

УДК 539.3

РЕАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АРМИРОВАННОЙ СРЕДЕ НА ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Пожуева И.С.

1. В данной работе построена модель деформирования и предложен алгоритм определения деформационных свойств композиционного материала при действии подвижных нагрузок. Рассматривается задача о движении нагрузок с докритической постоянной скоростью вдоль бесконечно длинной цилиндрической оболочки толщиной h и радиусом a , окаймленной армированным слоем. Внешний контур композиционного материала скреплен с абсолютно жестким пространством и является окружностью радиуса R (рис. 1). В данной постановке определяется напряженно-деформированное состояние системы "цилиндрическая оболочка - композит", вызванное движением внутри оболочки двух симметричных нагрузок, движущихся вдоль оболочки с постоянной скоростью c .

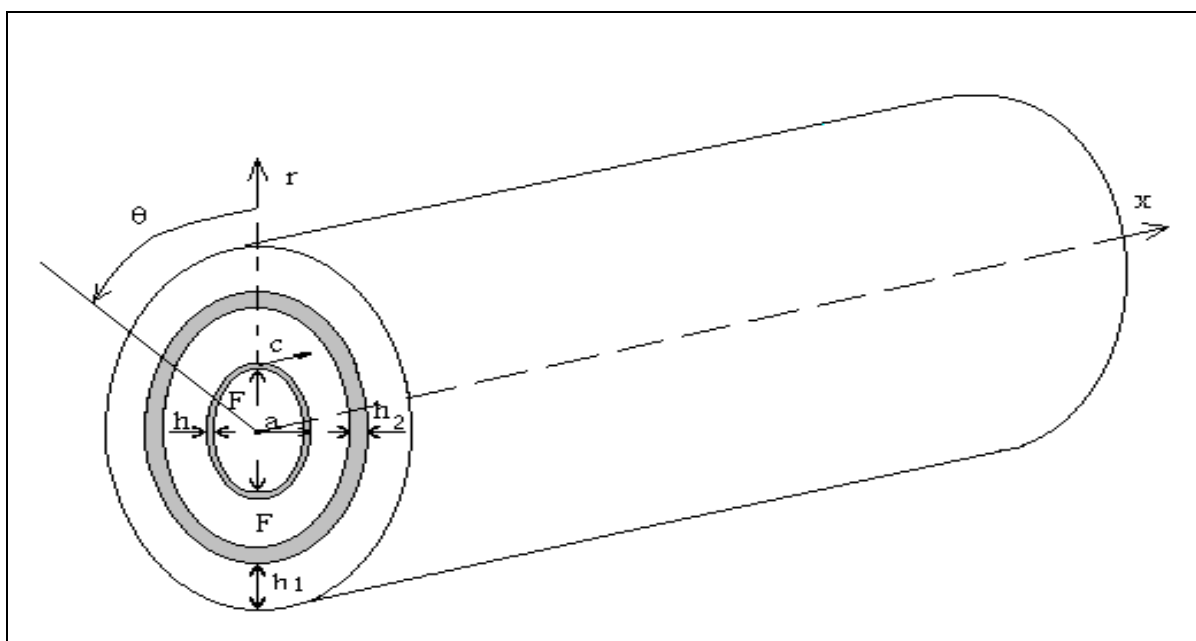


Рис.1

Будем рассматривать модель слоистого материала, в которой каждый слой представляет собой однородный, изотропный, линейно-упругий материал, причем слои матрицы и армировки чередуются. Каждый слой матрицы и армировки имеет одни и те же физические характеристики: λ_i, μ_i – параметры Ламе, ρ_i, ν_i, G_i – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига. Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к слою матрицы, имеют индекс 1, к армировке – индекс 2.

В настоящей работе в уточненной постановке, когда движение слоев композита описывается динамическими уравнениями теории упругости, а оболочка подчиняется уравнениям типа Тимошенко [1,2], рассмотрено нестационарное напряженно-деформированное состояние системы. Основное внимание уделено моментам времени, близким к началу нагружения.

Построен алгоритм определения деформационных свойств композита и построены диаграммы деформирования материала при различных значениях упругих характеристик компонентов описанной выше системы.

Движение композита подчиняется динамическим уравнениям теории упругости, которые в векторной форме имеют вид:

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \text{grad div } \overline{\mathbf{w}}_i + \mu_i \text{rot rot } \overline{\mathbf{w}}_i = \rho_i \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{w}}_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\overline{\mathbf{w}}(U_x, U_\theta, U_R)$ - вектор перемещения точек среды; $\lambda_i = \frac{2\nu_i G_i}{1-2\nu_i}$; $\mu_i = G_i$.

Задача сводится к совместному интегрированию уравнений движения оболочки и каждого слоя композита при выполнении граничных условий. Для удобства дальнейших вычислений перейдем к безразмерным переменным, относя все величины к радиусу срединной поверхности оболочки a .

Тогда граничные условия для жесткого контакта на границе раздела оболочки с композитом

($r = r_1 = 1 + \frac{\beta}{2}$) будут иметь вид:

$$\sigma_{RR1} = -q_R, \quad \sigma_{R\theta 1} = -q_\theta, \quad \sigma_{Rx1} = -q_x, \quad U_{R1} = W, \quad U_{x1} = U + \frac{\beta}{2} \chi_x, \quad U_{\theta 1} = V + \frac{\beta}{2} \chi_\theta \quad \text{на}$$

границе раздела матрицы и армировки ($r = r_2 = 1 + \frac{\beta}{2} + \beta_1$, $r = r_3 = 1 + \frac{\beta}{2} + \beta_1 + \beta_2$ и т.д.):

$\sigma_{RR1} = \sigma_{RR2}$, $\sigma_{R\theta 1} = \sigma_{R\theta 2}$, $\sigma_{Rx1} = \sigma_{Rx2}$, $U_{R1} = U_{R2}$, $U_{x1} = U_{x2}$, $U_{\theta 1} = U_{\theta 2}$; на границе раздела композита с пространством ($r = R/a$): $U_{R1} = 0$, $U_{x1} = 0$, $U_{\theta 1} = 0$. При этом введены следующие обозначения:

$$\tau = c_{SI} \frac{t}{a}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \rho_1^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \gamma = \frac{G}{G_1}, \quad \gamma_1 = \frac{G_1}{G_2}, \quad c_{Sk}^* = \frac{G_k}{\rho_k}, \quad c_k^* = \frac{c}{c_{Sk}}, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad \beta_k = \frac{h_k}{a}$$

2. Для интегрирования уравнений движения композита вводим три потенциальные функции [2,3]:

$$U_R = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad U_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

Дальнейший ход решения приводит к записи уравнений движения оболочки и композита в пространстве изображений в комплексной форме в результате интегрального преобразования Фурье по пространственной переменной и интегрального преобразования Лапласа по времени. Затем раскладываются все искомые функции в ряды Фурье по угловой координате [2]. В результате для оболочки получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \xi^2 U_m + m^2 \frac{1-\nu}{2} U_m + i\xi m \frac{1+\nu}{2} V_m + i\xi \nu W_m + \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} U_m = \frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \frac{q_{xm}}{G_1} \quad (3) \\ & i\xi m \frac{1+\nu}{2} U_m - \xi^2 \frac{1-\nu}{2} V_m - m^2 V_m - m \left(1 + \frac{(1-\nu)k^2}{2} \right) W_m + \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{\theta m} \\ & - \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} V_m = -\frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \frac{q_{\theta m}}{G_1} \\ & - i\xi \nu U_m + m V_m + \frac{(1-\nu)k^2}{2} (\xi^2 W_m + m^2 W_m) + W_m + \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} W_m \\ & + i\xi \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{xm} - m \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{\theta m} = -\frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \left(\frac{q_{Rm}}{G_1} - \frac{F_m}{G_1} \right) \\ & 6i\xi k^2 \frac{1-\nu}{\beta^2} W_m - i\xi m \frac{1+\nu}{2} \chi_{\theta m} - \left(\xi^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(m^2 + \frac{12k^2}{\beta^2} + \frac{\rho^* p^2}{\gamma} \right) \right) \chi_{xm} = -\frac{3(1-\nu)}{\gamma\beta^2} \frac{q_{xm}}{G_1} \end{aligned}$$

$$6k^2 m \frac{1-\nu}{\beta^2} W_m + i\xi m \frac{1+\nu}{2} \chi_{xm} - \left(m^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\xi^2 + \frac{12k^2}{\beta^2} + \frac{\rho^* p^2}{\gamma} \right) \right) \chi_{\theta m} = -\frac{3(1-\nu)}{\gamma \beta^2} \frac{q_{\theta m}}{G_1}$$

Здесь ξ , p – параметры преобразований Фурье и Лапласа соответственно, ρ , ν , G – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига оболочки.

Для композита получим видоизмененные волновые уравнения:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - m_{Ri}^2 \right) \varphi_{mi} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - m_{Si}^2 \right) \{\psi_{mi}, \chi_{mi}\} = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

$$\text{где } m_{R1} = \sqrt{\xi^2 + \Theta_1^2 p^2}, \quad m_{S1} = \sqrt{\xi^2 + p^2}, \quad m_{R2} = \sqrt{\xi^2 + \Theta_2^2 p^2 \gamma_1 / \rho_1^*}, \\ m_{S1} = \sqrt{\xi^2 + p^2 \gamma_1 / \rho_1^*}, \quad \Theta_i^2 = \frac{1-2\nu_i}{2(1-\nu_i)}.$$

Общие решения уравнений (4) имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_{mi}(r) &= D_{mi} K_m(m_{Ri} r) + E_{mi} I_m(m_{Ri} r) \\ \psi_{mi}(r) &= L_{mi} K_m(m_{Si} r) + N_{mi} I_m(m_{Si} r) \\ \chi_{mi}(r) &= S_{mi} K_m(m_{Si} r) + P_{mi} I_m(m_{Si} r) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и используя закон Гука [3], для каждого слоя матрицы и армировки определяем компоненты перемещения и напряжения в пространстве изображений. После этого удовлетворяем граничным условиям, в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Для упрощения вычислений введем следующие отношения функций Бесселя:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{K_{m+1}(m_{R1} r_2)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} & s_2 &= \frac{K_m(m_{R1} r_2)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} & s_3 &= \frac{K_m(m_{R1} r_1)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} \\ s_4 &= \frac{I_{m+1}(m_{R1} r_2)}{I_m(m_{R1} r_1)} & s_5 &= \frac{I_m(m_{R1} r_2)}{I_m(m_{R1} r_1)} & s_6 &= \frac{I_{m+1}(m_{R1} r_1)}{I_m(m_{R1} r_1)} \end{aligned}$$

Аналогичные отношения вводятся для m_{S1} , r_3 , r_4 и т.д. Тогда неизвестные коэффициенты удобно обозначить следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{mi}^* &= D_{mi} K_{m+1}(m_{Ri} r_1) \frac{G_1}{F_m} & E_{mi}^* &= E_{mi} I_m(m_{Ri} r_1) \frac{G_1}{F_m} & L_{mi}^* &= i L_{mi} K_{m+1}(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} \\ N_{mi}^* &= i N_{mi} I_m(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} & S_{mi}^* &= S_{mi} K_{m+1}(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} & P_{mi}^* &= P_{mi} I_m(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} \end{aligned}$$

В результате мы имеем $6 \cdot i$ линейных алгебраических уравнений относительно $6 \cdot i$ неизвестных коэффициентов - D_{mi}^* , E_{mi}^* , L_{mi}^* , E_{mi}^* , S_{mi}^* , P_{mi}^* , $i=1,2,3...$ Решая полученную систему, находим их численные значения. Подставив полученные неизвестные в соответствующие формулы, определяем трансформанты перемещений и напряжений в пространстве изображений.

3. В качестве примера возьмем нагрузку вида:

$$F = F_0 h(x^* - c^* \tau) \delta(\theta - \theta_k) \quad h(x^* - c^* \tau) = \begin{cases} 1 & |x^* - c^* \tau| \leq a^* \\ 0 & |x^* - c^* \tau| > a^* \end{cases} \quad (6)$$

$\delta(\theta - \theta_k)$ - дельта-функция Дирака, k – количество нагрузок.

Рассматривались две симметричные нагрузки, при этом $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \Pi$. К данной нагрузке применим преобразование Фурье по координате x^* , а затем разложим ее в ряд Фурье по q , получим:

$$\bar{F} = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \frac{F_0 \sin(\xi a^*)}{\xi} e^{-i\xi c^* \tau} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\theta) \quad (7)$$

$$a_m = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \delta(\theta - \theta_k) \cos(m\theta) d\theta = \frac{2}{\Pi} (1 + (-1)^m)$$

После применения преобразования Лапласа к каждому члену ряда, имеем:

$$F_m = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \frac{F_0 \sin(\xi a^*)}{\xi} \frac{p - ic^* \xi}{p^2 + c^{*2} \xi^2} a_m \quad (8)$$

Для дальнейших вычислений подставим полученную нагрузку в выражения для компонент перемещения и напряжения, просуммируем ряды и применим обратное преобразование Фурье. Обратное преобразование Лапласа производится численно методом смещенных многочленов Лежандра.

На примере двурармированного композитного материала рассмотрены некоторые случаи взаимодействия описанной выше системы. При анализе численных результатов построены диаграммы деформирования армированных композитов при следующих значениях безразмерных параметров:

$$\gamma_1 = 0.2, \quad \rho^* = 20, \quad \rho_1^* = 0.2, \quad c^* = 0.2, \quad \beta_1 = 0.3, \quad \beta_2 = 0.15, \quad a^* = 0.2, \quad \beta = 0.1.$$

На рис. 2 - 3 приведены кривые зависимостей радиального перемещения и напряжения по времени, кривые 1-3 соответствуют $\gamma = 500, 250, 100$.

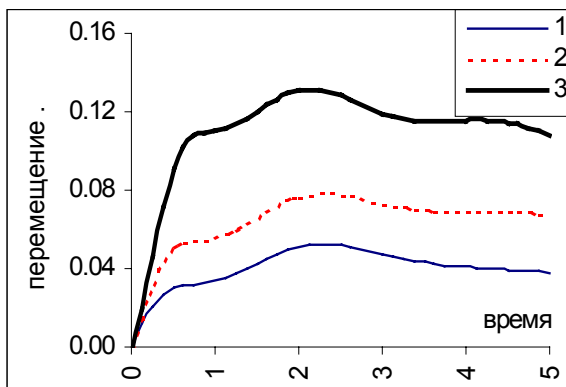


Рис. 2

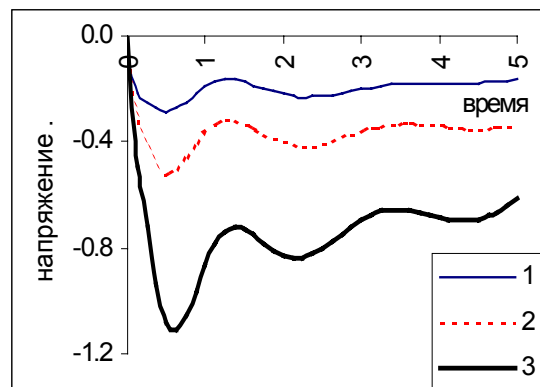


Рис. 3

На рис. 4 – 5 показано изменение прогибов оболочки и радиального напряжения по длине, а на рис. 6 – 7 – по угловой координате для различных моментов времени. Кривая 1 соответствует $\tau=0.5$, 2- $\tau=2$, 3- $\tau=4$. При этом $\gamma = 100$.

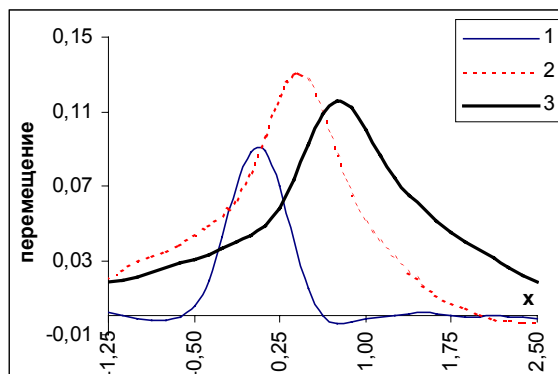


Рис. 4

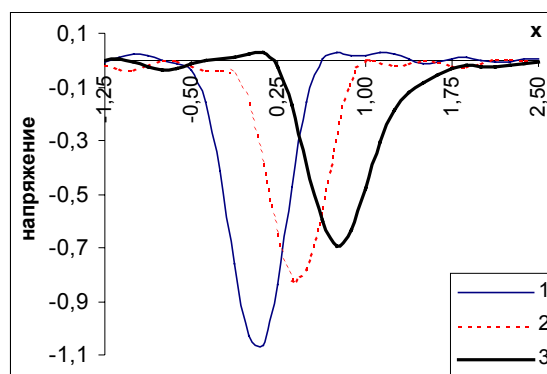


Рис. 5

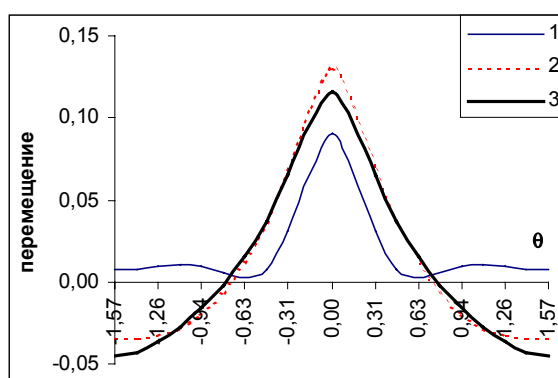


Рис. 6

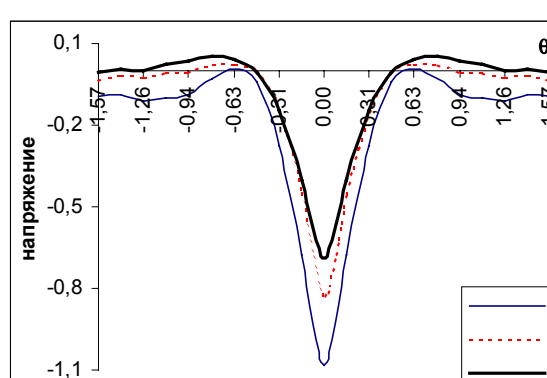


Рис. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкции со средой.- Київ, Наук. Думка, 1979.- 284с.
2. Горшков А.Г, Пожуев В.И, Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок.-М.: Изд. МАИ, 1992.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981, 223 с.
4. Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике- М.: Изд. И*Л, 1953.