

УДК 519.68(001.4)

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Козіна Г.Л.

Досліджуються відомі ([1], [2]) задачі на графах - про остовні дерева, про досконалі паросполучення, про комівояжера - з інтервально-зваженими ребрами та інтервальною цільовою функцією вагового вигляду. Такі постановки задач виникають, коли параметри задачі невідомі точно і їхня невизначеність описується через інтервали. У роботі дане поняття допустимого розв'язку і введений порядок на множині допустимих рішень відносно цільової функції. Цей порядок породжує паретовську множину альтернатив. Окрім паретовської, розглядаються і інші множини альтернатив: повна множина альтернатив і лексикографічна множина альтернатив. У гіршому випадку паретовська множина альтернатив і повна множина альтернатив співпадають з множиною допустимих розв'язків. Оскільки потужність множини допустимих розв'язків має експоненціальну оцінку [3], тому припускається недоцільним пошук усіх представників паретовської і повної множини альтернатив. У роботі запропоновані алгоритми, що дозволяють знаходити усіх представників лексикографічної множини альтернатив. Для задач про остовні дерева і про досконалі паросполучення ці алгоритми є поліноміальними.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай даний n - вершинний граф $G = (V, E)$, в якому кожному ребру $e \in E$ приписана інтервальна вага $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$. Допустимий розв'язок визначається у формі підграфа $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$. Позначимо множину усіх допустимих розв'язків через X . На множині X визначимо інтервальну цільову функцію таким чином

$$w(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \quad (1)$$

Очевидно, що $w(x) = [w_1(x), w_2(x)]$,

$$\text{де } w_i(x) = \sum_{e \in E_x} w_i(e), \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Введемо порядок на множині допустимих розв'язків X .

Визначення 1. Допустимий розв'язок x "краще" допустимого розв'язку y , якщо кінці інтервалу $w(x)$ не переважають відповідних кінців інтервалу $w(y)$ ($w_i(x) \leq w_i(y)$, $i = 1, 2$) і принаймні один кінець інтервалу $w(x)$ суворо менш відповідного кінця інтервалу $w(y)$.

Визначення 2. Допустимий розв'язок $\tilde{x}$ називається паретовським оптимумом, якщо для нього не існує "кращого" допустимого розв'язку.

Всі паретовські оптимуми утворюють паретовську множину альтернатив $\tilde{X}$.

МНОЖИНИ АЛЬТЕРНАТИВ

У ролі розв'язку інтервальної задачі може бути визначена як паретовська множина, так і інші множини альтернатив, які є її підмножинами. Найбільш розповсюдженими є повна множина альтернатив і лексикографічна множина.

Паретовську множину альтернатив можна розбити на класи еквівалентності, що містять елементи з однаковими значеннями інтервальної цільової функції. Якщо взяти по одному представнику з кожного класу еквівалентності, то ці розв'язки утворюють множину, яку ми назвемо **повною множиною альтернатив**. Позначимо повну множину альтернатив через $\hat{X}$. Помітимо, що на відзнаку від паретовської множини повна множина альтернатив визначається неоднозначно, якщо існують

паретовські рішення з однаковими значеннями цільової функції. Якщо всі елементи паретовської множини мають одне і те ж значення цільової функції, то повна множина альтернатив складається з одного елементу - будь-якого з паретовських розв'язків.

Після вибору повної множини альтернатив, у ній можна виділити лексикографічну множину альтернатив. У повній множині альтернатив завжди існують розв'язок x^* з мінімальним значенням лівої межі інтервалу цільової функції і розв'язок x^{**} з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції:

$$\begin{aligned} x^* : w_1(x^*) &= \min\{w_1(x) | x \in \hat{X}\} \\ x^{**} : w_2(x^{**}) &= \min\{w_2(x) | x \in \hat{X}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Підмножина повної множини альтернатив, що об'єднує розв'язки x^* і x^{**} , називається **лексикографічною множиною альтернатив**. Позначимо лексикографічну множину альтернатив через $\hat{X}_{lex}$. Помітимо, що лексико-графічна множина альтернатив $\hat{X}_{lex}$ може складатися або з одного, або з двох елементів.

Очевидні такі включення $\hat{X}_{lex} \subseteq \hat{X} \subseteq \tilde{X} \subseteq X$.

ОЦІНКИ ПОТУЖНОСТІ МНОЖИН АЛЬТЕРНАТИВ

Твердження 1. Якщо потужність лексикографічної множини дорівнює 1, $|\hat{X}_{lex}|=1$, то потужність повної множини альтернатив також дорівнює 1, $|\hat{X}|=1$, а паретовська множина $\tilde{X}$ складається з розв'язків з однаковими значеннями інтервальної цільової функції.

Доказ. Нехай $x^* = x^{**} = x'$, тоді з співвідношень (3) витікає, що $w_1(x') \leq w_1(x)$ і $w_2(x') \leq w_2(x)$ для будь-якого розв'язку x з повної множини альтернатив $\hat{X}$. Таким чином, згідно з визначенням 1, розв'язок x' є "кращим" для будь-якого розв'язку з $\hat{X}$ або співпадає з ним по значенню інтервальної цільової функції. Останнє неможливо, тому що повна множина альтернатив містить по одному представнику з кожного класу еквівалентності. А оскільки повна множина альтернатив є підмножиною паретовської множини, то, згідно з визначенням 2, воно не повинно містити інші елементи, окрім x' (тому що будь-які інші розв'язки не були б паретовськими). Отже, повна множина альтернатив $\hat{X}$ складається з одного елементу, а саме - розв'язку x' . Це означає, що паретовська множина $\tilde{X}$ містить один клас еквівалентності, тобто усі його елементи мають одне і те ж значення інтервальної цільової функції.

Твердження доведене.

Оцінимо потужність повної множини альтернатив $\hat{X}$ у гіршому випадку.

Твердження 2. Для кожної задачі, що розглядається - про остовні дерева, досконалі паросполучення, комівояжера - існує таке інтервальне зважування ребер графа G , при якому повна множина альтернатив, паретовська множина альтернатив і множина допустимих розв'язків співпадають:

$$\hat{X} = \tilde{X} = X.$$

Доведення. Розглянемо задачу про остовні дерева на n -вершинному графі $G = (V, E)$ з інтервально-зваженими ребрами. Нехай граф G має m ребер. Перенумеруємо ребра графа G числами $t \in \{1, 2, \dots, m\}$. Нехай $R = 2^{m+1} + 1$. Призначимо кожному ребру $e \in E$ інтервальну вагу в відповідності до його номера $t(e)$:

$$w(e) = [2^{t(e)}, R - 2^{t(e)}].$$

Нехай X - множина усіх остовних дерев графа G . Тоді для будь-якого остовного дерева $x \in X$, згідно з (2), маємо

$$w(x) = [w_1(x), QR - w_1(x)], \quad (4)$$

де $Q = n - 1$ (кожне остовне дерево в n -вершинному графі має рівно $n - 1$ ребро).

Очевидно, що в графі G немає остовних дерев з однаковими значеннями інтервальної цільової функції, тому що

$$\forall x \in X \quad w_1(x) = \sum_{e \in E_x} 2^{t(e)}$$

і розклад по мірах 2 єдиний. Крім того, для кожного розв'язку $x \in X$ не існує розв'язку $y \in X$, що був його “краще” (см (4)):

якщо $w_1(x) < w_1(y)$, то $w_2(x) > w_2(y)$;

якщо $w_1(x) > w_1(y)$, то $w_2(x) < w_2(y)$.

Таким чином, будь-який розв'язок $x \in X$ є паретооптимальним, тобто $\tilde{X} = X$, а оскільки всі значення інтервальної цільової функції різноманітні, то $\hat{X} = \tilde{X}$. Звідси $\hat{X} = \tilde{X} = X$.

Твердження доведене.

Аналогічним образом цей факт доводиться для задачі про досконалі паросполучення (ЗСП) ($Q = n/2$) і задачі комівояжера ($Q = n$) (ЗК).

Для повного n -вершинного графа G відомі [3] наступні значення потужності множини допустимих розв'язків X :

$$|X| = \begin{cases} n^{n-2} & \text{ЗОД} \\ \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}} & \text{ЗСП} \\ (n-1)!/2 & \text{ЗК} \end{cases}$$

Таким чином, в гіршому випадку повна множина альтернатив $\hat{X}$ і паретовська множина $\tilde{X}$ мають експоненціальні оцінки потужності. Звідси бачиться недоцільність пошуку усіх представників цих множин.

Побудуємо алгоритм, що дозволить знайти усіх представників лексикографічної множини альтернатив $\hat{X}_{lex}$.

АЛГОРИТМ

Нехай даний граф $G = (V, E)$ і потрібно знайти лексикографічну множину альтернатив $\hat{X}_{lex}$ для задачі комівояжера з інтервально зваженими ребрами. Без втрати загальності будемо вважати, що всі інтервальні ваги ребер мають цілі кінці (множення на додатну константу всіх інтервалів не змінює паретовську множину).

Алгоритм α побудови лексикографічної множини альтернатив $\hat{X}_{lex}$

1. Обчислимо

$$S_1 = \sum_{e \in E} w_1(e),$$

$$S_2 = \sum_{e \in E} w_2(e).$$

2. Покладемо

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{S_2 + 1}.$$

3. Застосуємо алгоритм (наприклад, метод гілок і меж), який розв'язує задачу комівояжера на мінімум з цільовою функцією

$$F(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x).$$

4. Нехай x^* - розв'язок, що отриманий в результаті застосування алгоритму п. 2-3, тобто

$$F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in X. \quad (5)$$

5. Покладемо

$$\lambda_1 = \frac{1}{S_1 + 1}, \quad \lambda_2 = 1.$$

6. Застосуємо алгоритм (наприклад, метод гілок і меж), який розв'язує задачу комівояжера на мінімум з цільовою функцією

$$F(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x).$$

7. Нехай x^{**} - розв'язок, що отриманий в результаті застосування алгоритму п. 5-6, тобто

$$F(x^{**}) \leq F(x) \quad \forall x \in X. \quad (6)$$

8. Якщо $w(x^*) = w(x^{**})$, то будь-який один з розв'язків - x^* або x^{**} - утворить лексикографічну множину альтернатив $\hat{X}_{lex}$, яка відповідає деякій повній множині альтернатив $\hat{X}$.

Якщо $w(x^*) \neq w(x^{**})$, то розв'язки x^* і x^{**} утворюють лексикографічну множину альтернатив $\hat{X}_{lex}$, яка відповідає деякій повній множині альтернатив $\hat{X}$.

Твердження 3. Побудовані за алгоритмом α розв'язки x^* і x^{**} є паретовськими оптимумами.

Доказ. Доведемо твердження від супротивного. Нехай розв'язок x^* не є паретовським. Тоді, згідно з визначенням 2, для нього існує "кращий" розв'язок:

$$\exists \bar{x} \in X \quad w_1(\bar{x}) \leq w_1(x^*), \quad w_2(\bar{x}) \leq w_2(x^*) \quad (7)$$

і принаймні одна з цих нерівностей суворі.

Оскільки $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$ і одна з нерівностей (7) суворі, то

$$\lambda_1 w_1(\bar{x}) + \lambda_2 w_2(\bar{x}) < \lambda_1 w_1(x^*) + \lambda_2 w_2(x^*)$$

$$\text{або} \quad F(\bar{x}) < F(x^*),$$

але це суперечить (5). Отже, розв'язок x^* є паретооптимальним.

Аналогічно доводиться паретооптимальність розв'язку x^{**} .

Твердження доведене.

Твердження 4. Якщо $w(x^*) = w(x^{**})$, то будь-який один з розв'язків - x^* або x^{**} - утворить лексикографічну множину альтернатив $\hat{X}_{lex}$, яка відповідає деякій повній множині альтернатив $\hat{X}$.

Якщо $w(x^*) \neq w(x^{**})$, то розв'язки x^* і x^{**} утворять лексикографічну множину альтернатив $\hat{X}_{lex}$, яка відповідає деякій повній множині альтернатив $\hat{X}$.

Доказ. Згідно з твердженням (3), розв'язки x^* , x^{**} є паретовськими оптимумами. Виберемо повну множину альтернатив $\hat{X}$, що містить розв'язок x^* . За алгоритмом α для розв'язку x^* маємо $F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in X$, тобто

$$w_1(x^*) + \frac{1}{S_2 + 1} w_2(x^*) \leq w_1(x) + \frac{1}{S_2 + 1} w_2(x) \quad \forall x \in X. \quad (8)$$

Оскільки $\frac{1}{S_2+1}w_2(x) < 1 \quad \forall x \in X$, то з (8) слідує $w_1(x^*) \leq w_1(x) \quad \forall x \in X$, а значить, для

вибраної повної множини альтернатив $\hat{X}$ вірно

$$w_1(x^*) \leq w_1(x) \quad \forall x \in \hat{X}, \quad (9)$$

тобто розв'язок x^* є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням лівої межі інтервалу цільової функції.

Аналогічно для розв'язку x^{**} одержуємо нерівність

$$w_2(x^{**}) \leq w_2(x) \quad \forall x \in \hat{X}, \quad (10)$$

тобто розв'язок x^* є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції.

Якщо $w(x^*) \neq w(x^{**})$, то за визначенням лексикографічної множини альтернатив обидва розв'язки x^* і x^{**} є її представниками.

Якщо $w(x^*) = w(x^{**})$, то з (10) слідує $w_2(x^*) \leq w_2(x) \quad \forall x \in \hat{X}$, тобто розв'язок x^* є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції. У цьому випадку розв'язок x^* має мінімальні в повній множині альтернатив $\hat{X}$ значення лівої і правої межі інтервалу цільової функції і, отже, є єдиним лексикографічним оптимумом у цій множині альтернатив.

Твердження доведене.

Твердження 3 і 4 обґрунтовують вірність застосування алгоритму α для побудови лексикографічної множини альтернатив $\hat{X}_{lex}$.

Зауваження. Описаний у роботі алгоритм дозволяє знаходити лексикографічну множину альтернатив для задачі комівояжера з інтервальними параметрами. Аналогічний підхід застосовується для інтервальних задач про досконалі паросполучення і про остовні дерева. Для цих задач означений алгоритм буде поліноміальним, якщо використовувати відомі [1] поліноміальні алгоритми розв'язування задач про досконалі паросполучення і про остовні дерева з дійсними параметрами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.- М: Мир, 1978.
2. Kozina, G.L. and Perepelitsa, V.A. Interval Spanning Trees Problem: Solvability and Computational Complexity, Interval Computations, 1, (1994), pp. 42--50.
3. Emelichev, V.A. and Perepelitsa, V.A. Complexity of vector optimization problems on graphs, Optimization, 22 (6) (1991), pp. 903--918.