

УДК 517:539.3

НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ СТИСНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПЕРІОДИЧНИМИ ТА ЛОКАЛІЗОВАНИМИ ДЕФЕКТАМИ ТОВЩИНИ

Грищак В.З., Головань О.О.

Питання про вплив дефектів товщини, періодично змінюваних уздовж осьової координати, на розмір критичних зусиль у стиснутій круговій циліндричній оболонці найбільш повно обговорювався в роботі [1]. З позицій лінійної теорії оболонок показано, що в ряді випадків геометричних та жорсткісних параметрів оболонки можливо зниження параметра критичних зусиль у залежності від амплітуди змінення товщини, хоча й в меншій мірі, ніж у залежності від недосконалостей геометричної форми.

У роботах [2,3] показано, що локалізовані недосконалості геометричної форми оболонки рівнонебезпечні, як і недосконалості періодичного типу.

Теоретичний та практичний інтерес має дослідження впливу періодичного та локалізованого змінення товщини оболонки на її стійкість із позицій геометрично нелінійного підходу з метою одержання наближеного аналітико-чисельного розв'язку задачі та вивчення поведінки досліджуваної системи у випадку наявності локалізованих дефектів товщини.

Розглядається кругова циліндрична оболонка радіуса R , довжини L та змінної товщини h . Надалі будемо припускати, що довжина оболонки досить велика і тому $\frac{L}{R} \gg 1$. Оболонка знаходиться під дією осьового стискального навантаження P_0 .

У геометрично нелінійній постановці розв'язувальна система диференціальних рівнянь задачі прийме вид [4]:

$$\begin{aligned}
 H^2(\xi) & \left(\frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 F^*}{\partial \eta^4} \right) + 2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - \\
 & - H(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - 2H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left(\frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi^3} - \nu \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - \\
 & - 2(1+\nu)H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi \partial \eta^2} = \frac{12(1-\nu^2)L^2}{Rh_0} H^3(\xi) \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \\
 & + 12(1-\nu^2)H^3(\xi) \left(\left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right), \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^3(\xi) & \left(\frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W^*}{\partial \eta^4} \right) + \frac{L^2}{Rh_0} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} + \\
 & + 3H^2(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left(\frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + 3H^2(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left(\frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi^3} + \nu \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + \\
 & + 6H(\xi) \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right) + 3H^2(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3(1-\nu)H^2(\xi)\frac{dH}{d\xi}\frac{\partial^3 W^*}{\partial\xi\partial\eta^2}+\frac{P_0L^2}{D}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\xi^2}= \\
& =\frac{\partial^2 W^*}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2 W^*}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 W^*}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\xi^2},
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\xi = \frac{x}{L}$, $\eta = \frac{y}{L}$ - безрозмірні координати в осьовому та круговому напрямках відповідно,

$H(\xi) = \frac{h(x)}{h_0}$ - товщина оболонки, $W^*(\xi, \eta) = \frac{W(x, y)}{h_0}$ - нормальне переміщення, $F^*(\xi, \eta) = \frac{\Phi(x, y)}{D}$

- функція напруги, h_0 - номінальна товщина оболонки, E - модуль пружності, ν - коефіцієнт

Пуассона, $D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість.

Перший член у правій частині рівняння (1) містить безрозмірний параметр $\frac{L}{h_0}$. Оскільки ми

припускаємо, що циліндрична оболонка, що розглядається, має велику довжину, то $\frac{L}{h_0} \gg 1$.

Позначивши

$$\alpha = \frac{h_0}{L}, \tag{3}$$

де $\alpha \ll 1$ - малий параметр у порівнянні з одиницею, будемо шукати розв'язок системи (1)-(2), представивши функції напруги і нормального переміщення у вигляді асимптотичних розкладань у ряд за параметром α :

$$F^*(\xi, \eta) = \alpha^{-1}F_0(\xi, \eta) + F_1(\xi, \eta) + \dots \tag{4}$$

$$W^*(\xi, \eta) = W_0(\xi, \eta) + \alpha W_1(\xi, \eta) + \dots \tag{5}$$

Обмежимося в розкладаннях (4) - (5) тільки двома першими членами розкладання та підставимо їх у рівняння (1). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра α , одержуємо систему з двох рівнянь, причому перше з них є лінійним, а друге містить нелінійні члени з $W_0(\xi, \eta)$:

α^0 :

$$\begin{aligned}
& H^2(\xi)\left(\frac{\partial^4 F_0}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4 F_0}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{\partial^4 F_0}{\partial\eta^4}\right)+2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial\xi^2}-\nu\frac{\partial^2 F_0}{\partial\eta^2}\right)- \\
& -H(\xi)\frac{d^2 H}{d\xi^2}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial\xi^2}-\nu\frac{\partial^2 F_0}{\partial\eta^2}\right)-2H(\xi)\frac{dH}{d\xi}\left(\frac{\partial^3 F_0}{\partial\xi^3}-\nu\frac{\partial^3 F_0}{\partial\xi\partial\eta^2}\right)- \\
& -2(1+\nu)H(\xi)\frac{dH}{d\xi}\frac{\partial^3 F_0}{\partial\xi\partial\eta^2}=\frac{12(1-\nu^2)L}{R}H^3(\xi)\frac{\partial^2 W_0}{\partial\xi^2},
\end{aligned} \tag{6}$$

α^1 :

$$H^2(\xi)\left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4 F_1}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{\partial^4 F_1}{\partial\eta^4}\right)+2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\xi^2}-\nu\frac{\partial^2 F_1}{\partial\eta^2}\right)-$$

$$\begin{aligned}
& -H(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2} \right) - 2H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi^3} - \nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - \\
& -2(1+\nu)H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial^3 F_1}{\partial \xi \partial \eta^2} = \frac{12(1-\nu^2)L}{R} H^3(\xi) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \\
& +12(1-\nu^2)H^3(\xi) \left(\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \right). \quad (7)
\end{aligned}$$

Використовуючи метод розділу змінних, будемо шукати розв'язок рівнянь (6) - (7) у такій формі:

$$F_0(\xi, \eta) = f(\xi) \cos(N\eta), \quad W_0(\xi, \eta) = w_0(\xi) \cos(N\eta), \quad (8)$$

$$F_1(\xi, \eta) = \hat{f}(\xi) \cos(\hat{N}\eta), \quad W_1(\xi, \eta) = w_1(\xi) \cos(\hat{N}\eta), \quad (9)$$

$$\text{де } N = \frac{nL}{R}, \quad n - \text{число хвиль у круговому напрямку}, \quad (10)$$

$$\hat{N} = 2N \quad (11)$$

Підставивши співвідношення (8) - (9) у рівняння (6) - (7) відповідно, потім застосувавши метод Бубнова-Гальоркіна й інтегруючи в межах перетворення змінної $\eta \in \left[0; \frac{2\pi R}{L}\right]$, одержуємо звичайні диференціальні рівняння вигляду:

$$\begin{aligned}
& H^2 f^{(4)} - 2H \frac{dH}{d\xi} f''' + \left[-2N^2 H^2 + 2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 - H \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right] \cdot f'' + \\
& + 2N^2 H \frac{dH}{d\xi} f' + \left[N^4 H^2 + 2\nu N^2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 - \nu N^2 H \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right] \cdot f = \\
& = 4c^2 z^2 \alpha H^3 w_0'', \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H^2 \hat{f}^{(4)} - 2H \frac{dH}{d\xi} \hat{f}''' + \left[-2\hat{N}^2 H^2 + 2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 - H \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right] \cdot \hat{f}'' + \\
& + 2\hat{N}^2 H \frac{dH}{d\xi} \hat{f}' + \left[\hat{N}^4 H^2 + 2\nu \hat{N}^2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 - \nu \hat{N}^2 H \frac{d^2 H}{d\xi^2} \right] \cdot \hat{f} = \\
& = 4c^2 z^2 \alpha H^3 w_1'' + 4c^2 N^2 H^3 \left(-\frac{1}{2} (w_0')^2 + \frac{1}{2} w_0 w_0'' \right), \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\text{де } c = \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad z = \frac{L}{\sqrt{Rh_0}}. \quad (14)$$

Будемо припускати, що товщина оболонки змінюється уздовж осової координати за законом:

$$H(\xi) = 1 - \varepsilon \cos(2m\xi) \exp\left(-\frac{\mu^2}{2} \xi^2\right), \quad (15)$$

де $m = \frac{pL}{R}$, p - число півхвиль в осьовому напрямку, ε - показник зміни амплітуди товщини оболонки, μ^2 - параметр, що впливає на характер локалізації.

Відповідно до [2] та (15) представимо функції $w_0(\xi)$ й $w_1(\xi)$ у такому виді:

$$w_0(\xi) = [A \cos(m\xi) + B \cos(3m\xi)] \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{2} \xi^2\right), \quad (16)$$

$$w_1(\xi) = [C \cos(\bar{m}\xi) + D \cos(3\bar{m}\xi)] \cdot \exp(-\mu^2 \xi^2), \quad (17)$$

де $\bar{m} = 2m$, A, B, C, D - деякі довільні постійні.

Як і в лінійному випадку [5], функції $f(\xi)$ і $\hat{f}(\xi)$ будуть знайдені у вигляді асимптотичних розкладань за малими параметрами ε і $\beta^2 = \frac{\mu^2}{m^2}$:

$$f(\xi) = [\mathcal{F}_0(\xi) + \beta^2 \mathcal{F}_1(\xi)] \exp\left(-\frac{\mu^2}{2} \xi^2\right) + \varepsilon \varphi_1(\xi) \exp(-\mu^2 \xi^2), \quad (18)$$

$$\hat{f}(\xi) = [\hat{\mathcal{F}}_0(\xi) + \beta^2 \hat{\mathcal{F}}_1(\xi)] \exp(-\mu^2 \xi^2) + \varepsilon \hat{\varphi}_1(\xi) \exp\left(-\frac{3}{2} \mu^2 \xi^2\right). \quad (19)$$

У наданих вище виразах ми зневажаємо членами порядку ε^2 , $(\beta^2)^2$, $\varepsilon \cdot \beta^2$ і більш високих порядків. Підставляючи співвідношення (15), (16) - (17), (18) - (19) та їхні похідні у диференціальні рівняння (12) - (13), прирівнюючи коефіцієнти при параметрах ε^0 , β^2 і ε^1 , одержуємо систему диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами для визначення невідомих функцій $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi_1$ і $\hat{\mathcal{F}}_0, \hat{\mathcal{F}}_1, \hat{\varphi}_1$. Для випадку, коли форма вигину має однакові хвильові числа n та p [1,3], тобто

$$p = n = \frac{p_0}{2}, \quad p_0 = \sqrt{2c \frac{R}{h_0}} - \text{ціле}, \quad (20)$$

розв'язки системи будуть мати вигляд:

$$\mathcal{F}_0 = A \cdot \left(-\frac{c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(m\xi) + B \cdot \left(-\frac{0.36 c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(3m\xi), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = A \cdot \left(\frac{c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(m\xi) + B \cdot \left(-\frac{0.0688 c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(3m\xi) + \\ + B \cdot \left(-\frac{0.192 c^2 z^2 \alpha}{m}\right) \xi \sin(3m\xi), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = A \cdot \left(-\frac{0.5 \nu c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(m\xi) + B \cdot \left(\frac{0.72 c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.18 \nu c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(m\xi) + \\ + A \cdot \left(\frac{0.08 c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.02 \nu c^2 z^2 \alpha}{m^2}\right) \cos(3m\xi) + \end{aligned}$$

$$+ B \cdot \left(\frac{0.06816568 c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.0010650887 \nu c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(5m\xi), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 = & -0.125 c^2 (A^2 + 9B^2) - 0.25 \left(\frac{c^2 z^2 \alpha C + c^2 m^2 AB}{m^2} \right) \cos(2m\xi) - \\ & - 0.01 c^2 AB \cos(4m\xi) - \left(\frac{0.09 c^2 z^2 \alpha D}{m^2} \right) \cos(6m\xi), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 = & (0.0625 c^2 A^2 + 1.0625 c^2 B^2) - 0.5 m c^2 AB \xi \sin(2m\xi) - \\ & - (0.015625 c^2 A^2 + 0.28125 c^2 AB) \cos(2m\xi) - \\ & - 0.0126 c^2 AB \cos(4m\xi) - 0.016 m c^2 AB \xi \sin(4m\xi) - \\ & - 0.000625 c^2 B^2 \cos(6m\xi), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = & (-0.15625 c^2 AB - 0.125 c^2 \nu AB) + (0.0815625 c^2 AB - \\ & - 0.00125 c^2 \nu AB - 0.03125 c^2 \nu (A^2 + 9B^2) + \\ & + 0.03125 c^2 A^2 + 0.28125 c^2 B^2) \cos(2m\xi) + \\ & + (0.03375 c^2 AB - 0.005 c^2 \nu AB) \cos(4m\xi) + \\ & + (0.0052625 c^2 AB - 0.00005 c^2 \nu AB) \cos(6m\xi). \end{aligned} \quad (26)$$

Підставимо отримані розв'язки (21-26) з урахуванням (15) і (16) - (17) у рівняння (2), попередньо замінивши в ньому

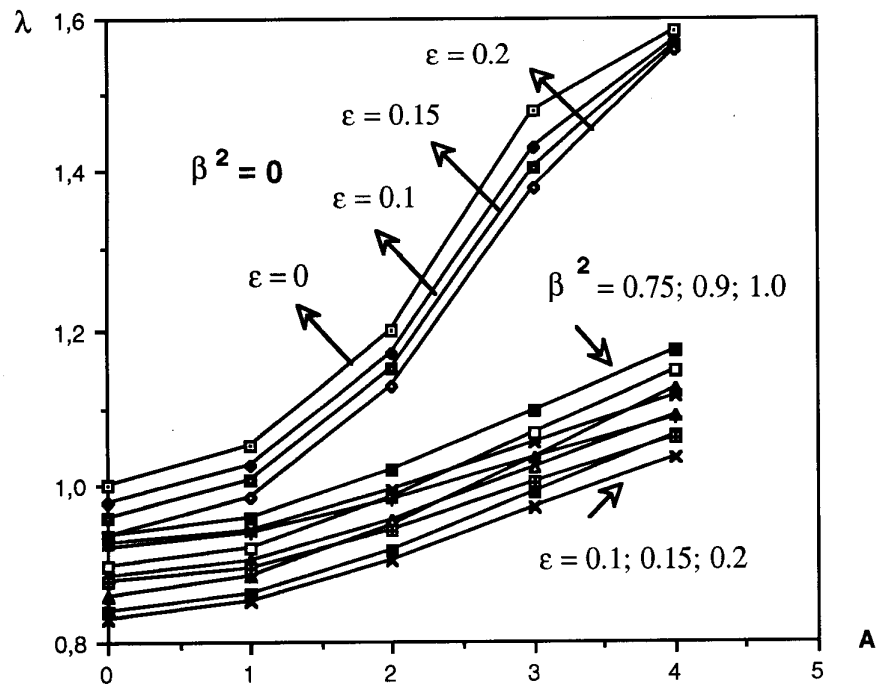
$$\frac{P_0 L^2}{D} = 4 \lambda c z^2, \quad (27)$$

де $\lambda = \frac{P_0}{P_0}$ - параметр навантаження, $P_0 = \frac{E h_0^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}}$ - класичне стискальне навантаження для однорідної оболонки постійної товщини h_0 .

Застосувавши після підстановки метод Бубнова-Гальоркіна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{2\pi R}{L}} \left\{ \Omega_1 - \Omega_2 \right\} \begin{pmatrix} \cos(\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(m\xi) \\ \cos(3\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(m\xi) \\ \cos(2\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(2m\xi) \\ \cos(6\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(2m\xi) \end{pmatrix} d\xi d\eta = 0, \quad (28)$$

де Ω_1 , Ω_2 - ліва і права частини рівняння (2) відповідно, $\xi = m\xi$, одержимо нелінійну систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих A, B, C, D і λ . Надаючи невідомому A конкретні числові значення, будемо одержувати відповідні йому значення параметра навантаження λ [6]. Залежності параметра навантаження λ від параметра амплітуди переміщення A при різних значеннях показників зміни амплітуди товщини ε та характеру локалізації β^2 ($\beta^2 = 0$ відповідає випадку періодичної змінюваності товщини оболонки) подані на рис.1.

Рис.1. Залежність параметра λ від параметра амплітуди переміщення A 

Як випливає з чисельних розрахунків і зведених залежностей, при локалізованих дефектах товщини спостерігається зниження параметра критичного навантаження до 20% у порівнянні з ідеальною оболонкою. У закритичному стані це зниження може бути істотно більше (для значення $A = 4$, наприклад, воно складає $\approx 40\%$), при цьому закритична крива трансформується із суперкритичної у транскритичну [7].

ЛІТЕРАТУРА

1. Koiter W.T., Elishakoff Y.W., Starnes J.H. "Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell of Variable Thickness", Int.J. Solids Structures, №6, 1994, 797-805.
2. Koiter W.T. "The Influence of More or Less Localized Short-wave Imperfections on the Buckling of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression (in a first approximation)", Rep. WTHD 534, Delft, May 1974// Комплексний аналіз і його додатки.-М.:Наука, 1978.-С.242-244.
3. Gristchak V.Z. "Asymptotic Formula for the Buckling Stress of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells with More or Less Localized Short-wave Imperfections", Rep. WTHD 88, Delft, September 1976// Міцність і довговічність конструкцій.-К.:Наукова думка, 1980.
4. Власов В.З. Избранные труды . -М., 1962.-Т.1.-528с.
5. Гришак В.З., Головань О.О. Постановка та метод розв'язку задачі про вплив локалізованого змінення товщини оболонки на величину критичних зусиль// Вісник Запорізького державного університету. - 1998. -№1.- С.20-25.
6. Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ.-К.: Вища школа, 1983.-286с.
7. Gristchak V.Z. "Bifurcations and Postbuckling Behavior of Vibration of the Nonhomogeneous, Nonlinear Elastic System with Multiple Independent Bifurcation Parameters". Int.J. Solids Structures, Vol.26, № 8, 1990, 821-831.