УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Пожуев А.В.

В настоящей работе найдено решение задачи о действии подвижных нагрузок на цилиндрическую оболочку конечной длины, подкрепленную по наружной поверхности продольными ребрами жесткости и содержащую внутри упругий инерционный заполнитель. Движущаяся нагрузка передается на оболочку только через ребра, вне ребер нагружение отсутствует. Учитывается дискретность расположения ребер путем записи для них уравнений движения балок с последующим удовлетворением условий сопряжения.

Для описания движения оболочки используются уравнения с учетом деформации сдвига и инерции вращения (типа Тимошенко). Движение каждого ребра описывается уравнением теории балок

$$E_{\delta_i}\cdot I_i\cdot\frac{\partial^4 Z_{\delta_i}}{\partial x^4}+\rho_{\delta_i}\cdot F_i\cdot\frac{\partial^2 Z_{\delta_i}}{\partial t^2}=p_{\delta_i}(x,t)-q_{0i}(x,t)\quad (\text{i=1, L})\,, \tag{1}$$

где $p_{\delta_i}(x,t)$ - интенсивность заданной нагрузки на соответствующее ребро, $q_{0i}(x,t)$ - неизвестная реакция со стороны оболочки, приходящаяся на погонную единицу длины i-ой балки.

Движение заполнителя подчиняется динамическими уравнениями теории упругости:

$$(\lambda_c+2\mu_c)\,\mathrm{grad\,div}\,\overline{\varpi}+\mu_c\,\mathrm{rot\,rot}\,\overline{\varpi}=\rho_c\frac{\partial^2\overline{\varpi}}{\partial t^2} \tag{2}$$

При решении данной задачи были рассмотрены граничные условия для жесткого и скользящего контакта заполнителя с оболочкой:

а) для случая скользящего контакта:

$$\text{при } r=a\quad \sigma_{rx}=\sigma_{r\theta}=0;\qquad \sigma_{rr}=-q_r;\qquad u_r=w; \tag{3}$$

б) для случая идеального контакта:

$$\text{при } r=a\quad \sigma_{rx}=q_x;\ \sigma_{r\theta}=q_\theta;\ \sigma_{rr}=q_r; \tag{4}$$

$$u_r=w;\qquad u_x=u-h\chi_x/2;\qquad u_\theta=v-h\chi_\theta/2,$$

где a,b - наружный и внутренний радиусы заполнителя. Внутренняя поверхность заполнителя принимается свободной от напряжений, тогда

при $r=b$ $\sigma_{rx}=\sigma_{r\theta}=\sigma_{rr}=0$

Контакт между ребрами и оболочкой происходит по осям балок, следовательно, внешняя нагрузка на оболочку равна сумме давлений, передаваемых через каждое ребро, на осях балок ($\theta=\theta_k$) перемещения оболочки равны прогибам балок с противоположным знаком.

Для решения данной задачи переходим во всех уравнениях к безразмерным переменным, относя все линейные величины к наружному радиусу заполнителя. Интегрирование уравнений движения заполнителя осуществляем путем введения потенциальных функций. После их подстановки применяем преобразование Лапласа по времени, после чего раскладываем все искомые функции в ряды Фурье по осевой и угловой координатам. Получаем в пространстве изображений волновые уравнения:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+\frac{1}{r_*}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r_*^2}-\left(\beta^2+\lambda^2p^2\right)\right)\cdot\Phi=0,\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+\frac{1}{r_*}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r_*^2}-\left(\beta^2+p^2\right)\right)\cdot\{\Psi,\mathrm{X}\}=0\end{gathered}\ , \tag{5}$$

где $\lambda^2=\dfrac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)}$, $\beta=\dfrac{n\pi}{\delta}$, p, n, m – параметры преобразования Лапласа и разложений в ряды Фурье, δ - безразмерная длина системы. Решением полученных уравнений являются линейные комбинации функций Бесселя от мнимого аргумента первого и второго рода с неизвестными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_m(r_*) = A_m K_m(m_R r_*) + B_m I_m(m_R r_*) \\
&\Psi_m(r_*) = C_m K_m(m_S r_*) + D_m I_m(m_S r_*) \\
&\mathrm{X}_m(r_*) = E_m K_m(m_S r_*) + S_m I_m(m_S r_*) \\
&\mathrm{m_R} = \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \mathrm{p}^2}, \quad \mathrm{m_S} = \sqrt{\beta^2 + \mathrm{p}^2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Применяя аналогичные преобразования к уравнениям оболочки типа Тимошенко, получаем:

$$\{V^*, W^*, \chi_\theta, q_\theta^*, q_r^*, F^*\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{V^*, W^*, \chi_\theta, q_\theta^*, q_r^*, F^*\}_n \cdot \sin(\beta x^*)$$

$$\{U^*, \chi_x, q_x^*\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{U^*, \chi_x, q_x^*\}_n \cdot \cos(\beta x^*),$$

$$\{U_n^*, W_n^*, \chi_{xn}, q_{rn}^*, F_n^*\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{U_n^*, W_n^*, \chi_{xn}, q_{rn}^*, F_n^*\}_m \cdot \cos(m\theta)$$

$$\{V_n^*, \chi_{\theta n}, q_{\theta n}^*\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{V_n^*, \chi_{\theta n}, q_{\theta n}^*\}_m \cdot \sin(m\theta)$$

$$-\beta^2 \cdot U_{mn}^* - m^2 \frac{1-\nu}{2} \cdot U_{mn}^* + \beta m \frac{1+\nu}{2} \cdot V_{mn}^* - \nu\beta \cdot W_{mn}^* - \rho_* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot U_{mn}^* = -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2} \cdot \frac{q_{xmn}^*}{G_m} \tag{7}$$

$$m\beta \frac{1+\nu}{2} \cdot U_{mn}^* - \beta^2 \frac{1-\nu}{2} \cdot V_{mn}^* - m^2 V_{mn}^* - m\left[1 + \frac{(1-\nu)k^2}{2}\right] \cdot W_{mn}^* + \frac{1-\nu}{2} k^2 \chi_{\theta mn} -$$

$$-\rho_* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot V_{mn}^* = -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2} \cdot \frac{q_{\theta mn}^*}{G_m}$$

$$\nu \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x_*} + \frac{\partial V^*}{\partial \theta} - \frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial \theta^2}\right] + W^* + \rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 W^*}{\partial \tau^2} -$$

$$-\frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x_*} - \frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2 G_m} \cdot (F^* + q_r^*)$$

$$-6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial x_*} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x_* \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x_*^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - 6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \chi_x -$$

$$-\rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \tau^2} = -3 \frac{1-\nu}{\gamma\phi_2^2 G_m} \cdot q_x^*$$

$$-6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial \theta} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x_* \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - 6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \chi_\theta -$$

$$-\rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \tau^2} = -3 \frac{1-\nu}{\gamma\phi_2^2 G_m} \cdot q_\theta^*$$

Затем выражаем неизвестные переменные через компоненты тензора перемещений в оболочке. Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов при функциях Бесселя, в которую также входит неизвестная реакция со стороны балок. Поэтому обратный ход алгоритма может начать осуществляться только после того, как к уже полученной системе уравнений с помощью условий сопряжения будут подключены полученные после применения одномерного разложения в ряд Фурье по x и преобразования Лапласа по времени уравнения движения балок.

Разрешая систему для определения коэффициентов, находим трансформанты напряженно-деформированного состояния в любой точке оболочки, заполнителя и ребер. Окончательное решение задачи сводится к суммированию рядов Фурье и обращению преобразования Лапласа.

В качестве примера рассмотрен случай двух ребер жесткости, места контакта которых с оболочкой определяются координатами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$. В начальный момент времени к ребрам прикладывается нормальная сосредоточенная нагрузка. Были рассмотрены как неподвижные нагрузки, расположенные на расстоянии a_1 от начала координат, так и движущиеся вдоль ребер с постоянной скоростью **c**. Аналитически сосредоточенная подвижная нагрузка описывается следующим образом:

$$p(x_*, \tau) = p_0 \cdot \delta(x - c_* \tau) \tag{8}$$

Для этого случая выражение для трансформанты нормального перемещения примет вид

$$u_r = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 - 2 \cdot k^* \cdot v^*} \cdot a_m \cdot T_1(\beta, m, 1) \cos(m\theta) \sin(\beta x_*), \tag{9}$$

где $\quad k^* = 2(1 + \nu_\delta)\gamma_\delta I^* \beta^4 + \rho_\delta F \cdot p^2; \qquad v^* = \sum_{i=0}^{\infty} T_1(\beta, m, 1) \cdot a_m$

$$T_1(\beta, m, r_*) = \left[\frac{m}{r_*} K_m(m_R r_*) - m_R K_{m+1}(m_R r_*)\right] \cdot A_m +$$

$$+ \left[\frac{m}{r_*} I_m(m_R r_*) + m_R I_{m+1}(m_R r_*)\right] \cdot B_m + \beta\left[\frac{m}{r_*} K_m(m_S r_*) - m_S K_{m+1}(m_S r_*)\right] \cdot C_m +$$

$$+ \beta\left[\frac{m}{r_*} I_m(m_S r_*) + m_S I_{m+1}(m_S r_*)\right] \cdot D_m + \frac{m}{r_*} K_m(m_S r_*) \cdot E_m + \frac{m}{r_*} I_m(m_S r_*) \cdot S_m.$$

При расчетах принимались следующие значения безразмерных параметров

$$\nu = \nu_c = \nu_{\delta_1} = \nu_{\delta_2} = 0{,}3; \quad \rho^* = 12{,}5; \quad k^2 = 2/3; \quad \rho^*_{\delta_1} = \rho^*_{\delta_2} = 25; \quad c_\bullet = 0.4$$

$$I_1^* = I_2^* = 0{,}0001/24; \quad \delta = 5; \quad F_1^* = F_2^* = 0{,}005; \quad \gamma_{\delta_1} = \gamma_{\delta_2} = 2 \cdot \gamma.$$

Число членов ряда по пространственной и по угловой переменным, а также число членов обратного преобразования Лапласа определялись путем численных экспериментов так, чтобы обеспечивалась по всем искомым величинам относительная точность в 3%.

На рис. 1 - 2 показано изменение во времени нормального контактного перемещения и напряжения на границе оболочки и заполнителя для подвижной нагрузки. Рассматривался случай идеального контакта. Из рисунков видно, как происходит переходный процесс для различных отношений модуля сдвига оболочки и заполнителя (для кривой 1 γ= 250, 2 - 125, 3 - 62.5).

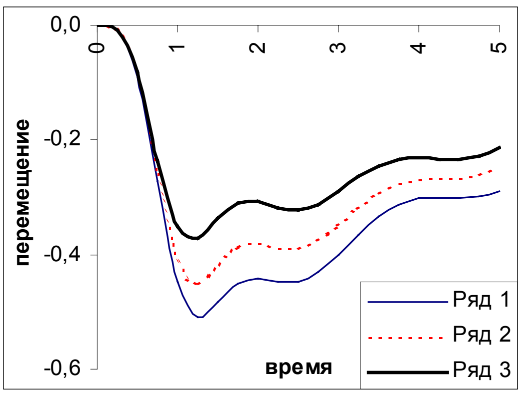

Рис. 1

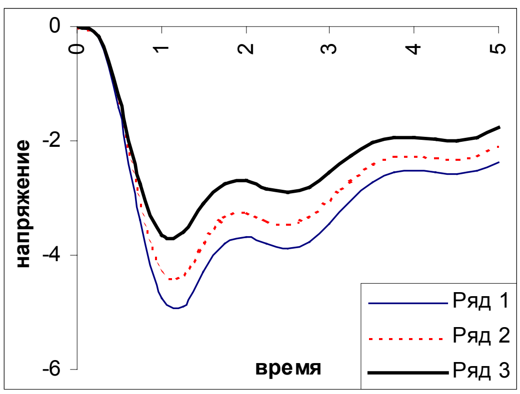

Рис. 2

Рисунки 3 - 4 иллюстрируют характер распределения деформации по осевой координате для различных фиксированных моментов времени (кривая 1 - τ = 0.5, 2 - τ = 1, 3 - τ = 3).

Проведенные расчеты показали надежность и эффективность предложенного подхода для анализа переходных процессов в слоистых конструкциях с дискретными подкреплениями. Полученные графики дают ясную картину нестационарного процесса и позволяют определить область применимости стационарных задач.

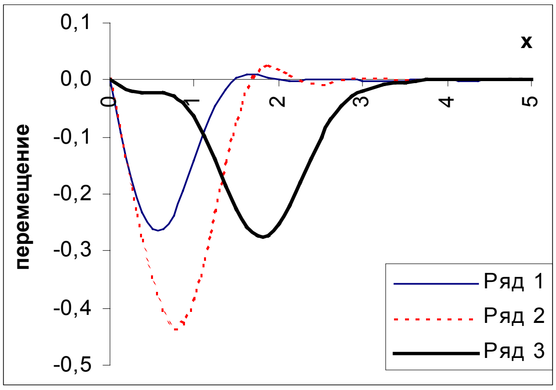

Рис. 3

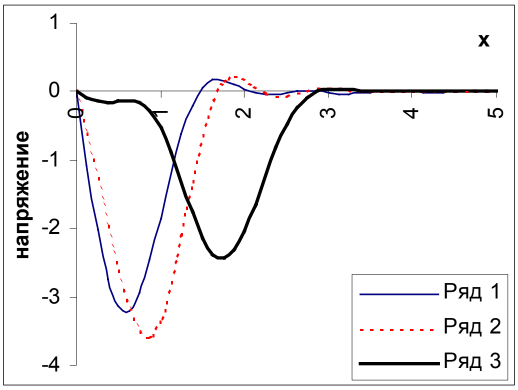

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Пожуев В.И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. – М.: МАИ, 1992. – 136 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.