УДК 517.5

МНОЖИНИ ЧЕЗАРІВСЬКИХ СУМ РЯДІВ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ ТА ПРОСТОРІ $L_P[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ ПРИ ДЕЯКИХ ОБМЕЖЕННЯХ

Д'яченко Н.М.

У цій роботі ми знайдемо обмеження на спільний член ряду в скінченновимірному просторі та просторі $L_p[0,1]$, при яких з непорожності множини Чезарівських сум ряду витікає непорожність множини сум цього ряду. Також буде знайдено структуру множини Чезарівських сум при цих обмеженнях.

Нехай X - банаховий простір, X^* - спряжений до нього.

Послідовність y_n *збігається за Чезаро,* якщо збігається послідовність $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ за нормою простору X.

Визначення 1. Ряд $\sum_n x_n$ з елементами x_n з X називається збіжним (відповідно збіжним за Чезаро), якщо послідовність його часткових сум $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ збігається за нормою простору (відповідно збігається за Чезаро). Якщо ряд $\sum_n x_n$ збігається до y за Чезаро, будемо це позначати: $\sum_n {}_{Ч}\, x_n = y$.

Визначення 2. Множина таких $x \in X$, для яких існує переставлення натурального ряду $\pi : N \to N$, при якому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ збігається (відповідно збігається за Чезаро) до x, має назву **множини сум** (позначається: $MC\left(\sum_n x_n\right)$) (відповідно **множини Чезарівських сум** (позначається: $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$)).

Множиною граничних точок ряду ($MГТ\left(\sum_n x_n\right)$) називається множина тих x з X, для яких існує таке переставлення, що деяка підпослідовність часткових сум ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ збігається до x.

Легко довести, що будь-який ряд, що збігається, збігається і за Чезаро, тому для будь-якого ряду

$$MC\left(\sum_n x_n\right) \subseteq MЧС\left(\sum_n x_n\right).$$

З класичного математичного аналізу відома [1] теорема Рімана, яка в термінах визначення 2 може бути сформульована таким чином.

Теорема 1. Якщо числовий ряд $\sum_n x_n$ збігається умовно, то $MC\left(\sum_n x_n\right) = R$.

Якщо спільний член ряду x_n не прямує до нуля, то $MC\left(\sum_n x_n\right)=\varnothing$, однак $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$ не обов'язково порожня. Відоме [3]

Твердження 1. Якщо $x_n \in R$, то $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$ може бути однією з чотирьох множин: а) порожнею, б) одноточковою, в) всією множиною R, г) множиною вигляду $\alpha+\beta Z$, де $\alpha \in R, \beta \in R$.

Випадок г) можливий лише для ряду зі спільним членом, який не прямує до нуля. У той же час Чезарівська множина сум може співпадати з множинами у вигляді а), б), в) для рядів зі спільним членом, як прямуючим так і непрямуючим до нуля.

З непорожності множини Чезарівських сум не завжди витікає непорожність множини сум. Які умови потрібно накласти на члени ряду, щоб з непорожності множини Чезарівських сум ряду випливала непорожність множини сум цього ряду? Відповіді на це питання для рядів у скінченновимірному просторі і просторі $L_p[0,1]$ $(1<p<\infty)$ присвячена ця робота.

Для будь-якого ряду $\sum_n x_n$ легко довести нерівності

$$-\infty \le \underline{lim}\, S_n \le \underline{lim}\, \sigma_n \le \overline{lim}\, \sigma_n \le \overline{lim}\, S_n \le +\infty .$$

За допомогою цих нерівностей та на основі доведення теореми Рімана [1] легко довести таку лему.

Лема 1. Якщо числова послідовність a_n збігається до нуля, то наступні умови еквівалентні:

а) $MC\left(\sum_n a_n\right)\neq\varnothing$;

б) $MЧС\left(\sum_n a_n\right)\neq\varnothing$;

в) з того, що ряд $\sum_n a_n$ абсолютно розбігається, витікає розбіжність рядів, утворених як з додатних так і з від'ємних його членів;

г) з того, що ряд $\sum_n |a_n|$ розбігається за Чезаро, витікає розбіжність за Чезаро рядів, утворених як з додатних так і з від'ємних його членів.

Наслідок 1. Якщо числова послідовність a_n збігається до нуля, то непорожність $MЧС\left(\sum_n a_n\right)$ еквівалентна непорожності $MC\left(\sum_n a_n\right)$.

Ряд $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

зі спільним членом, що прямує до нуля, за Чезаро збігається до $\frac{1}{2}$, а у звичайному розумінні розбігається. Однак множина сум цього ряду непорожня, оскільки непорожня множина Чезарівських сум. Крім того неважко довести, що для цього ряду

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = MЧС\left(\sum_n x_n\right) = R .$$

Для подальшого розгляду структури множини Чезарівських сум нам потрібні будуть множини

$$\Gamma = \left\{ f \in X^* : \sum_n |f(x_n)| < \infty \right\};$$

$$\Gamma_0 = \{ x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in \Gamma \};$$

$$Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : 0 \le \lambda_i \le 1, k = 1,2,... \right\};$$

$$P\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_p} : i_1 < i_2 < ... < i_p; p \in N \right\};$$

$[M]$ - замикання M, тобто множина M зі всіма своїми граничними точками.

Лема 2. *Нехай* $\sum_n x_n$ *- ряд в просторі Банаха* X *такий, що* $\lim_n x_n = 0$ *і* $МЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, *тоді множина* $\left[Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$ *с кожним своїм елементом* x *містить і* $x + \Gamma_0$.

Доведення. Нехай $f \in X^* \setminus \Gamma$, тоді ряд $\sum_n |f(x_n)|$ розбігається. Оскільки $МЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, то знайдемо $y \in X$ і переставлення π, для яких $\sum_n {}_{Ч} x_{\pi(n)} = y$. Користуючись лінійністю та неперервністю функціоналу f, будемо мати

$$f(y) = f\left(\sum_n {}_{Ч} x_{\pi(n)}\right) = f\left(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)}\right) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} f\left(x_{\pi(i)}\right) = \sum_n {}_{Ч} f\left(x_{\pi(n)}\right)$$

Таким чином для числового ряду $\sum_n f(x_n)$ маємо

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty; \quad МЧС\left(\sum_n f(x_n)\right) \neq \varnothing; \quad \lim_n f(x_n) = 0,$$

тому за лемою 1 розбігаються ряди, утворені як з додатних так і з від'ємних членів ряду $\sum_n f(x_n)$. Таким чином

$$\sup\left\{ f(y) : y \in P\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\} = +\infty,$$

оскільки $P\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то

$$\sup\left\{ f(y) : y \in Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\} = +\infty. \qquad (1)$$

Лему будемо доводити від супротивного. Нехай існують такі $x \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$ і $z \in \Gamma_0$, що $x + z \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. Тоді за теоремою Хана – Банаха існує функціонал $f \in X^*$, який відокремлює $x + z$ від опуклої замкненої множини $\left[Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$, тобто

$$sup\left\{ f(y) : y \in Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\} < f(x+z). \qquad (2)$$

У тому випадку, коли $f \in \Gamma$ (оскільки $z \in \Gamma_0$, то $f(z) = 0$) $f(x+z) = f(x)$, звідки маємо суперечність з (2), тому що $x \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. У випадку, коли $f \in X^* \setminus \Gamma$, співвідношення (1) і (2) не можуть виконуватися водночас. Отримані в обох випадках суперечності доводять лему.

Зауваження 1. Аналогічно можна довести, що для будь-якого ряду $\sum_n x_n$ у просторі Банаха X такого, що $\lim_n x_n = 0$ і $МЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, для якого завгодно $x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \in \left[Q\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}\right]$ виконано $x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i + \Gamma_0 \subset \left[Q\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}\right]$.

Наведемо деякі відомі теореми і леми.

Теорема 2 (Штейниць) [5]. Якщо ряд $\sum_n x_n$ у скінченновимірному просторі умовно збігається і $\sum_n x_n = s$, то

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = s + \Gamma_0 .$$

Будемо говорити, що ряд $\sum_n x_n$ в $L_p[0,1]$ r*-абсолютно збігається,* якщо збігається ряд $\sum_n \|x_n\|^r$, де $r = min\{2, p\}$.

Теорема 3 (аналог теореми Штейниця) [2]. Якщо ряд $\sum_n x_n$ у просторі $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ умовно збігається і r-абсолютно збігається, $\sum_n x_n = s$, то

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = s + \Gamma_0 .$$

Теорема 4 [4]. Для того, щоб x належав $МГТ\left(\sum_n x_n\right)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ і якої завгодно скінченної множини індексів U існувала скінченна множина індексів V, для якої

$$\left\| \sum_{i \in V} x_i - x \right\| < \varepsilon .$$

Лема 3 [2]. Якщо на члени ряду $\sum_v x_n$ у скінченновимірному просторі накласти обмеження $\lim_n x_n = 0$, а в просторі $L_p[0,1]$ - обмеження r-абсолютної збіжності, тоді

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = МГТ\left(\sum_n x_n\right).$$

Лема 4 (про округлення коефіцієнтів) [2]. Якщо $\{x_i\}_{i=1}^m$ підмножина скінченновимірного простору Банаха X, коефіцієнти $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset [0,1]$, тоді існують округлені коефіцієнти $\{\theta_i\}_{i=1}^m \subseteq \{0,1\}$ такі, що

$$\max_{k \le m} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \right\| \le \dim X \max_{i \le m} \|x_i\|$$

Лема 4 (про округлення коефіцієнтів в $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$) [2]. Якщо $\{x_i\}_{i=1}^m$ підмножина простору $L_p[0,1]$, коефіцієнти $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset [0,1]$, тоді існують округлені коефіцієнти $\{\theta_i\}_{i=1}^m \subseteq \{0,1\}$ такі, що

$$\max_{k \le m} \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \right\| \le C_p \left[\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^r \right]^{1/r},$$

де $r = min\{2, p\}$, C_p залежить тільки від p.

На основі попередніх лем і теорем доведемо твердження.

Твердження 2. Якщо на члени ряду $\sum_v x_n$ у скінченновимірному просторі накласти обмеження $\lim_n x_n = 0$, а в просторі $L_p[0,1]$ - обмеження r-абсолютної збіжності, то у випадку, коли $МЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, то і $МС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, при цьому існує такий x_0 з відповідного простору, що виконуються рівності

$$МЧС\left(\sum_n x_n\right) = МГТ\left(\sum_n x_n\right) = МС\left(\sum_n x_n\right) = x_0 + \Gamma_0$$

Доведення. Оскільки $МЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \varnothing$, то існують таке x_0 з відповідного простору і таке переставлення π, що $\sum_n{}_{ч} x_{\pi(n)} = x_0$. Тоді для лінійного неперервного функціоналу f виконано

$$f(x_0) = \sum_n{}_{ч} f\left(x_{\pi(n)}\right).$$

Нехай $x \in МЧС\left(\sum_n x_n\right)$, $f \in \Gamma$. Знайдемо переставлення σ, для якого $\sum_n{}_{ч} x_{\sigma(n)} = x$. Тоді $f(x) = \sum_n{}_{ч} f\left(x_{\sigma(n)}\right)$. Оскільки $f \in \Gamma$, то ряд $\sum_n f\left(x_{\sigma(n)}\right)$ збігається абсолютно, тому

$$f(x) = \sum_n{}_{ч} f\left(x_{\sigma(n)}\right) = \sum_n f\left(x_{\sigma(n)}\right) = \sum_n f\left(x_{\pi(n)}\right) = \sum_n{}_{ч} f\left(x_{\pi(n)}\right) = f(x_0).$$

Тобто $f(x - x_0) = 0$. Таким чином, $f \in \Gamma$, тому $x - x_0 \in \Gamma_0$, або $x \in x_0 + \Gamma_0$. Нами доведено включення

$$МЧС\left(\sum_n x_n\right) \subseteq x_0 + \Gamma_0. \tag{3}$$

Припустимо тепер, що $x \in x_0 + \Gamma_0$. Нехай $x'_n = x_{\pi(n)}$. Доведемо, що

$$x_0 - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i \in \left[Q\{x'_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}\right]. \tag{4}$$

Тоді можна буде використати зауваження 1 і здобути належність

$$x \in x_0 - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i + \Gamma_0 \subset \left[Q\{x'_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}\right]. \tag{5}$$

Належність (4) виходить з ланцюжка нерівностей

$$x_0 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)} = \lim_n \left(x'_1 + \frac{n-1}{n} x'_2 + \ldots + \frac{n-n_0+1}{n} x'_{n_0} \right) +$$

$$+ \lim_n \left(\frac{n-n_0}{n} x'_{n_0+1} + \frac{n-n_0-1}{n} x'_{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n} x'_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} x'_i + \lim_n \frac{n-n_0}{n} \lim_n \left(x'_{n_0+1} + \ldots + \frac{n-n_0-1}{n-n_0} x'_{n_0+2} + \frac{n-n_0-2}{n-n_0} x'_{n_0+3} + \ldots + \frac{1}{n-n_0} x'_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} x_i' + \lim_n \sum_{i=0}^{n-n_0-1} \lambda_i x'_{n_0+i+1},$$

де $\lambda_i = \dfrac{n-n_0-i}{n-n_0} \in [0,1] \quad (0 \le i \le n-n_0-1)$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Номер n_0 виберемо у випадку скінченновимірного простору X таким, щоб

$$\|x_n'\| < \frac{\varepsilon}{2 \dim X} \text{ для будь-якого } n > n_0, \tag{6}$$

у випадку простору $L_p[0,1] \ (1 < p < \infty)$ -

$$\left[\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|x_i'\|^r \right]^{1/r} < \frac{\varepsilon}{2C_p}. \tag{7}$$

З співвідношення (5) і визначення множини $\left[Q\{x_n'\}_{n=n_0+1}^{\infty}\right]$ випливає, що існують число N і коефіцієнти $\{\lambda_i\}_{i=n_0+1}^{N} \subset [0,1]$, для яких

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i' - \sum_{i=n_0+1}^{N} \lambda_i x_i' \right\| < \varepsilon/2. \tag{8}$$

Зрозуміло, що в різних просторах ці коефіцієнти будуть різними, але для спрощення розгляду тут і далі для інших коефіцієнтів не будемо їх відрізняти.

Застосовуючи леми 3 і 4 про округлення коефіцієнтів і нерівності (6) і (7), знайдемо коефіцієнти $\{\theta_i\}_{i=n_0+1}^{N} \subseteq \{0,1\}$ такі, що в скінченновимірному просторі

$$\left\| \sum_{i=n_0+1}^{N} \lambda_i x_i' - \sum_{i=n_0+1}^{N} \theta_i x_i' \right\| \le \dim X \max_{n_0 < i \le N} \|x_i'\| < \varepsilon/2, \tag{9}$$

у просторі $L_p[0,1]$

$$\left\| \sum_{i=n_0+1}^{N} \lambda_i x_i' - \sum_{i=n_0+1}^{N} \theta_i x_i' \right\| \le C_p \left[\sum_{i=n_0+1}^{N} \|x_i'\|^r \right]^{1/r} \le C_p \left[\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|x_i'\|^r \right]^{1/r} < \varepsilon/2. \tag{10}$$

Збираючи нерівності (8) з (9) або (10), за допомогою нерівності трикутника, будемо мати

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i' - \sum_{i=n_0+1}^{N} \theta_i x_i' \right\| < \varepsilon.$$

Для використання теореми 4 позначимо через U'_{n_0} і V множини

$$U'_{n_0} = \{1,2,\ldots,n_0\},$$

$$V = U'_{n_o} \cup \{i \in \{n_0+1,\ldots,N\} : \theta_i = 1\}.$$

Оскільки будь-яку скінченну множину індексів U можна включити у деяку множину U'_{n_0}, то можна вважати без обмеження міркувань, що тією наперед заданою скінченною множиною U, що міститься у твердженні теореми 4, є множина U'_{n_0}. Множина U'_{n_0} міститься в V і виконується нерівність

$$\left\| x - \sum_{i \in V} x_i' \right\| < \varepsilon .$$

Таким чином, за теоремою 4

$$x \in МГТ\left(\sum_n x_n' \right) = МГТ\left(\sum_n x_n \right). \tag{11}$$

З леми 3, теорем 2 і 3 витікає, що

$$МГТ\left(\sum_n x_n \right) = МС\left(\sum_n x_n \right) = x + \Gamma_0 . \tag{12}$$

Тобто ми довели, що множина сум непорожня.

З припущення, що $x \in x_0 + \Gamma_0$, маємо існування такого $y \in \Gamma_0$, що $x = x_0 + y$, а тоді разом з (11) і (12) одержимо

$$МЧС\left(\sum_n x_n \right) \supseteq МС\left(\sum_n x_n \right) = x + \Gamma_0 = x_0 + y + \Gamma_0 = x_0 + \Gamma_0 . \tag{13}$$

Поєднуючи (3), (12) і (13) одержимо потрібну рівність

$$МЧС\left(\sum_n x_n \right) = МГТ\left(\sum_n x_n \right) = МС\left(\sum_n x_n \right) = x_0 + \Gamma_0 .$$

Залишається поки що відкритим питання про структуру Чезарівської множини сум ряду в скінченновимірному просторі зі спільним членом, не прямуючим до нуля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. – М.,: изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
2. Кадец В.М., Кадец М.И. Перестановки рядов в пространствах Банаха. – Тарту: ТГУ, 1988.- 196 с.
3. Begemihl F., Erdos P. Rearrangements of C-summable series //Acta Math. – 1954 - 92. P.35-53.
4. Hadwiger H. Uber das umordnungsproblem in Hilbertschen Raum //Math. Zeitschrift. – 1940. – 46. S. 70-79.
5. Steinitz E. Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme //J. reine und Angew. Math. – 143. P.128-175; - 144. P.1-49; 1916 – 146. P.68-111.