

УДК 519.642

РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Зв'язочкіна О.А., Толоч В.О.

У роботі пропонується алгоритм, заснований на методі крайових елементів й аналітичному методі функцій Гріна для нестационарної задачі теплопровідності, для розв'язку змішаних задач стаціонарної термопружності з заданим нестационарним навантаженням у неоднорідній півплощині. Під неоднорідністю тут розуміється багатозв'язність області. Даний алгоритм, побудований для розв'язку задач стаціонарної теплопровідності і пружності, приведений у роботах [1,2]. Однак, при постановці нестационарної задачі теплопровідності для тієї ж області і при наявності таких же крайових умов, з'являється початкова умова і похідна за часом. При побудові алгоритму для розв'язку такої задачі можна використовувати той же метод крайових елементів у нестационарній постановці [3] або метод скінченних різниць [4]. У даній роботі при побудові алгоритму для розв'язку змішаної нестационарної задачі використовувався метод крайових елементів.

Розглянемо динамічну задачу теплопровідності в півплощині з включенням. Припускаємо, що на частині межі заданий тепловий потік, на включенні температура або потік, є початковий розподіл температури. Треба знайти функцію розподілу температури за часом в півплощині з включенням.

Математично цей процес описується так (рис.1):

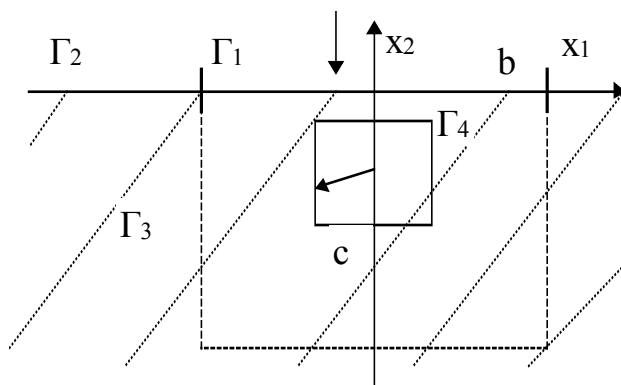


Рис. 1

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= f_1(x, t), \\ u \Big|_{\Gamma_2} &= f_2(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} &= f_4(x, t), \\ u(x, y, 0) &= \mu_0 \end{aligned} \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа, Γ_1 – частина прямої, на якій заданий тепловий потік, Γ_2 – інша частина прямої, на якій задана температура, Γ_4 – контур включення, μ_0 – температура, задана в початковий момент часу. Граничні і початкові умови погоджені.

При розв'язанні використовується модифікований метод крайових елементів, приведений у роботі [1]. З цією метою обмежимо прямокутником Γ_3 нашу півплощину, однією з меж якого буде контур Γ_1 , на якому і заданий тепловий потік. Отримано обмежену область із контуром $\Gamma_3 \cup \Gamma_1$. Тепер можна побудувати інтегральне рівняння для нової області. Як відомо [3], граничне інтегральне рівняння для нестационарної теплопровідності має такий вид:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi, t_F) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt = \\ = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt + k \int_{\Omega} u_0(x, t_0) u^*(\xi, x, t_F, t_0) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (2)$$

де $c(\xi)$ – функція тілесного кута в точці ξ межі [3], $u(x,t)$ і $q(x,t)$ – задані і невідомі крайові умови, $u^*(\xi, x, t_F, t)$ і $q^*(\xi, x, t_F, t)$ – фундаментальний розв’язок, що залежить від часу, та його нормальна похідна, останній доданок є інтеграл від початкових умов, Ω – область, обмежена контуром $\Gamma_3 \cup \Gamma_1$.

Тепер, застосовуючи метод крокового інтегрування за часом, отримаємо чисельний розв’язок задачі. При цьому, оскільки фундаментальний розв’язок сам залежить від часу, звичайно можна застосовувати великі кроки за часом. Частина невідомих на межі Γ_3 виражається через невідомі на контурі Γ_1 по відомому аналітичному розв’язку нестационарної задачі теплопровідності для півплощини [5]:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi kt} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{4kt}\right) \right] \times \\ \times \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{y}{4\pi k} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4k(t-\tau)}\right) \right] g(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3)$$

де $\mu(\xi, \tau)$ – початкова умова, $g(\xi, \tau)$ – задана на межі півплощини крайова умова 1 роду.

Співвідношення (3) зв’язує кожную точку півплощини зі значенням функції на контурі $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Таким чином, можна виразити невідомі значення температури на контурі Γ_3 через невідомі значення температури $g(\xi, \tau)$ на контурі Γ_1 . Одержуємо повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв’язуючи яку отримаємо всі шукані невідомі. Потім, підставляючи в інтегральне рівняння (2) знайдені значення температури і потоку на прямокутнику, отримаємо розв’язок задачі (1) у середині області. При цьому коефіцієнт $c(\xi)$ у цьому випадку буде дорівнювати одиниці. Розв’язок задачі (1) для необмеженої області поза прямокутником отримаємо через аналітичний розв’язок задачі для півплощини (3). Використовуючи покрокову схему за часом, приведену в роботі [3] можна одержати, таким чином, розв’язок задачі (1) у будь-який момент часу.

Для ілюстрації даного методу була розв’язана конкретна задача, у якій прийняли такі умови: початкові умови дорівнюють нулю, на контурі Γ_1 заданий потік, рівний одиниці, на частині межі півплощини, що залишилися, задана нульова температура, на контурі включення задана одинична температура. Функції u і q через нескладність задачі та для простоти обчислень були взяті постійними. Межа контуру розбита з розрахунку по 25 елементів на одиницю довжини. Для побудови розв’язку в неоднорідній півплощині обмежуючий контур, повинний знаходитися від межі включення на відстані, рівній подвійному діаметру включення.

Нижче подані графіки отриманого розподілу температури в півплощині: на рис. 2 без включення; на рис.3 із включенням. Графік, коли на включенні заданий потік, не приведений тут, оскільки поведінка функції температури буде аналогічною. Центр квадратного включення знаходиться в т. (0, 0,5), довжина боку дорівнює 0,5. Розрахунки проводилися для часу з інтервалом від 0 до 2 із кроком 0,1.

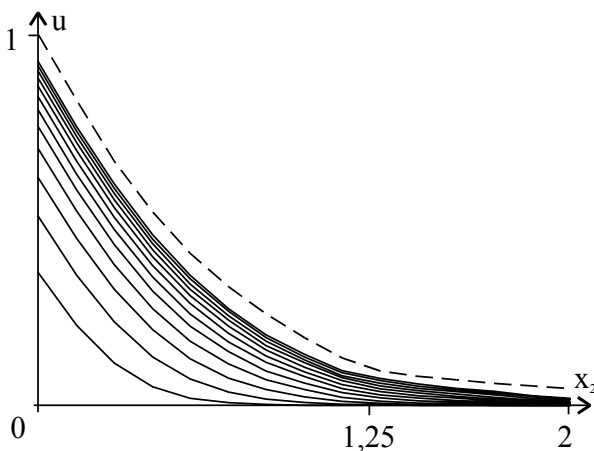


Рис. 2 Розподіл температури в півплощині за часом під дією теплового потоку

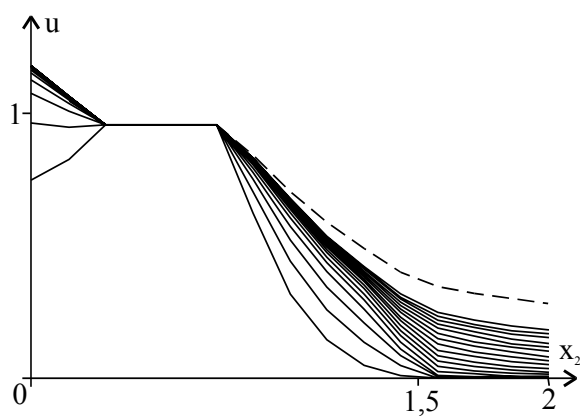


Рис. 3 Розподіл температури за часом у півплощині з квадратним включенням, на якому задана одинична температура

Як показують результати, у півплощині під дією заданого потоку на межі відбувається рівномірний розподіл температури. При цьому при переході через обмежуючий контур функція температура гладка, без стрибків. Таким чином, на даному прикладі показана ефективність використання побудованого алгоритму для розв'язку змішаних задач теплопровідності для півплощини в нестационарному випадку. Розв'язок задачі для неоднорідної півплощини за графіком функції розподілу температури теж гладкий при переході через обмежуючий контур. Однак, на відміну від розв'язку для однорідної півплощини, цей розв'язок приблизний і, відповідно, чим обмежуючий контур далі від межі включення, тим точніше буде розв'язок. При проведенні порівняльного аналізу розв'язків для різних розмірів обмежувачих контурів була отримана така закономірність, що обмежуючий контур повинний знаходитися від межі включення на відстані, рівній подвійному діаметру включення. Тобто подальше збільшення розмірів обмежувачого контуру уточнює розв'язок на десятку частку відсотка. Таким чином, побудованим алгоритмом можна розв'язувати змішані нестационарні задачі теплопровідності в багатозв'язній півплощині, при цьому на розв'язок не накладаються ніякі додаткові умови, на відміну від інших чисельних методів.

Отримані результати можна використовувати при побудові розв'язку стаціонарної пружної задачі, із заданим в області нестационарним тепловим навантаженням. У термінах теорії пружності [6] це буде побудова розв'язку стаціонарної незв'язної задачі термопружності, де як фіктивні масові сили виступає функція температури, яку отримали вище в кожний момент часу.

Розглянемо задачу про вдавлювання штампа в пружну півплощину. Ця задача відома як змішана крайова задача, коли на межі задані такі умови (рис. 4).

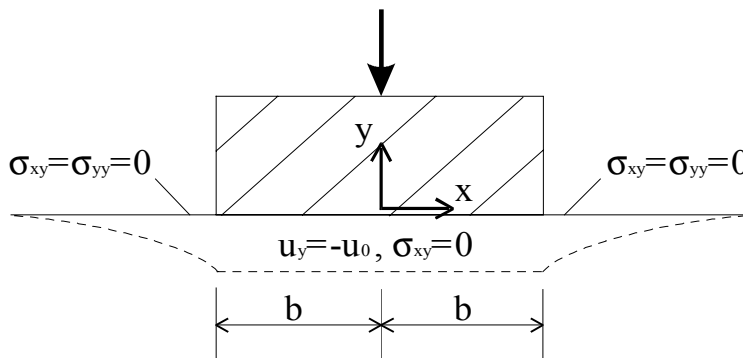


Рис. 4 Вдавлювання жорсткого штампа із мастилом

$$u_y = -u_0, |x| \leq b, y=0,$$

$$\sigma_{xy} = 0, |x| < \infty, y=0,$$

(4)

$$\sigma_{yy} = 0, |x| > b, y=0.$$

Ці умови вимагають, щоб зміщення u_y безпосередньо під штампом, $|x| \leq b, y=0$, були постійними і дорівнювали $-u_0$ ($u_0 > 0$).

Крім того, дотичні напруження σ_{xy} дорівнюють нулю на всій межі, включаючи область $|x| \leq b$ під штампом (передбачається, що мастило забезпечує умови, при яких на контакті штампа з півплощиною не виникають дотичні зусилля). І нормальні напруження σ_{yy} дорівнюють нулю при $y=0$ для $|x| > b$, тобто в точках, де не задані зміщення u_y . Під штампом ($|x| \leq b, y=0$) нормальні напруження невідомі.

Розв'язок цієї пружної задачі поданий в [2]: алгоритм будувався на основі методу крайових елементів і розв'язку задачі Фламана. Однак, присутність температурних навантажень як фіктивних сил приводить до деякої модифікації закону Гука [6]. Тобто додається права частина в інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \int_{\Omega} u_{ik,k}^*(\xi, x)T d\Omega, \end{aligned}$$

де інтеграл у лівій частині розуміється в змісті головного значення, T – температура задана в області Ω , G – модуль зрушення, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт теплопровідності. При цьому, тому що з розв'язку попередньої задачі розподіл температури в кожний момент часу відомо на всій півплощині, то Ω охоплює всю область, на яку впливають задані теплові крайові умови.

Застосовуючи побудований алгоритм, одержуємо розв'язок пружної задачі (4) в півплощині з включенням, із заданим нестационарним тепловим навантаженням.

На рис. 5 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, пунктиром виділені напруження у випадку, коли не задане теплове навантаження. Сама верхня лінія відповідає напруженням, отриманим при розв'язанні пружної задачі, коли теплове навантаження не залежить від часу. На рис. 6 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, але в півплощині є присутнім включення з заданим нульовим напруженням. Типи ліній відповідають описаним на рис. 5

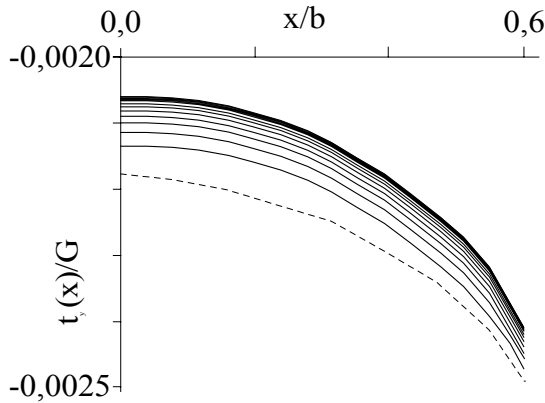


Рис. 5 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини під дією штамп з кроком за часом 0,1

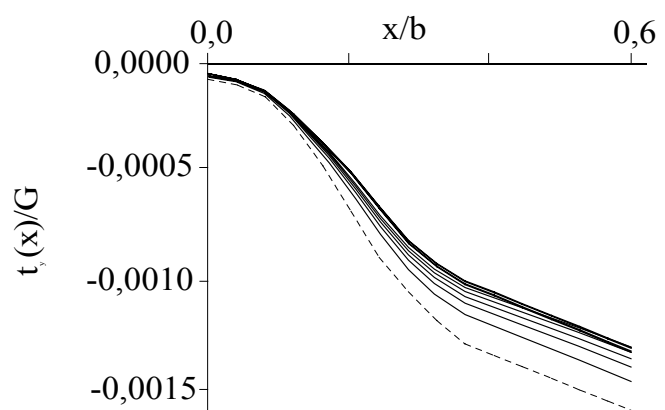


Рис. 6 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини з включенням під дією штамп з кроком за часом 0,1

Таким чином, як показують результати, під дією нестационарного теплового навантаження відбувається поступове зменшення напружень на межі під штампом і вони прагнуть до статичних. Графіки розподілу напружень і зміщень в однорідній і багатозв'язній півплощині тут не розглядаються, тому що вони мають аналогічний характер як і функція температури, графіки якої подані на рис. 2 і рис. 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Звьоздочкіна О. А., Толлок В. О. Про один спосіб розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – №1. – С.36-38.
2. Звьоздочкіна О. А., Толлок В. О. Про один метод розв'язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісник Державного університету “Львівська політехніка”, с. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 172-175.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987.–524 с.
4. Бахвалов Н. Численные методы. – М.: Наука, 1987. - С. 327.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – С. 474.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.