

УДК 519.85

## МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Новожилова М.В.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо таку оптимізаційну задачу геометричного проектування [1]. Нехай в арифметичному евклідовому просторі  $R^2$  маємо замкнену обмежену многозв'язну область  $S_0$ , що задана в загальній системі координат  $XOY$ . Кожна компонента  $w_c$ ,  $c=1,2,\dots,K$  лінійної зв'язності границі  $S_0$  - жорданова крива, яка обмежує в загальному випадку неопуклий многокутник. Позначимо  $w_K$  компоненту лінійної зв'язності границі  $S_0$ , що містить всі інші компоненти.

Нехай також маємо скінченний набір  $S$  об'єктів розміщення - неопуклих замкнених многокутників  $S=\{S_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Положення кожного многокутника  $S_i$  у просторі  $R^2$  характеризується вектором параметрів розміщення  $(x_i, y_i, \phi_i)$ , пов'язаним з центром  $O_i$  власної системи координат  $X_iO_iY_i$  об'єкта  $S_i$ . Перші два параметри  $(x_i, y_i)$  визначають трансляцію об'єкта  $S_i$ , а параметр  $\phi_i$  є кутом повороту системи  $X_iO_iY_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Далі будемо ототожнювати позначення  $S_i$  та  $S_i(x_i, y_i, \phi_i)$ .

Задача полягає у визначенні мінімальної довжини  $z$  області  $S_0$  при виконанні умов взаємного неперетину об'єктів  $(S_i, S_j)$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , і умов розміщення набору  $S$  в області  $S_0$ .

Математичне формулювання задачі, що розглядається, має вигляд:

визначити:  $\min z$ , (1)

при такій системі обмежень:

$$S_i(x_i, y_i, \phi_i) \subset S_0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2)$$

$$\text{int}S_i(x_i, y_i, \phi_i) \cap \text{int}S_j(x_j, y_j, \phi_j) = \emptyset, \quad i, j=1,2,\dots,n, \quad i \neq j, \quad (3)$$

де  $\text{int}S_i(\_)$  - внутрішність многокутника  $S_i$ ;  $\emptyset$  - порожня множина.

Було показано [2], що аналітична модель цієї задачі має вигляд

знайти:  $\min_{D \in R^{3n+1}} z$ , (4)

де область припустимих розв'язків  $D$  визначається структурою нелінійних нерівностей [1]

$$\sigma_D = \bigcap_{k=1}^{nK} \sigma_k \cap \left\{ \bigcap_{q(i,j)=1}^{n(n-1)/2} \sigma_{ij} \right\}, \quad (5)$$

причому структури  $\sigma_k$  і  $\sigma_{ij}$  є аналітичними описами умов (2) і (3) відповідно;

$q, k$  - номери пар об'єктів  $(S_i, S_j)$ , і пар "об'єкт  $S_i$  - компонента  $w_c$ " відповідно, тобто  $q=f(i,j)$ ,  $k=f(i,c)$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $c=1,2,\dots,K$ .

**2. Методологія локальної оптимізації задачі (4-5).** Розглянемо методологію розв'язання задачі (4-5), враховуючи такі властивості області  $D$  [2].

**Властивість 1.** Функції лівих частин обмежень, які формують область  $D$ , є нелінійними та в околі кожної точки області не є опуклими або вігнутими, причому матриці Гессе (матриці інших похідних) цих функцій вироджені.

**Властивість 2.**

$$D = \bigcup_{\varepsilon=1}^E D_\varepsilon, \quad (6)$$

де  $D_\varepsilon$  - неопукла точкова множина, яка є множиною розв'язків певної системи

$$G(\Psi)X-C \geq 0 \quad (7)$$

нелінійних та лінійних нерівностей порядку  $J=O(3[(n-1)*n/2 + Kn])$ , яку містить структура  $\sigma_D$ . Зауважимо, що для деяких точок  $X$  області  $D$  виконується таке співвідношення:

$$X \in \bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} D_{eg}, \quad \Gamma < E.$$

**Властивість 3.** Зафіксуємо значення вектору параметрів  $\Psi_{const}=\{\phi_i\}_{i=1,2,\dots,n}=const$ . У перетині області  $D_e$  гіперплощиною  $\Psi_{const}$  лежить деяка многогранна опукла множина  $D_{linear} \in R^{2n+1}$ , яка, в свою чергу, є областю припустимих розв'язків лінійної задачі розміщення вигляду [3]:

$$X^*=(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, \dots, x_n^*, y_n^*, z^*) = \arg \min_{D_{linear} \in R^{2n+1}} z, \quad (8)$$

де область  $D_{linear}$  задана такою системою обмежень

$$S_i(x_i, y_i, const) \subset S_0, \quad i=1, \dots, n, \quad (9)$$

$$\text{int}S_i(x_i, y_i, const) \cap \text{int}S_j(x_j, y_j, const) = \emptyset, \quad i, j=1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Аналітичним записом системи (9-10) є структура лінійних нерівностей [3].

**Властивість 4.** Область  $D$  у загальному випадку є незв'язною множиною.

Задача (4-5) належить до класу многовимірних многоекстремальних оптимізаційних задач з лінійною функцією цілі та нелінійними неопуклими обмеженнями.

Із властивості 2 області  $D$  випливає, що точка  $X_{opt}$  локального екстремуму функції цілі  $z$  задачі повинна задовольняти умову:

$$X_{opt} = \arg \min_{X \in D_{eg}} z \quad (11)$$

для всіх підмножин  $D_{eg} \subset D$ , що містять  $X_{opt}$ ,  $g=(1, 2, \dots, J)$ .

Метод розв'язання задачі складається з таких кроків:

I. Визначається початкове значення  $X_0$  і підобласть  $D_{0g}$ , що містить  $X_0$ , тобто  $X_0 \in D_{0g}$ .

II. Виконується  $k$ -а ітерація:

II.I. Шукається розв'язок задачі:

$$\text{знайти } X^* = \arg \min_{X \in D_{eg}} z, \quad (11^*)$$

де підмножина  $D_{eg}$  задана системою нерівностей (7):

II.II. Перевіряється умова (11). Якщо ця умова не виконується, то визначається така підобласть  $D_{eg+1}$ , яка містить  $X_i$ , та розв'язується задача п. II.I.

Дослідження властивостей задачі (11) показало, що процес її розв'язування можна побудувати таким чином:

1. Розв'язання задачі вигляду (8-10). Аналітичним зображенням вершини  $X^*$  є система  $F^*X-C=0$  активних у вершині  $X^*$  обмежень, тобто вершина  $X^*$  задовольняє ці обмеження як рівності. Очевидно, система  $F^*X-C=0$  має ранг  $2n+1$ . Зауважимо, що вершина  $X^*$  може бути виродженою, тобто вона може задовольняти як рівності більш ніж  $2n+1$  обмежень системи.

2. Перехід до нелінійної моделі та розв'язування задачі локальної оптимізації на множині  $D_e \in R^{3n+1}$  вигляду (7). При цьому  $X_k = \{X^*, \Psi_{const}\}$  - початкова точка задачі нелінійної оптимізації. Відмітимо, що система нелінійних рівностей  $F_k(\Psi)X_k - C = 0$  порядку  $M$  ( $3n+1 > M \geq 2n+1$ ) визначає певний нелінійний многовид  $V$ , що є підмножиною границі області  $D_e$ , тобто  $V \in Fr D_s$ . Отже,  $X_k$  також належить границі області  $D_e$ .

Таким чином, перетворення лінійної задачі (8-11) у нелінійну (7), тобто занурення до простору всіх незалежних змінних задачі, дозволяє сформулювати алгоритм розв'язування задачі локальної оптимізації (7) як послідовність наступних етапів:

Етап А. Визначення напрямку руху  $p_k$ .

Етап В. Визначення максимального значення кроку  $\alpha_k$  у напрямі  $p_k$  такого, що точка  $X_{k+1} = X_k + \alpha_k p_k$ ;  $X_{k+1} \in Fr D_s$  та  $z(X_{k+1}) \leq z(X_k)$ .

Розв'язання задачі А зводиться до задачі пошуку безумовного екстремуму відповідної функції Лагранжа

$$L(l, X_k) = z - \sum_{j=1}^M l_j * f_j(X_k) \quad (12)$$

задачі (7) вздовж кривої [4]:  $C = \{X(a): X(a) = X_l + q_1(a)s + q_2(a)d, a \geq 0\}$ , де вектор  $s$  є розв'язок деякої системи рівностей  $Bs_k = -g_k$ , причому матриця  $B_k$  є додатно визначеною апроксимацією невизначеної матриці  $H_{xx}(l, X_k)$  Гессе функції  $L(l, X_k)$ ; вектор  $d$  - напрям від'ємної кривини, вектор  $g_k$  - градієнт функції Лагранжа у точці  $X_k$ ;  $l$  - вектор множників Лагранжа. Відмітимо, що до складу функції Лагранжа входять тільки функції  $f_j(X_k)$  лівих частин активних у точці  $X_k$  обмежень, тобто обмежень системи нелінійних рівностей  $F_k(\Psi)X_k - C = 0$ .

**Т е о р е м а 1.** Матриця Гессе  $H_{xx}(l, X)$  функції Лагранжа (12) задачі (7) має ранг не більш ніж  $2n$ , де  $n$  - кількість об'єктів, що розміщуються.

**Т е о р е м а 2.** Визначення максимального значення кроку  $\alpha_k$  відповідно до кутових параметрів розміщення не залежить від значень параметрів  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ .

Застосовуючи теореми 1 і 2, можна довести такий важливий конструктивний результат.

**Т е о р е м а 3.** Методологія пошуку локального мінімуму задачі вигляду (7) є мінімізація за групами кутових параметрів та параметрів трансляції.

Більш того, значення напрямку і кроку для параметрів трансляції  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$  визначаються на етапі В "припасуванням" цих параметрів таким чином, щоб точка  $X_{k+1}$  знов задовольняла систему рівностей  $F_{k+1}(\Psi)X_{k+1} - C = 0$ . Для цього визначаються нові значення коефіцієнтів системи, ураховуючи нові значення  $\{\phi_{k+1,i}\}_{i=1,2,\dots,n}$  кутів повороту, далі значення кутових параметрів фіксують, після чого система  $F_{k+1}X - C = 0$  з новою матрицею коефіцієнтів розглядається як система лінійних рівностей та розв'язується відносно параметрів трансляції  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Пандорин А.К. Оптимизация упаковок плоских многоугольников. // Доклады АН УССР. - 1987. - Сер.А, N 2.- С. 79-81.
2. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V. The allocation problem of non-convex polygons with rotations in System Modelling and optimization // Proceeding of 17-th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization.- 1995, P.559-565.
3. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V. Mathematical Model and Method of Searching for a Local Extremum for the Non Convex Oriented Polygons Allocation Problem // European Journal of Operational Research.- 1996.-P.190-210.
4. Goldfarb D. Curvilinear path steplength algorithms for minimization which use directions of negative curvature // Mathematical Programming.-1980.-18 P.31-40.