

УДК 336.714

ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ КОМБІНОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ З НЕРОЗШИРЕНИМ СПОСТЕРІГАЧЕМ

Потапенко С.М., Савранська А.В.

У роботі [1] для забезпечення робастності був запропонований алгоритм управління зі спостерігачем вектора стану та оцінкою вектора невизначеності по нев'язці спостерігача. Ця оцінка використовувалась у законі управління для компенсації вектора невизначеності (комбінована система управління). Однак внаслідок відсутності методів дослідження, строге доведення робастності запропонованої системи не було проведено. У роботах [2,3] був розроблений математичний апарат дослідження робастності сингулярно - збуджених систем.

Метою цієї статті є дослідження робастної стійкості запропонованої системи управління [1] за допомогою розробленого в [2,3] математичного апарату.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gf(x, u), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

$$G = B \cdot Q, \quad (3)$$

де $x \in R^n$ - вектор стану системи, $u \in R^m$ - вектор управління, $y \in R^r$ - вектор спостереження; A, B, C, G - відомі сталі матриці розмірностей відповідно $n \times n; m \times n; r \times n; n \times \alpha$; $f \in R^\alpha$, $f(0,0) \neq 0$. Для функції $f(x, u)$ існує стала M така, що на довільному скінченному відрізку $[0, T]$ має місце нерівність $\|f(x, u)\| \leq M$

(3) - умова узгодженості управління та невизначеності f . При виконанні цієї умови вектор управління завжди може скомпенсувати вектор невизначеності f .

Нехай трійка (A, B, C) цілком керована та спостережувана. Для (1), (2) спостерігач можна подати у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0 \quad (4)$$

де $\hat{x}$ - оцінка вектора X ; L - матриця коефіцієнтів підсилювання спостерігача.

З урахуванням (2) рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(\hat{x} - x).$$

Похибка оцінювання

$$\tilde{x} = \hat{x} - x, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0 \quad (5)$$

де $\tilde{x}^0 = \hat{x}^0 - x^0$.

Віднімаючи (1) від (4), можна записати

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} - Gf(x, u). \quad (6)$$

Внаслідок спостережуваності пари (A, B) спектр $A + LC$ можна зробити довільним. Позначимо

$$A_L := \varepsilon(A + LC), \quad (7)$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Тоді з (6) одержимо

$$\varepsilon \dot{\tilde{x}} = A_L \tilde{x} - \varepsilon Gf(x, u). \quad (8)$$

Закон управління будемо задавати у вигляді

$$u = -P\hat{x} - R(C\hat{x} - y) = -P\hat{x} - RC\tilde{x} = -P(x + \tilde{x}) - RC\tilde{x}, \quad (9)$$

де P та R - сталі матриці коефіцієнтів закону управління.

Підстановка (9) в (1), (8) дає

$$\dot{x} = (A - BP)x - B(P + RC)\tilde{x} + Gf(x, \tilde{x}), \quad (10)$$

$$\varepsilon \dot{\tilde{x}} = A_L \tilde{x} - \varepsilon Gf(x, \tilde{x}). \quad (11)$$

Нехай $BR = L$. Тоді система (10), (11) перепишеться у вигляді

$$\dot{x} = (A - BP)x - BP\tilde{x} - (LC\tilde{x} - Gf(x, \tilde{x})), \quad (12)$$

$$\varepsilon \dot{\tilde{x}} = A_L \tilde{x} - \varepsilon Gf(x, \tilde{x}). \quad (13)$$

Система (12), (13) - сингулярно - збуджена, x и $\tilde{x}$ - вектори стану повільних та швидких процесів відповідно.

Вироджену систему отримаємо, якщо покладемо $\varepsilon = 0$

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s - BP\tilde{x}_s - (LC\tilde{x}_s - Gf(x_s, \tilde{x}_s)), \quad (14)$$

$$0 = A_L \tilde{x}_s. \quad (15)$$

З (15) маємо

$$\tilde{x}_s \equiv 0. \quad (16)$$

Звідси випливає, що

$$\dot{\tilde{x}}_s \equiv 0 \quad (17)$$

З порівняння (1) та (4) з урахуванням (5) одержуємо

$$\dot{x} = Ax + LC\tilde{x} - Gf(x, u).$$

Співвідношення (16), (17) дозволяють записати

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_u(x, \tilde{x}, u, \varepsilon) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (LC\tilde{x} - Gf(x, u)) = 0.$$

Таким чином, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\varphi_u(x, \tilde{x}, u, \varepsilon) \rightarrow 0$ і сингулярно - збуджена система (12), (13) перепишеться у вигляді

$$\dot{x} = (A - BP)x - BP\tilde{x} - \varphi(x, \tilde{x}, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (18)$$

$$\varepsilon \dot{\tilde{x}} = A_L \tilde{x} - \varepsilon Gf(x, \tilde{x}), \quad (19)$$

де $\varphi(x, \tilde{x}, \varepsilon)$ одержуємо підстановкою u з (8) у вираз $\varphi_u(x, \tilde{x}, u, \varepsilon)$.

Вироджена система (14), (15) набуває вигляду

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s - BP\tilde{x}_s, \quad (20)$$

$$0 = A_L \tilde{x}_s. \quad (21)$$

Підставляючи $\tilde{x}_s \equiv 0$ у (20), одержимо

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s \quad (22)$$

Проведемо дослідження цієї системи на рівномірну асимптотичну стійкість у цілому та великому, використовуючи результати, одержані у [2], [3].

Функції $[(A - BP)x - BPx]$ і $A_L x$ - неперервні та задовольняють умові Ліпшиця по x та x в деякій відкритій області G простору змінних (x, x, t) .

Роз'язок (15) - неперервна, ізольована функція. Для системи (22) виконуються умови існування та єдиності роз'язку. Функція $(A - BP)x_s$ задовольняє умові Ліпшиця по X_s .

$x_s \equiv 0$ є ізольованою точкою спокою приєднаної системи

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = A_L x(\tau), \quad (23)$$

де τ - розтягнутий час, $\tau = \varepsilon^{-1}t$.

Точка спокою $x(\tau)$ системи (23) є рівномірно асимптотично стійкою за Ляпуновим (в силу *гурвіцевості* матриці A_L). Функції $\phi(x, x, \varepsilon)$ та $\varepsilon Gf(x, x)$ прямують до нуля, коли $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким чином, виконуються всі умови теореми з роботи [2].

Згідно з цією теоремою, існує стала $\varepsilon_0 > 0$ така, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ роз'язок $(x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon))$ задачі (18), (19) існує на відрізку $0 \leq t \leq T$, єдиний та задовольняє граничним рівностям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_s(t), \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = 0, \text{ при } 0 < t \leq T. \quad (25)$$

Таким чином, розв'язок системи (18), (19) за досить малий проміжок часу увійде в малий окіл виродженого розв'язку. Розглянемо цю систему при початкових умовах

$$x(T, \varepsilon) = x^{0*} \quad (26)$$

$$x(T, \varepsilon) = x^{0*} \quad (27)$$

Функції $[(A - BP)x - BPx]$ та $A_L x$ мають неперервні обмежені похідні по x та x . Матриця A_L - оборотна, внаслідок її *гурвіцевості*.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = A_L x \quad (28)$$

Через *гурвіцевість* матриці A_L ця система рівномірно асимптотично стійка. Матрицю P будемо вибирати з умови, щоб система (22) була асимптотично стійка.

Таким чином, для системи (18), (19) виконуються всі умови теореми 1 з роботи [2]. Отже, існує стала $\varepsilon_0 > 0$ така, що для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ роз'язок $(x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon))$ $(x(T, \varepsilon) = x^{0*}, x(T, \varepsilon) = x^{0*})$ системи (18), (19) рівномірно асимптотично стійкий відносно малих відхилень X^{0*} та довільних відхилень $\tilde{X}^{0*}$.

Матрицю P вибираємо з умови, щоб роз'язок виродженої системи був рівномірно асимптотично стійким у великому з початковими умовами з області G . Тоді виконуються всі умови теореми 2 роботи [3] і роз'язок системи (18), (19) є рівномірно асимптотично стійким у великому.

У випадку, коли G - увесь фазовий простір, матимемо стійкість у цілому.

Твердження: Нехай даний об'єкт управління (1), (2), для якого виконуються такі умови:

- трійка (A, B, C) повністю керована та спостережувана,
- виконується умова узгодженості $G = B \cdot Q$,
- A, B, C, G - відомі сталі матриці,

- для функції $f(x, u)$ існує стала M така, що на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$ існує нерівність $\|f(x, u)\| \leq M$.

Тоді для спостерігача (4) та регулятора (9) завжди можна підібрати матриці коефіцієнтів L, P, R такі, що повна система управління (1), (2), (4), (9) буде робастно стійка у цілому.

ЛІТЕРАТУРА

1. Потапенко Е.М. Сравнительная оценка робастных систем управления с различными типами наблюдателей. //Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1995. - №1. -С. 109-117.
2. Потапенко Е.М., Савранская А. В. Обобщение теоремы Тихонова для сингулярно - возмущенной системы. - Роботи П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика – 98". - Ч.1. - К., 1998. - С. 111-121.
3. Потапенко Е.М., Савранская А.В. Равномерная асимптотическая устойчивость сингулярно - возмущенной системы при постоянно действующих возмущениях. - Роботи П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика – 98". - Ч.1. - К., 1998. - С. 334-340.