

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ІЗ ЩІЛИНОЮ МІЖ ШАРАМИ

Зіновєєв І.В.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багатошарова основа, у якій між двома сусідніми шарами є щілина довжиною $2L$. На берегах щілини відомі дотичні і нормальні напруження. На поверхні основи задане навантаження з кінцевим головним вектором. Потрібно визначити напруження і переміщення в довільній точці основи в припущенні, що деформація є плоскою.

Плоска задача про щілину в шаруватих середовищах розглядалася багатьма авторами [1,5]. Запропоновані аналітичні методи розв'язку задачі застосовувалися лише для середовищ, що містять не більш трьох шарів [1,3,6]. У гіданій роботі за допомогою теорії багатошарових основ складної структури пропонується метод зведення задачі про щілину між будь-якими шарами основи до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Основа містить довільне кінцеве число шарів. Пропонується ефективний метод чисельного розв'язку отриманої системи, заснований на квадратурних формулах найвищого алгебраїчного ступеня точності.

2. ВИВЕДЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ

Багатошаровою основою будемо вважати пакет необмежених у плані шарів постійної товщини, що лежить на пружному або абсолютно жорсткому півпросторі. Кожний шар основи є однорідним та ізотропним. Нижній шар основи лежить на півпросторі. Вважаємо, що всі шари основи зціплені. Нумерація шарів проводиться зверху вниз, починаючи з одиниці; півпростору надамо номер $n+1$. Величини, що відповідають k -му шару основи, будемо позначати нижнім індексом k .

Кожний шар віднесемо до місцевої декартової системи координат з початком на верхній межовій площині. Для визначеності вважаємо, що щілина знаходиться поміж m -м та $m+1$ -м шарами основи ($1 < m < n$). Осі Oz кожного шару спрямуємо всередину шару по нормалі до межової площини так, що вони розташовані на одній прямій і щілина займає ділянку $x_m \in [-l, l]$, $z_m = h_m$. Напрямки осей Ox всіх місцевих декартових систем координат співпадають. Те ж саме вважаємо відносно осей Oy . Навантаження верхньої межі багатошарової основи і об'ємні навантаження в шарах основи вважаємо такими, що вони викликають плоску деформацію основи.

На берегах щілини відомі нормальні та дотичні напруження

$$\sigma_{zz_m}(x, h_m) = \sigma_{zz_{m+1}}(x, 0) = q(x), \quad \sigma_{xz_m}(x, h_m) = \sigma_{xz_{m+1}}(x, 0) = g(x). \quad (1)$$

Для спрощення цих міркувань вважаємо що $q(x)$ - парна функція та $g(x)$ - непарна, а навантаження на верхній межі основи симетричне відносно осі Oz .

На суміжних межах шарів основи виконуються такі умови:

при $k \neq m$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\sigma_{xz_k}(x, h_k) = \sigma_{xz_{k+1}}(x, 0), \quad \sigma_{zz_k}(x, h_k) = \sigma_{zz_{k+1}}(x, 0)$$

$$U_{x_k}(x, h_k) = U_{x_{k+1}}(x, 0), \quad U_{z_k}(x, h_k) = U_{z_{k+1}}(x, 0),$$

при $k = m$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\sigma_{xz_m}(x, h_m) = \sigma_{xz_{m+1}}(x, 0), \quad \sigma_{zz_m}(x, h_m) = \sigma_{zz_{m+1}}(x, 0)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{x_{m+1}}(x,0)}{\partial x} &= \frac{\partial U_{x_m}(x, h_m)}{\partial x} + \begin{cases} \varphi(x), & x \in [-l, l] \\ 0, & x \notin [-l, l] \end{cases}, \\ \frac{\partial U_{z_{m+1}}(x,0)}{\partial x} &= \frac{\partial U_{z_m}(x, h_m)}{\partial x} + \begin{cases} \phi(x), & x \in [-l, l] \\ 0, & x \notin [-l, l] \end{cases}.\end{aligned}\quad (2)$$

Тут $\varphi(x)$, $\phi(x)$ - невідомі функції, які необхідно побудувати таким чином, щоб відповідні їм напруження $\sigma_{xz_m}(x, h_m)$, $\sigma_{zz_m}(x, h_m)$ задовольняли умовам (1). Позначимо, що за фізичним змістом задачі $\varphi(x)$ - парна функція та $\phi(x)$ - непарна.

Піддамо умови сумісності деформації (2) m-го та m+1-го шарів прямому одновимірному інтегральному перетворенню Фур'є

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \bar{f}(\xi).$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}-i\xi \bar{U}_{x_{m+1}}(\xi, 0) &= -i\xi \bar{U}_{x_m}(\xi, h_m) + \bar{\varphi}(\xi), \\ -i\xi \bar{U}_{z_{m+1}}(\xi, 0) &= -i\xi \bar{U}_{z_m}(\xi, h_m) + \bar{\phi}(\xi), \\ \bar{\sigma}_{xz_m}(\xi, h_m) &= \bar{\sigma}_{xz_{m+1}}(\xi, 0), \quad \bar{\sigma}_{zz_m}(\xi, h_m) = \bar{\sigma}_{zz_{m+1}}(\xi, 0).\end{aligned}\quad (2')$$

Трансформанти напружень та переміщень у k-му шарі, згідно з [7], є лінійними комбінаціями четвірки допоміжних функцій,

$$\begin{aligned}\alpha_k(\xi) &= \bar{\sigma}_{z_k}^1 \Big|_{z=0}, \quad \beta_k(\xi) = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} p \bar{U}_{z_k}^1 \Big|_{z=0}, \\ \gamma_k(\xi) &= -\frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} i\xi \bar{U}_{x_k}^1 \Big|_{z=0}, \quad \delta_k(\xi) = -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{z_k}^1 \Big|_{z=0},\end{aligned}\quad (3)$$

що зв'язують напруження та переміщення у k-му шарі з умовами на його верхній межі:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [2\nu_k \tau + \tau_1] + \beta_k [\tau + \tau_1] + \gamma_k [2\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [(3-2\nu_k)\tau + \tau_1], \\ \bar{\sigma}_{z_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \tau - \tau_1] + \beta_k [\tau - \tau_1] - \gamma_k \tau_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \tau + \tau_1], \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{xz_k}(\xi, z) &= -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \tau - \tau_1] + \beta_k \tau_1 + \gamma_k [\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \tau + \tau_1], \\ (-i\xi) 2G_k \bar{U}_{x_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} \tau_1 + \beta_k [w_2 \tau + \tau_1] + \gamma_k [\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_3 \tau + \tau_1], \\ 2G_k p \bar{U}_{z_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_3 \tau - \tau_1] + \beta_k [w_1 \tau - \tau_1] + \gamma_k [w_2 \tau - \tau_1] - \frac{\delta_k}{w_1} \tau_1,\end{aligned}\quad (4)$$

де $G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ - модуль зсуву матеріалу шару, $p = |\xi|$,

$$w_1 = 2(1 - \nu_k), w_2 = 1 - 2\nu_k, w_3 = 3 - 4\nu_k, w_4 = 4(1 - \nu_k)^2$$

$$\mathfrak{T} = sh(pz), \mathfrak{C} = ch(pz), \mathfrak{T}_1 = pz \cdot \mathfrak{T}, \mathfrak{C}_1 = pz \cdot \mathfrak{C}. \quad (4')$$

Допоміжні функції (3) для сусідніх зціплених шарів зв'язано відомими лінійними однорідними рекурентними співвідношеннями [7]

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \beta_k [\hat{s} - \hat{c}_1] - \gamma_k \hat{s}_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1],$$

$$\Delta_k \beta_{k+1} = \frac{\alpha_k}{w_4} [w_3 \hat{s} - \hat{c}_1] + \frac{\beta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] - \frac{\delta_k}{w_4} \hat{s}_1,$$

$$\Delta_k \gamma_{k+1} = \frac{\alpha_k}{w_4} \hat{s}_1 + \frac{\beta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1] + \frac{\delta_k}{w_4} [w_3 \hat{s} + \hat{c}_1],$$

$$\delta_{k+1} = -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] + \beta_k \hat{s}_1 + \gamma_k [\hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1], \quad (5)$$

де

$$\Delta_k = \frac{E_k (1 - \nu_{k+1}^2)}{E_{k+1} (1 - \nu_k^2)}, p_k = ph_k, \hat{s} = sh(p_k), \hat{c} = ch(p_k), \hat{s}_1 = p_k \cdot \hat{s}, \hat{c}_1 = p_k \cdot \hat{c}.$$

Щоб отримати рекурентні співвідношення для m -го та $m+1$ -го шарів, які не є повністю зціпленими, покладемо у формулах (4) $k=m$, $z=h_m$. Враховуючи (3), приходимо до шуканих рекурентних співвідношень

$$\alpha_{m+1} = \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \beta_k [\hat{s} - \hat{c}_1] - \gamma_k \hat{s}_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1],$$

$$\Delta_m \beta_{m+1} = \frac{\alpha_k}{w_4} [w_3 \hat{s} - \hat{c}_1] + \frac{\beta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] - \frac{\delta_k}{w_4} \hat{s}_1 + \beta_m^0,$$

$$\Delta_m \gamma_{m+1} = \frac{\alpha_k}{w_4} \hat{s}_1 + \frac{\beta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1] + \frac{\delta_k}{w_4} [w_3 \hat{s} + \hat{c}_1] + \gamma_m^0,$$

$$\delta_{m+1} = -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] + \beta_k \hat{s}_1 + \gamma_k [\hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1], \quad (5')$$

де

$$\beta_m^0 = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m^2)} \cdot \frac{i\xi}{p} \bar{\varphi}(\xi), \quad \gamma_m^0 = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m^2)} \cdot \frac{i\xi}{p} \varphi(\xi).$$

Одержані рекурентні співвідношення неоднорідні, що свідчить про належність основи з щільною до типу основ складної структури. Тому в подальших міркуваннях можна спиратися на результати, одержані в роботах [8,9] для основ складної структури. Допоміжні функції $\alpha_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), \delta_k(\xi)$ для будь-якого шару основи не є незалежними: відповідні їм напруження в пружній півплощині (шар основи з номером $n+1$) повинні зникати при $z \rightarrow \infty$. Умова зникнення напружень та переміщень при $z \rightarrow \infty$ у півплощині дозволяє виразити дві з функцій $\alpha_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), \delta_k(\xi)$ через дві інші:

$$\beta_k = -A_k(p) \alpha_k(\xi) + B_k(p) \delta_k(\xi) + L_k(\xi),$$

$$\gamma_k = B_k(p) \alpha_k(\xi) - B_{\tau k}(p) \delta_k(\xi) + M_k(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

де $A_k(p), B_{\tau k}(p), B_k(p), L_k(\xi), M_k(\xi), k=1, 2, \dots, n$ - функції податливості багат шарової основи складної структури [9].

Функції податливості $A_k(p), B_k(p), B_{\tau k}(p), k=1, \dots, n+1$ не залежать від способу навантаження основи. Вихідними для їх визначення служать функції податливості півплощини: для суцільної пружної

півплощини $A_{n+1} = B_{\tau n+1} = 1$, $B_{n+1} = \frac{(1-2\nu_{n+1})}{2(1-\nu_{n+1})}$; для абсолютно жорсткої півплощини $A_{n+1} = B_{\tau n+1} = B_{n+1} = 0$.

На відміну від функцій $A_k(p)$, $B_k(p)$, $B_{\tau k}(p)$, функції $L_k(\xi)$, $M_k(\xi)$, $k=1, \dots, n+1$ залежать від засобу навантаження берегів щілини, але не залежать від функцій $\alpha_k(\xi)$, $\beta_k(\xi)$, $\gamma_k(\xi)$, $\delta_k(\xi)$. Тому при фіксованих умовах на берегах щілини функції $L_k(\xi)$, $M_k(\xi)$, $k=1, \dots, n+1$, також, як і функції податливості $A_k(p)$, $B_k(p)$, $B_{\tau k}(p)$, $k=1, \dots, n+1$ можуть бути визначені до розв'язку будь-якої межової задачі для основи з щілиною [9]. Опускаючи викладення, приведемо рекурентні співвідношення для функцій податливості $L_k(\xi)$, $M_k(\xi)$, $k=1, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} D_k(p)L_k(p) &= e^{-p_k} \Delta_k \left\{ -\beta_k^0 \cdot \left[c + \frac{p_k s}{w_1} + \Delta_k B_{\tau k+1}(s + p_k c) + \Delta_k B_{k+1} p_k s \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_k^0 \cdot \left[\frac{w_2 s - p_k c}{w_1} - \Delta_k B_{k+1}(s + p_k c) - \Delta_k A_{k+1} p_k s \right] \right\}, \\ D_k(p)M_k(p) &= e^{-p_k} \Delta_k \left\{ -\beta_k^0 \cdot \left[-\frac{w_2 s + p_k c}{w_1} - \Delta_k B_{\tau k+1} p_k s + \Delta_k B_{k+1}(s - p_k c) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_k^0 \cdot \left[-c + \frac{p_k s}{w_1} - \Delta_k A_{k+1}(s - p_k c) + \Delta_k B_{k+1} p_k s \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{де } e_k &= e^{-2p_k}, \quad s = \frac{(1-e_k)}{2}, \quad c = \frac{(1+e_k)}{2}, \quad N_k = \frac{1}{w_4}, \quad H_k = \Delta_{k+1}^2 [A_{k+1} B_{\tau k+1} - B_{k+1}^2], \\ \tilde{\Delta}_k &= \frac{\Delta_k}{1-\nu_k}, \quad D_k(p) = N_k [w_3 c^2 + p_k^2 e_k + e_k w_2^2] + \Delta_k A_{k+1}(sc - p_k e_k) + \\ &\quad + \Delta_k B_{\tau k+1}(sc + p_k e_k) + \frac{\tilde{\Delta}_k}{2} [B_{k+1} + A_{\tau k+1}] [w_2^2 s^2 + p_k^2 e_k] + H_k [s^2 - p_k^2 e_k], \end{aligned} \quad (8)$$

Надалі при визначенні істинних напружень та переміщень при допомозі зворотного одновимірного інтегрального перетворення Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (9)$$

виникають труднощі з обчисленням інтегралів Фур'є, так як деякі підінтегральні функції повільно спадають при $p \rightarrow \infty$. Тому доцільно оцінити поведінку трансформант напружень та переміщень у багат шаровій основі при $p \rightarrow \infty$.

Аналіз поведінки трансформант шуканих величин у шарах основи при $p \rightarrow \infty$ показав, що лише в шарах з номерами $l, m, m+l$ спадання трансформант може бути дуже повільним. В інших шарах швидкість спадання трансформант експоненціальна. Для виведення інтегральних рівнянь задачі виділимо повільно спадаючі доданки в трансформантах нормальних та дотичних напружень на верхній межі $m+l$ -го шару.

Враховуючи (7), (8) маємо при $p \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} c &\rightarrow 0.5, \quad s \rightarrow 0.5, \quad A_k(p) \rightarrow 1, \quad B_k(p) \rightarrow \frac{w_2}{w_1}, \quad B_{\tau k}(p) \rightarrow 1, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} D_k(p) &= D_k^\infty = \frac{1}{4} \left\{ \frac{w_3}{w_4} + 2\Delta_k + \Delta_k \frac{w_2(1-2\nu_{k+1})}{w_1(1-\nu_{k+1})} + \Delta_k^2 \left[1 - \frac{1-2\nu_{k+1}}{4(1-\nu_{k+1}^2)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$L_k D_k e^{P_k} = -\frac{1}{2} \left\{ \beta_k^0 (\bar{\alpha} + p \bar{b}) - \gamma_k^0 (\bar{c} - p \bar{b}) \right\} + O(p^s e^{-P_k}),$$

$$M_k D_k e^{P_k} = -\frac{1}{2} \left\{ -\beta_k^0 (\bar{c} + p \bar{b}) + \gamma_k^0 (\bar{\alpha} - p \bar{b}) \right\} + O(p^s e^{-P_k}),$$

де $\bar{\alpha} = 1 + \Delta_k$, $\bar{b} = \frac{1}{2(1-\nu_k)} + \Delta_k \frac{3-4\nu_{k+1}}{2(1-\nu_{k+1})}$, $\bar{c} = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)} - \Delta_k \frac{1-2\nu_{k+1}}{2(1-\nu_{k+1})}$.

Використовуючи першу та четверту формули (3) та (5), отримаємо

$$\sigma_{zz_{m+1}}(\xi, 0) = -\frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \bar{\psi}(\xi) \bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\xi) \bar{c} \right\} + O(p_m e^{-P_m}),$$

$$\sigma_{xz_{m+1}}(\xi, 0) = -\frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \bar{\varphi}(\xi) \bar{\alpha} + \bar{\psi}(\xi) \bar{c} \right\} + O(p_m e^{-P_m}),$$

де $\bar{\varphi}(\xi)$, $\bar{\psi}(\xi)$ - трансформанти Фур'є невідомих функцій, що підлягають визначенню.

Застосуємо зворотнє перетворення Фур'є (9) до наведених вище виразів для $\sigma_{zz_{m+1}}(\xi, 0)$, $\sigma_{xz_{m+1}}(\xi, 0)$ та скористаємось властивістю перетворення Фур'є

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi}{p} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Внаслідок цього прийдемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \varphi(x) \bar{c} + 2\bar{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t-x} dt \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= q(x), \\ \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ -\psi(x) \bar{c} + 2\bar{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_2(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= g(x), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\Theta_r = Q_r(p) \beta_m^0 + R_r(p) \gamma_m^0 + H_r(p) \alpha_1 + S_r(p) \delta_1, \quad r=1,2.$$

Фізичний зміст функцій $\Theta_1(\xi)$, $\Theta_2(\xi)$ такий

$$\Theta_1(\xi) = \sigma_{zz_m}(\xi, h_m) + \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \bar{\psi}(\xi) \bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\xi) \bar{c} \right\},$$

$$\Theta_2(\xi) = \sigma_{xz_{m+1}}(\xi, h_m) + \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \bar{\varphi}(\xi) \bar{\alpha} + \bar{\psi}(\xi) \bar{c} \right\}.$$

Отже, для одержання значень функцій $Q_1(p)$, $R_1(p)$, ..., $S_2(p)$ необхідно покласти рівній одиниці одну з функцій β_m^0 , γ_m^0 , α_1 , δ_1 , а інші покласти рівними нулю. Після цього обчислити по наведених формулах величини $\Theta_1(\xi)$, $\Theta_2(\xi)$. Ці обчислення доцільно виконувати на ЕОМ, керуючись формулами для розрахунків трансформант напружень у багатопарній основі [7,9].

Виходячи з фізичного змісту задачі, можна зробити висновок, що $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(\xi)$, $-\frac{i\xi}{p} \sigma_{xz_1}(\xi, 0) = \delta_1$,

$\sigma_{zz_1}(\xi, 0) = \alpha_1$ - є парними функціями, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(\xi)$, $\frac{i\xi}{p}$ - є непарними функціями. Враховуючи це, формули (10) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} \tilde{c} \varphi(x) + \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} 2\tilde{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\psi(t)}{t-x} dt + \\
& + \frac{E_m}{\pi(1-\nu_m^2)} \left\{ - \int_0^l \psi(t) \int_0^{+\infty} Q_1(p) \cos(px) \sin(pt) dp dt + \int_0^l \varphi(t) \int_0^{+\infty} R_1(p) \cos(px) \cos(pt) dp dt \right\} + \\
& + \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \alpha_1(t, 0) \int_0^{+\infty} H_1(p) \cos(px) \cos(pt) dp dt + \int_0^{+\infty} \alpha z_1(t, 0) \int_0^{+\infty} S_1(p) \cos(px) \sin(pt) dp dt \right\} = q(x), \\
& - \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} \tilde{c} \psi(x) + \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} 2\tilde{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \\
& + \frac{E_m}{\pi(1-\nu_m^2)} \left\{ - \int_0^l \psi(t) \int_0^{+\infty} Q_2(p) \sin(px) \sin(pt) dp dt + \int_0^l \varphi(t) \int_0^{+\infty} R_2(p) \sin(px) \cos(pt) dp dt \right\} + \\
& + \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \alpha_1(t, 0) \int_0^{+\infty} H_2(p) \sin(px) \cos(pt) dp dt + \int_0^{+\infty} \alpha z_1(t, 0) \int_0^{+\infty} S_2(p) \sin(px) \sin(pt) dp dt \right\} = g(x). \quad (11)
\end{aligned}$$

Таким чином отримана система двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$. Ця система повинна бути доповнена двома рівняннями, що виражають вимогу неперервності переміщень при обході контура щілини

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^{+l} \psi(t) dt = 0. \quad (12)$$

3. НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Щоб отримати наближений розв'язок одержаної системи сингулярних інтегральних рівнянь, слід з'ясувати характер особливостей розв'язку задачі на кінцях щілини. Особливості розв'язку визначаються характеристичними частинами рівнянь, тобто рівняннями

$$\tilde{c} \varphi(x) + 2\tilde{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\psi(t)}{t-x} dt = q(x), \quad -\tilde{c} \psi(x) + 2\tilde{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = g(x). \quad (13)$$

Аналіз характеристичних частин інтегральних рівнянь дозволив встановити, що шукані функції мають структуру такого виду:

$$\varphi(x) = \frac{r(x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \quad \psi(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \quad (14)$$

де $r(x)$, та $s(x)$ - гладкі функції в інтервалі $(-1, 1)$, сильно осцилюючі у малих колах точок $x = \pm 1$. Як показали математичні експерименти В.А.Стулея [10], при розв'язанні систем сингулярних інтегральних рівнянь аналогічних системам (11), (12) значення функцій $r(x)$ та $s(x)$ визначаються з високою точністю практично на всьому інтервалі $(-1, 1)$ при допомозі методу скінчених сум. Для розв'язку рівнянь будемо користуватись методом кінцевих сум, що базується на квадратурних формулах гаусового типу [1]

$$\int_{-l}^{+l} \frac{f(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{f(t_k)}{\sqrt{l^2 - t_k^2}}, \quad \int_{-l}^{+l} \frac{f(t)}{(t-x_m)\sqrt{l^2 - t^2}} dt = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{f(t_k)}{(t_k - x_m)\sqrt{l^2 - t_k^2}},$$

де $t_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2M}\right)$, $x_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M}\right)$, $m=1, 2, \dots, M-1$ - відповідно розв'язання многочленів Чебишева

$T_{M-1}(x)$ та $U_{M-1}(x)$ першого та другого роду. Внаслідок отримаємо систему $2M$ лінійних алгебраїчних рівнянь, що містять значення шуканих функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ у точках t_k та x_m . Для одержання визначеної системи рівнянь виразимо $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ через відповідні значення функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ в вузлах t_k , $k=1, 2, \dots, M$ при допомозі інтерполяційних многочленів Лагранжа:

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{Ml^2} \sum_{k=1}^M \frac{T_m\left(\frac{x_m}{l}\right) \cdot \varphi(t_k)(l^2 - t_k^2)}{(x_m - t_k)T_{m-1}\left(\frac{t_k}{l}\right)}, \quad \psi(x) \approx \frac{1}{Ml^2} \sum_{k=1}^M \frac{T_m\left(\frac{x_m}{l}\right) \cdot \psi(t_k)(l^2 - t_k^2)}{(x_m - t_k)T_{m-1}\left(\frac{t_k}{l}\right)}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.:Наукова думка, 1976. - 444 с.
2. Крауч С., Старфілд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир, 1987. - 328с.
3. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. О решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований сложной структуры. - В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. - Ереван, 1979, С.81-84.
4. Марченко М.В. Применение метода граничных элементов для исследования трещины на поверхности раздела двух материалов.// Вопросы прочности и пластичности.- Днепропетровск: ДГУ, 1996.-С.59-67.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи теории упругости для тел с трещинами. -К.: Наукова думка, 1981. - 324с.
6. Вигдерович И.Е. Основные граничные задачи плоской теории упругости для многослойных оснований сложной структуры Автореф. дисс. канд. физ. -мат. наук. - Днепропетровск: ДГУ, 1980. - 18 с.
7. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. - Днепропетровск, 1985. - Ч.1, 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, 8789-В.
8. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры. - Докл. АН УССР. Сер.А., 1979.-№6.-С. 434-438.
9. Приварников А.К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры.: Автореф. дисс. д-ра фіз.-мат. наук. - М., 1982. - 41 с.
10. Стулей В.А. О методе конечных сумм решения сингулярных интегральных уравнений смешанных плоских задач теории упругости.// Устойчивость и прочность элементов конструкций. - Днепропетровск: ДГУ, 1988. - С.5-9.