приймаючи типові закони розподілу $f_2(k), f_3(R)$, можна одержати співвідношення для обчислення Q . При знаходженні інтегралів (8) використані результати [2].

Якщо $f_2(k), f_3(R)$ розподілені за нормальним законом, одержимо:

$$Q = \frac{m_R(1 - \gamma^2 V_R^2)}{m_k(1 + \gamma\sqrt{V_R^2 + V_k^2} - \gamma^2 V_R^2 V_k^2)}, \quad (13)$$

де m_R, m_k - математичні сподівання випадкових величин R і k , V_R, V_k - їх коефіцієнти варіації, γ - квантиль рівня H стандартного нормального розподілу.

Формулою (13) можна користуватися при коефіцієнтах варіації $V < 0.2$.

Для логнормального розподілу $f_2(k), f_3(R)$ маємо:

$$Q = \frac{m_R \sqrt{1 + V_R^2}}{m_k \sqrt{1 + V_R^2} \exp\left\{\gamma \sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_k^2)]}\right\}}. \quad (14)$$

У більшості випадків Q входить у вираз для H у неявному вигляді.

Якщо k розподілено за законом Релея, а R - за нормальним, маємо:

$$H = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi \mu^2 V_R^2}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{\frac{4}{\pi \mu^2} + 2V_R^2} \right\}; \quad \mu = \frac{m_R}{Q m_k}. \quad (15)$$

При розподілі k за експоненціальним законом з параметром $\lambda = \frac{I}{m_k}$, а R - за нормальним, одержимо:

$$H = 1 - \left[0,5 + \Phi \left(\frac{1}{V_R} - \mu V_R \right) \right] \exp \left\{ -\mu + \frac{V_R^2 \mu^2}{2} \right\}. \quad (16)$$

Коли $R = R_0$, тобто не є випадковою величиною, у формулах (13)-(16) треба взяти $m_R = R_0$, $V_R = 0$.

У цьому випадку із співвідношень (15), (16) можна також одержати Q в явному вигляді.

Для розподілу k за законом Релея:

$$Q = \frac{R_0 \sqrt{\pi/2}}{m_k \sqrt{-2 \ln(1-H)}}. \quad (17)$$

При розподілі k за експоненціальним законом з параметром $\lambda = \frac{I}{m_k}$:

$$Q = -\frac{R_0}{m_k \ln(1-H)}. \quad (18)$$

Закони розподілу $f_2(k)$, $f_3(R)$ і їх параметри встановлюються шляхом статистичного аналізу діяльності кредитної установи за попередній період і переносяться на майбутнє. В умовах нестабільної економіки більш перспективними можуть виявитись експертні оцінки.

Вважаючи розподіли k, R нормальними і маючи оптимістичний (k_{min}, R_{max}) і песимістичний (k_{max}, R_{min}) прогнози, можна оцінити параметри розподілу:

$$m_k = \frac{k_{max} + k_{min}}{2}, \quad \sigma_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{6}, \quad V_k = \frac{\sigma_k}{m_k};$$

$$m_R = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}, \quad \sigma_R = \frac{R_{max} - R_{min}}{6}, \quad V_R = \frac{\sigma_R}{m_R}. \quad (19)$$

Розглянемо на прикладі ймовірнісну оцінку допустимої суми кредитів при експертних оцінках R і k : $k_{min} = 0.2$, $k_{max} = 0.5$, $R_{min} = 600$ тис.грн., $R_{max} = 900$ тис.грн.

При $H = 0.997$ ($\gamma(H) = 2.748$) за формулою (13) $Q = 1\,405\,608$ грн.; за формулою (14) $Q = 1\,402\,589$ грн, тобто при однакових математичних сподіваннях і коефіцієнтах варіації результати близькі.

Так як R, k додатні величини, то при відомих оцінках числових характеристик перевагу слід віддати гіпотезі про логнормальний розподіл.

Зробимо оцінку впливу закону розподілу k на середню величину долі неповернених кредитів m_k . Так як k належить інтервалу $(0;1)$, то при $m_k = 0,5$, $V_k = \frac{1}{3}$ і нормальному розподілі ймовірність попадання в цей інтервал складає $0,9973$. Для однопараметричних законів Релея і експоненціального через ймовірність попадання в заданий інтервал можна оцінити m_k . При ймовірності $0,9973$ попадання в інтервал $(0;1)$ закону Релея відповідає $m_k = 0,364$, а експоненціальному - $m_k = 0,169$.

Таким чином, розглядаючи гіпотетичні закони розподілу долі неповернених кредитів, можна прийняти для стабільної економіки - експоненціальний закон, періоду стабілізації - Релея, нестабільної - нормальний (логнормальний).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей .-М.: Физматгиз, 1962.-564с.
2. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем.- М.: Мир, 1980.-604с.