

Як вагову функцію візьмемо фундаментальний розв'язок для площини (3).

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (3)$$

$$\text{де } r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Координати джерела (ξ_1, ξ_2) вибираємо посередині крайового елемента.

Підставляючи вагову функцію для кожної точки в (2), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами якої є криволінійні інтеграли першого роду, що обчислюються для кожного елемента.

Похідна за нормаллю обчислюється аналітично з автоматичним визначенням направляючих косинусів нормалі до осей за допомогою формули (4).

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} n_2, \quad (4)$$

де $n_i = \cos(\vec{n} \wedge x_i)$, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до крайового елемента (рис. 2).

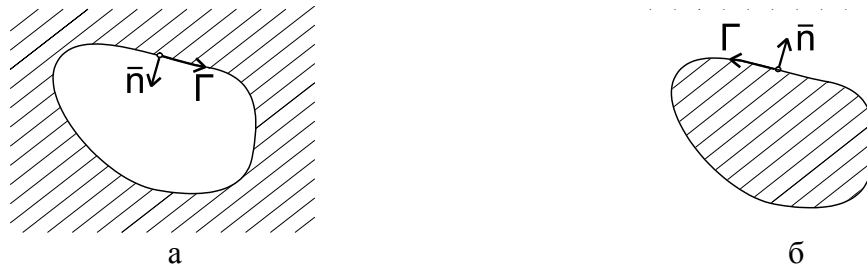


Рис. 2 Правило проведення нормалі (а – зовнішня задача, б – внутрішня задача).

Криволінійний інтеграл, після перетворень у визначений, одержуємо у такому вигляді (5):

$$\oint_{\Gamma_j} f(x_1, x_2) d\Gamma = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2} f(x_1(t), x_2(t)) dt, \quad (5)$$

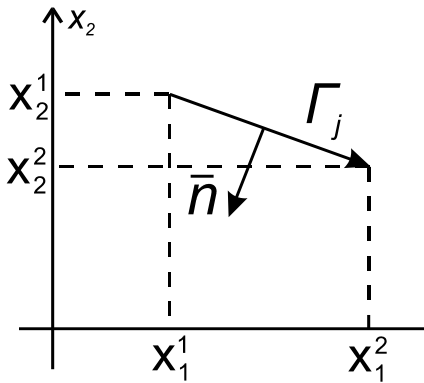


Рис. 3 Геометрія крайового елемента

$$x_1(t) = x_1^1 \frac{1}{2(1-t)} + x_1^2 \frac{1}{2(1+t)},$$

$$x_2(t) = x_2^1 \frac{1}{2(1-t)} + x_2^2 \frac{1}{2(1+t)},$$

де (x_1^1, x_2^1) і (x_1^2, x_2^2) – координати початку і кінця крайового елемента (рис. 3), $t \in [-1, 1]$, Γ_j – довжина j -го елемента.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2) містить N рівнянь і $N+N_4$ невідомих. Додаємо до системи рівняння (6), що виражають значення температури в кожній точці прямокутного контуру Γ_4 через значення температури на границі $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$u_k = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_1+N_2} u_j \arctg \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \Big|_{c_{j-1}}^{c_j}, \quad (6)$$

де $k=N_1+N_2+N_3+1 \dots N_1+N_2+N_3+N_4$, $c_{j-1} = x_{1j}^1$ і $c_{j-1} = x_{1j}^2$ – границі інтегрування, і одержуємо повну систему рівнянь (7), розв'язавши яку ми одержимо значення всіх невідомих, крім значень температури на контурі Γ_4 :

$$\begin{aligned}
 c_i u_i + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left[\int_{\Gamma_{1j}} q_j^* d\Gamma - \frac{1}{\pi} \sum_{k=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} \operatorname{arctg} \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \right]_{c_{j-1}}^{c_j} - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} q_j \int_{\Gamma_{2j}} u_j^* d\Gamma + \\
 + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} u_j \int_{\Gamma_{3j}} q_j^* d\Gamma - \sum_{j=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} q_j \int_{\Gamma_{4j}} u_j^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_1} \bar{q}_j \int_{\Gamma_{1j}} u_j^* d\Gamma - \\
 - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \bar{u}_j \left[\int_{\Gamma_{2j}} q_j^* d\Gamma - \frac{1}{\pi} \sum_{k=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} \operatorname{arctg} \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \right]_{c_{j-1}}^{c_j} + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} \bar{q}_j \int_{\Gamma_{3j}} u_j^* d\Gamma \quad (7)
 \end{aligned}$$

Значення температури на контурі Γ_4 можна виразити через значення температури на границі $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ за формулою (6), тому що температура на контурі Γ_1 була знайдена з розв'язку системи (7), а температура на межі Γ_2 задана за умовою задачі.

Даний алгоритм був реалізований у системі Borland Delphi 3.0. Система рівнянь розв'язана методом Гаусса [4]. Інтеграли обчислені за допомогою квадратурної формули Гаусса [3]. Для прямокутника розв'язок записується у вигляді інтегрального представлення, для частини області, що залишилася, через функцію Гріна.

Нижче приведені результати розв'язку даної задачі в півплощині з включенням у вигляді ромба для області розміром $-2.00 \leq x_1 \leq 2.00$ $0.00 \leq x_2 \leq 2.00$, $a = 1.00$, $b = 1.00$, з апроксимацією по 30 постійних елементів на кожному контурі.

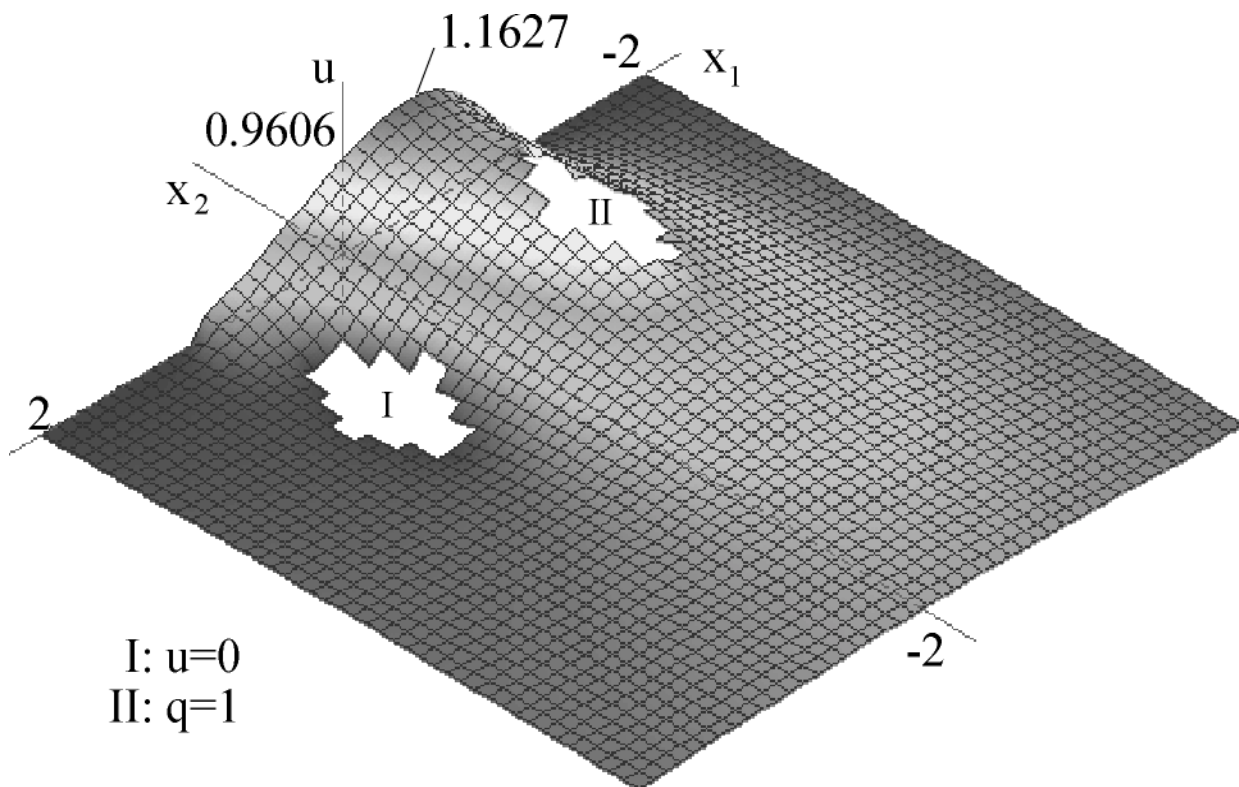


Рис. 4 Розподіл температури в півплощині з включеннями у вигляді ромба.

На границі включень задана нульова температура (I) і одиничний потік (II).

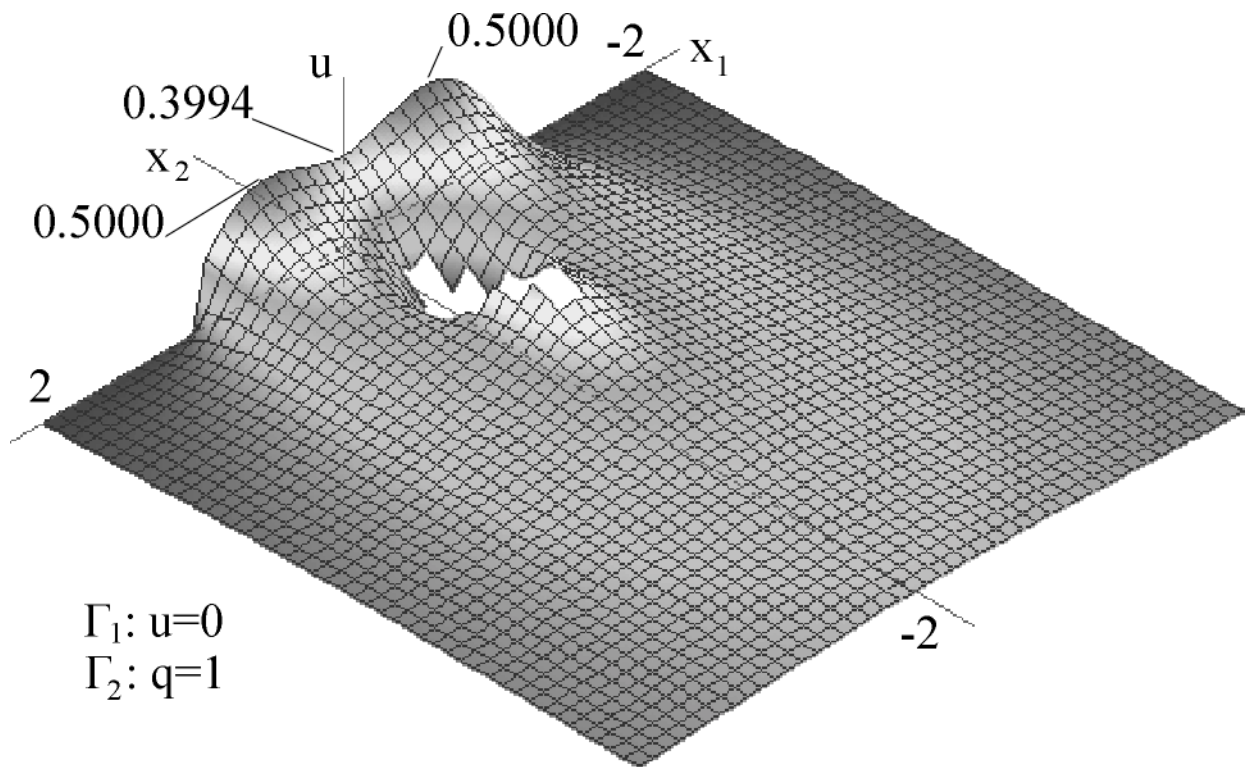


Рис. 5 Розподіл температури в півплощині з включенням у вигляді ромба.
На верхній границі включення задана *нульова температура* (Γ_1),
на нижній – *одиничний потік* (Γ_2).

Як показують результати, форма включення і задані на ній будь-якого типу крайові умови відповідно впливають на розподіл температури в області поряд із включенням і на границі півплощини, на якій заданий тепловий потік. Застосування форми ромба у виді контуру включення не обмежує загальності побудованого розв'язку. Також можна одержати розв'язки для включення будь-якої форми, контур якого можна апроксимувати відрізками.

Таким чином, можна зробити висновок про те, що створена підсистема розрахунку і візуального аналізу результатів розв'язання задач теплопровідності для багатозв'язних необмежених областей. Створена підсистема дозволяє розв'язувати змішані задачі стаціонарної теплопровідності для необмеженої області з різною формою включення і з заданими на ньому будь-якого типу крайовими умовами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зв'язочкіна О. А., Толоч В. О. Про один спосіб розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького держуніверситету. – 1998. – №1. – С. 36 – 38.
2. Лисенко В. В., Толоч О. В. Автоматизація процесу розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини // Вісник Запорізького держуніверситету. – 1998. – №1. – С. 53 – 54.
3. Бреббія К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Бахвалов Н. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – С.156, 267.