

УДК 539.3

ПРО ОДИН АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН, ПАРАМЕТРИ ЯКИХ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЧАСУ

Грищак В.З., Кабак В.М.

Розглянемо випадок шарнірно обпертої пластинки з краями, що вільно зміщуються в площині опорного контуру. Позначимо через a і b сторони пластинки, а товщину - $h = h_0 h^*(\tau)$. Модуль пружності матеріалу пластинки представимо у вигляді $E = E_0 E^*(\tau)$, притому вагу позначимо як δ . Припустимо, що пластинка стискається уздовж однієї з сторін статичними зусиллями p , що прикладаються до граней пластинки. При цьому будемо вважати ці зусилля позитивними у випадку розтягання, а негативними при стиску. Також приймемо, що як вимушуюча сила $q(\tau)$ на пластинку діє рівномірно розподілене поперечне навантаження, яке залежить від часу. При розгляді будемо враховувати початкові неправильності у формі серединної поверхні.

Ця задача за допомогою методу Бубнова - Гальоркіна збігається до ро'звязку неоднорідного нелінійного рівняння другого порядку виду:

$$f''(\tau) + \omega^2(\tau)f(\tau) + \alpha(P(\tau)f^2(\tau) + Q(\tau)f^3(\tau)) = \gamma(\tau), \quad (1)$$

де

$$\omega^2(\tau) = \omega_0^2 \varphi(\tau),$$

тут

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 m^4 \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2}{12 \lambda^2 (1 - \mu^2)} \left(\frac{v h_0}{ab} \right)^2, \quad (2)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2} E^*(\tau) h^*(\tau)^2 - \frac{p^*}{p_0^*} + \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu^2) \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^4 \right] F_0^2}{\left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2} \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2} E^*(\tau),$$

$v = \sqrt{\frac{E_0 g}{\delta}}$ – швидкість поширення повздовжніх хвиль у матеріалі пластинки,

$$\alpha = \frac{h_0}{a}, \quad Q(\tau) = \frac{\pi^4 m^4 E^*(\tau)}{16 \lambda^2} \left[1 + \frac{n^4}{m^4} \lambda^4 \right] \frac{a}{h_0}, \quad P(\tau) = 3 F_0 Q(\tau),$$

$$p^* = p \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2}, \quad p_0^* = \frac{\pi^2 m^2 \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2}{12 \lambda^2 (1 - \mu^2)},$$

$$\gamma(\tau) = \frac{16ab\omega_0^2}{mn\pi^2 v^2 h(\tau)h_0} \bar{q}^*(\tau) + \frac{\omega_0^2 p^*}{p_0^*} F_0.$$

Розв'язок рівняння (1) визначаємо за допомогою методу подвійного асимптотичного розкладу [1]. Проблема вільних коливань систем із змінними параметрами розглянута в роботі [2]. Розв'язок нелінійного неоднорідного рівняння другого порядку (1) одержуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} f(\tau) = & \frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[K - \frac{\gamma_2}{\omega_0} \right] + \frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[L + \frac{\gamma_1}{\omega_0} \right] + \alpha \left\{ \frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \times \right. \\ & \times \left[\frac{K^2}{\omega_0} P_{112} + \frac{2KL}{\omega_0} P_{122} + \frac{L^2}{\omega_0} P_{222} + \frac{K^3}{\omega_0} P_{1112} + \frac{3K^2 L}{\omega_0} P_{1122} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3KL^2}{\omega_0} P_{1222} + \frac{L^3}{\omega_0} P_{2222} \right] - \frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{K^2}{\omega_0} P_{111} + \frac{2KL}{\omega_0} P_{211} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{L^2}{\omega_0} P_{221} + \frac{K^3}{\omega_0} P_{1111} + \frac{3K^2 L}{\omega_0} P_{2111} + \frac{3KL^2}{\omega_0} P_{2211} + \frac{L^3}{\omega_0} P_{2221} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\tau) &= \cos \left(\int_0^\tau \omega_0 \varphi(z)^{\frac{1}{2}} dz \right), & G_2(\tau) &= \sin \left(\int_0^\tau \omega_0 \varphi(z)^{\frac{1}{2}} dz \right), \\ \gamma_1(\tau) &= \int_0^\tau \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)^{\frac{1}{4}}} G_1(z) dz, & \gamma_2(\tau) &= \int_0^\tau \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)^{\frac{1}{4}}} G_2(z) dz, \\ P_{112} = P_{211} &= \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1^2(z) G_2(z) dz, & P_{122} = P_{221} &= \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1(z) G_2^2(z) dz, \\ P_{222} &= \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_2^3(z) dz, & P_{111} &= \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1^3(z) dz, \\ P_{1112} = P_{2111} &= \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^3(z) G_2(z) dz, & P_{1122} = P_{2211} &= \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^2(z) G_2^2(z) dz, \\ P_{1222} = P_{2221} &= \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1(z) G_2^3(z) dz, & P_{2222} &= \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_2^4(z) dz, \\ P_{1111} &= \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^4(z) dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Отриманий нами розв'язок припускає існування коливань пластинки з періодом коливань $2\pi/\omega(t)$. У дійсності, для нелінійної системи період повинен істотно залежати від ступеня нелінійності системи. Тому, для того щоб наближений аналітичний розв'язок (3) описував реальну поведінку пластинки, необхідно визначити, як впливають коефіцієнти при нелінійних складових на частоту коливань пластинки. Щоб розв'язати цю задачу, застосуємо методику Ліндштедта - Пуанкаре [3].

Розглядаючи квазістатичну задачу, запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{df^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi f + \alpha P f^2 + \alpha Q f^3 = \alpha \gamma_1, \quad (5)$$

де

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (6)$$

Відповідно до методики Ліндштеда-Пуанкаре перетворимо незалежну перемінну в рівнянні (5) :

$$s = \omega \tau. \quad (7)$$

Тоді рівняння (5) прийме вид:

$$\omega^2 \frac{df^2}{ds^2} + \omega_0^2 \phi f + \alpha (Pf^2 + Qf^3) = \alpha \gamma_1. \quad (8)$$

Представимо ω і f у виді рядів по степенях α :

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2 + \dots, \\ \omega &= \omega_0 \sqrt{\phi} + \alpha \omega_1 + \alpha^2 \omega_2 + \dots. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи розкладання (9) у рівняння (8) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра α , одержимо систему рівнянь для визначення невідомих функцій $f_0, f_1, f_2, \omega_1, \omega_2$:

$$\omega_0^2 \phi f_0'' + \omega_0^2 \phi f_0 = 0,$$

$$\alpha^1 : \quad \omega_0^2 \phi f_1'' + \omega_0^2 \phi f_1 = -2\omega_0 \sqrt{\phi} \omega_1 f_0'' - Pf_0^2 - Qf_0^3 + \gamma_1, \quad (10)$$

$$\alpha^2 : \quad \omega_0^2 \phi f_2'' + \omega_0^2 \phi f_2 = -2\omega_0 \sqrt{\phi} \omega_2 f_0'' - 2\omega_0 \sqrt{\phi} \omega_1 f_1'' - 2Pf_0 f_1 - 3Qf_0^2 f_1 - \omega_1^2 f_0''.$$

Загальний розв'язок першого рівняння системи (10) може бути поданий у вигляді:

$$f_0 = a \cos(s + \psi), \quad (11)$$

де a і ψ - довільні постійні.

Тоді друге рівняння системи (10) прийме вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 \phi f_1'' + \omega_0^2 \phi f_1 &= \left(2\omega_0 \sqrt{\phi} \omega_1 - \frac{3}{4} Qa^2 \right) a \cos(s + \psi) - \\ &- \frac{Pa^2}{2} - \frac{Pa^2}{2} \cos 2(s + \psi) - \frac{Qa^3}{4} \cos 3(s + \psi) + \gamma_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Щоб уникнути секулярних членів, ω_1 вибираємо таким чином:

$$\omega_1 = \frac{3}{8} \frac{Qa^2}{\omega_0 \sqrt{\phi}}. \quad (13)$$

При цьому f_1 буде мати вид:

$$f_1 = -\frac{Pa^2}{2\omega_0^2 \phi} + \frac{\gamma_1}{\omega_0^2 \phi} + \frac{Pa^2}{6\omega_0^2 \phi} \cos 2(s + \psi) + \frac{Qa^3}{32\omega_0^2 \phi} \cos 3(s + \psi). \quad (14)$$

Підставимо f_0 й f_1 у третє рівняння системи (10). З умови відсутності секулярних членів одержуємо ω_2 у вигляді:

$$\omega_2 = -\frac{5}{12} \frac{P^2 a^2}{\omega_0^3 \phi \sqrt{\phi}} + \frac{P \gamma_1}{\omega_0^3 \phi \sqrt{\phi}} + \frac{3}{256} \frac{Q^2 a^4}{\omega_0^3 \phi \sqrt{\phi}}. \quad (15)$$

Вираз для визначення частоти нелінійних коливань пластинки запишеться у формі:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\varphi} + \alpha \frac{3}{8} \frac{Qa^2}{\omega_0 \sqrt{\varphi}} + \frac{\alpha^2}{\omega_0^3 \varphi \sqrt{\varphi}} \left(-\frac{5}{12} P^2 a^2 + P\gamma_1 + \frac{3}{256} Q^2 a^4 \right). \quad (16)$$

Тоді

$$\omega^2 = \omega_0^2 \varphi_{NL}, \quad (17)$$

де

$$\varphi_{NL} = \varphi + \alpha \frac{3}{4} \frac{Qa^2}{\omega_0} + \frac{\alpha^2}{\omega_0^4 \varphi} \left(-\frac{5}{6} P^2 a^2 + 2P\gamma_1 + \frac{21}{128} Q^2 a^4 \right). \quad (18)$$

Підставляючи φ_{NL} замість φ у вираз (3) одержимо уточнений наближений аналітичний розв'язок рівняння (1).

Будемо розглядати пластинку з розмірами: $a = 100 \text{ cm}$, $b = 100 \text{ cm}$, $h_0 = 0,5 \text{ cm}$, початковий прогин $w_0 = 0,5 \text{ cm}$. Матеріал пластинки - сталь із фізико-механічними характеристиками: модуль пружності $E_0 = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/cm}^2$, питома вага $\delta = 7,8 \text{ kg/cm}^3$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$.

Статичне зусилля приймемо $p = 50 \text{ kg}$. Будемо вважати, що як вимушуюча сила на пластинку діє рівномірно розподілене поперечне навантаження $q(t) = 0,002 + 0,0003t \text{ kg} \cdot \text{sek/cm}^2$, а в безрозмірному вигляді $\bar{q}(\tau) = 2,47 + 0,39\tau$

На рис. 1 - 3 подані результати, здобуті за допомогою уточненого асимптотичного підходу і результати, отримані за допомогою методу Рунге-Кутта.

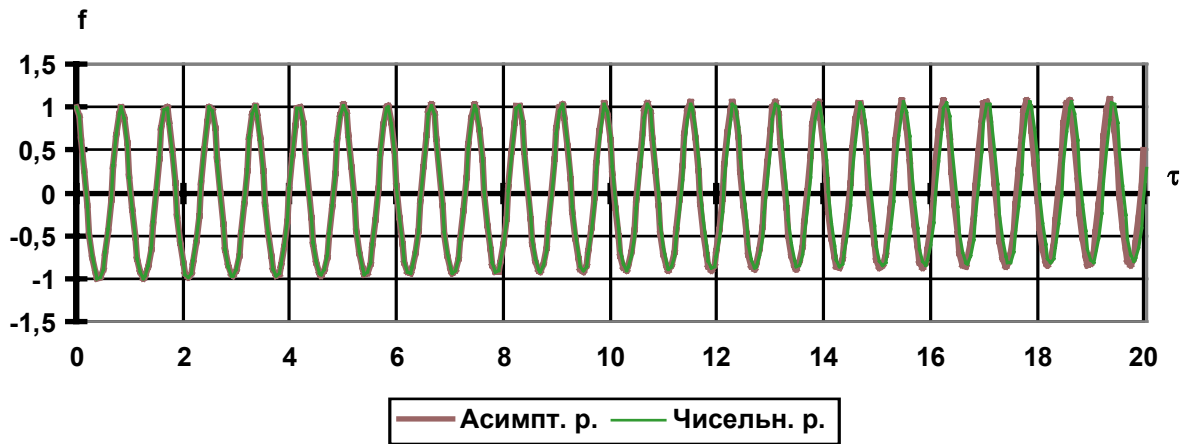


Рис.1 Амплітуда коливань пластинки за часом при $E(\tau) = E_0$ і $h(\tau) = h_0$

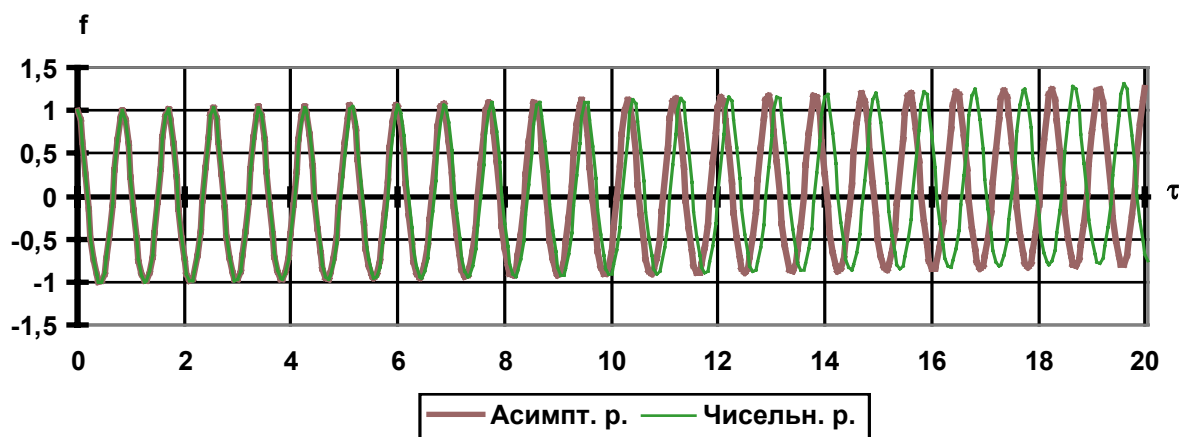


Рис.2 Амплітуда коливань пластинки за часом при $E(\tau) = E_0(1 - 0,0195\tau)$ і $h(\tau) = h_0$

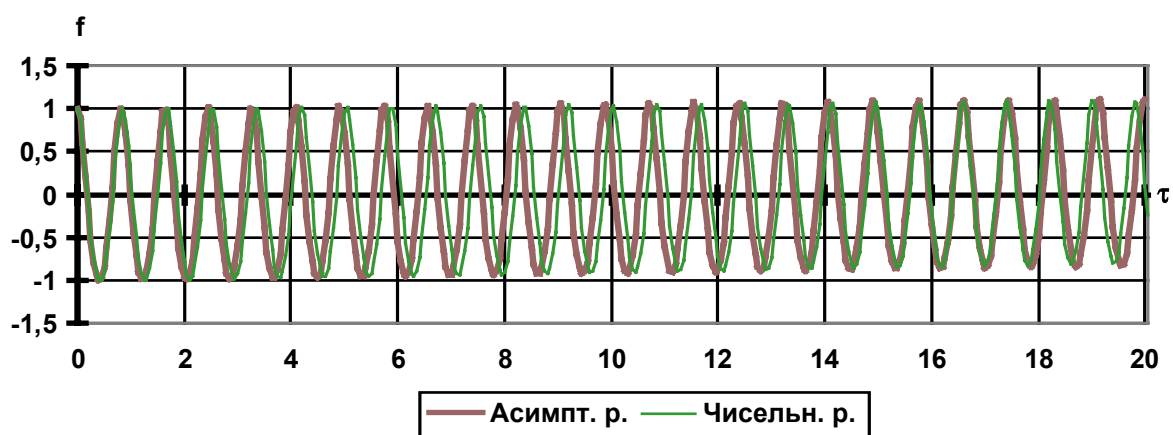


Рис.3 Амплітуда коливань пластинки за часом при $E(\tau) = E_0$ і $h(\tau) = h_0(1 - 0,004\tau)$

На рис. 4,5 подані результати, отримані за допомогою асимптотичного підходу при нелінійних ($\alpha = 0,005$) і лінійних ($\alpha = 0,0$) коливаннях пластинки.

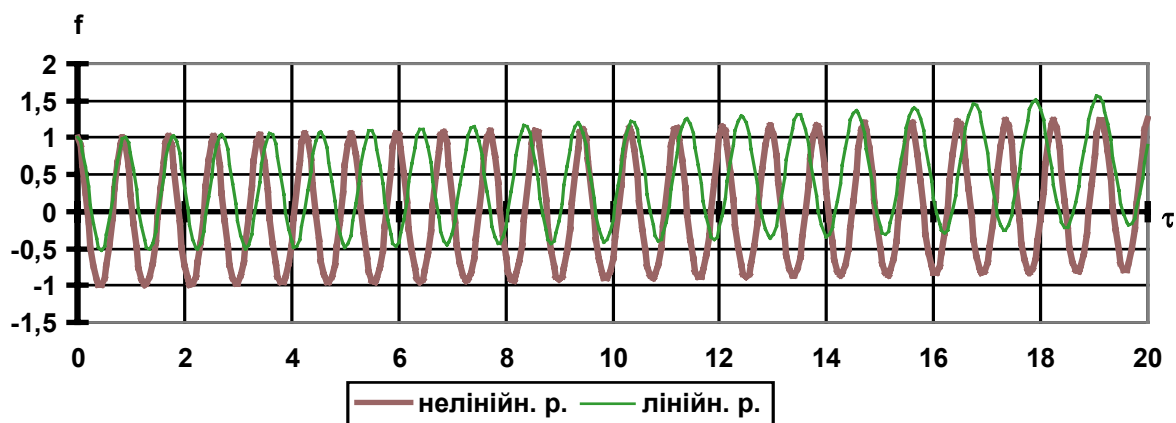


Рис.4 Амплітуда коливань пластинки за часом при $E(\tau) = E_0(1 - 0,0195\tau)$ і $h(\tau) = h_0$

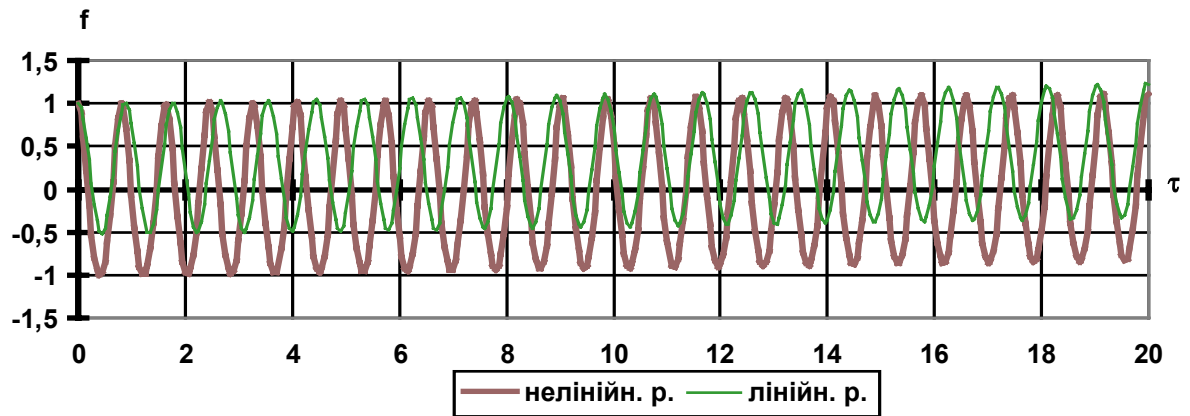


Рис.5 Амплітуда коливань пластинки за часом при $E(\tau) = E_0$ і $h(\tau) = h_0(1 - 0,004\tau)$

ЛІТЕРАТУРА

1. Gristchak V.Z., Kabak V.N. Doudle Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. - 1996. - № 4. - P. 285 - 296.
2. Gristchak V.Z., Golovan O.A. Asymptotic Solution for Nonlinear Dynamic of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. - 1995. - № 3. - P. 183 - 190.
3. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. - М: Мир, 1976. - 456 с.