

УДК 519.6

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ О ЛЕСАХ

Винцер О.М.

1. ОПИСАНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается такой случай векторной, т.е. многокритериальной задачи о лесах, как задача покрытия графа звездами [1]. Исходные данные такой задачи определяются n -вершинным графом $G = (V, E)$, в котором каждому ребру $e \in E$ приписаны веса $w_v(e) > 0$, $v = 1, 2, \dots, N$. Допустимым решением является такой остовный подграф [1] $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$, в котором каждая компонента связности в x является h -вершинной звездой (n кратно h); $X = \{x\}$ - множество всех допустимых решений (МДР). На МДР X определена векторная целевая функция (ВЦФ):

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x)), \quad (1)$$

состоящая из критериев вида MINSUM

$$F_v(x) = \sum_{e \in E_x} \omega_v(e) \rightarrow \min, \quad v = 1, 2, \dots, N_1, \quad N_1 \leq N \quad (2)$$

или из критериев вида MINMAX

$$F_v(x) = \max_{e \in E_x} \omega_v(e) \rightarrow \min, \quad v = N_1 + 1, \dots, N \quad (3)$$

При $N \geq 2$ ВЦФ (1) – (3) определяет на МДР X паретовское множество (ПМ) $\tilde{X} \subseteq X$ [1]. Искомым решением данной векторной задачи является так называемое полное множество альтернатив (ПМА) X^0 . Подмножество $X^0 \subseteq \tilde{X}$ называется ПМА, если его мощность $|X^0|$ минимальна и при этом выполняется равенство $F(X^0) = F(\tilde{X})$, где $F(X^*) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x)) : x \in X^*\} \quad \forall X^* \subseteq X$.

Термином “задача 1” условимся называть такой случай задачи покрытия графа звездами, который можно описать следующим образом:

- МДР X определяется множеством типовых графов H , состоящих из одной h -вершинной звезды;
- ВЦФ $F(x)$ вида (1) – (3) состоит из двух критериев ($N=2$), причем $N_1 \leq 1$, т.е. не более, чем один критерий имеет весовой вид (2), а остальные - минимаксный вид;
- искомым множеством альтернатив является ПМА.

Термином “задача 2” условимся называть такой случай задачи 1, когда в исходном графе $G=(V,E)$ все ребра имеют одинаковые вторые веса, например, $w_2(e)=1 \quad \forall e \in E$ и $N_1=1$, т.е. первый критерий имеет весовой вид.

Заметим, что задача 2 представляет собой оптимизационную задачу, т.е. ее ПМА X^0 состоит из элемента $x \in X$, оптимального по целевой функции

$$F_1(x).$$

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 2

Рассматривая задачу 2, считаем, что n кратно h . Пусть n -вершинный граф $G=(V,E)$ удовлетворяет условиям задачи 2; всякое покрытие $x=(V, E_x) \in X$ состоит из $m=n/h=[n/h]$ звезд; $M=\binom{n}{m}$ количество сочетаний из $n=|V|$ элементов множества V по m , $i=1, 2, \dots$, - нумерация этих сочетаний; W_i -

подмножество вершин из V , образующих i -ое сочетание, $\mathcal{L} = \{W_i\}$ - множество всех вариантов этих сочетаний, $1 \leq i \leq M$.

Алгоритм α_i решения задачи 2 состоит из итераций $i=1, \dots, M, M+1$, где первые M вариантов поставлены во взаимно-однозначное соответствие сочетаниям $W_i \in \mathcal{L}$. Каждая итерация $i \leq M$ состоит из следующих трех этапов.

Этап 1. Строим двудольный граф $G'_i = (V'_1, V'_2, E')$, где мощность долей $|V'_1| = |V'_2| = m(h-1)$. Множество V'_1 получается путем $(h-1)$ - кратного дублирования каждой из вершин сочетания $W_i \in \mathcal{L}$; полагаем $V'_2 = V \setminus W_i$, $W_i \subset V$. Ребра $e \in E'$ определяются следующим образом. Пусть в данном графе G существует ребро $e = (v_1, v_2)$ такое, что $v_1 \in W_i$ и $v_2 \in (V \setminus W_i)$. Тогда в графе G' каждый $(h-1)$ - кратный дубль вершины v_1 соединяем ребром с вершиной $v_2 \in V'_2$ и приписываем этому ребру тот же вес $w_1(e)$, что и в графе G . В противном случае в графе G'_i ребра вида $e = (v_1, v_2)$ отсутствуют.

Пусть $Y_i = \{y\}$ - множество максимальных паросочетаний $y = (V'_1, V'_2, E_y)$ графа G'_i .

Этап 2. Находим в Y_i элемент y_i , оптимальный по критерию:

$$F_1(y) = \sum_{e \in E_y} w_1(e) \rightarrow \min \quad (4)$$

Если для графа G МДР X содержит покрытие, состоящее из звезд, центры которых образуют множество W_i , то этап 2 заканчивает работу с результатом y_i , после чего следует этап 3. По построению y_i представляет собой совершенное паросочетание в G'_i . В противном случае этап 2, а вместе с ним итерация i являются безрезультатными, после чего осуществляется итерация $i+1$.

Этап 3. Для графа G строится покрытие $x_i = (V, E_{x_i}) \in X$ следующим образом: в качестве центров звезд покрытия x_i фиксируются вершины множества $W_i \subset V$. Далее какая-либо вершина $v' \in W_i$ соединяется с вершиной $v'' \in (V \setminus W_i)$ тогда и только тогда, когда в совершенном паросочетании y_i множество его ребер E_{y_i} содержит ребро вида (v', v'') .

По завершению итераций $i=1, \dots, M$ получаем множество $X_1 \subseteq X$, которое непусто, если $X \neq \emptyset$.

Итерация $M+1$ осуществляется в случае, если $X_1 \neq \emptyset$: в X_1 находим покрытие x^0 минимального веса:

$$F_1(x^0) = \min_{x \in X_1} F_1(x) \quad (5)$$

Лемма 1. Если для данного графа G МДР $X \neq \emptyset$, то алгоритм α_i находит оптимальное решение задачи 1.

Доказательство. Рассмотрим индивидуальную задачу 2 на данном графе G . Пусть x^* - один из ее оптимумов. Он представляет собой некоторое множество звезд, совокупность центров которых обозначим через W^* . Согласно определению α_i существует $W_i \in \mathcal{L}$, для которого в результате i -й итерации найдено покрытие x_i . Принимая во внимание (4), с учетом определения этапов 2 и 3 рассуждением от противного получаем равенство $F_1(x_i) = F_1(x^*)$ и с учетом (5) - равенство $F_1(x_i) = F_1(x^0)$.

Лемма 1 доказана.

Пусть c_0 - независящая от n константа или растущая и ограниченная сверху функция от n .

Лемма 2. Если $h \geq n/c_0$, то вычислительная сложность нахождения оптимума x^0 с помощью алгоритма α_i ограничена сверху полиномом от входа.

Доказательство. Как известно [2], трудоемкость нахождения оптимального совершенного паросочетания в n - вершинном графе ограничена сверху полиномом $O(n^3)$. Отсюда с учетом определения этапов 1 - 3 трудоемкость одной итерации алгоритма α_i не превосходит $O(n^3)$. Следовательно, трудоемкость алгоритма α_i :

$\tau(\alpha_1) \leq (M+1) O(n^3)$, откуда при выполнении условий леммы 5.2 получаем оценку $\tau(\alpha_1) \leq O(n^{c_0+3})$, $c_1 \leq c_0$.

Лемма 2 доказана.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим задачу 1 на данном графе $G \in J(n, N, 2)$. Для каждого сочетания $W_i \in \mathfrak{L}$; существует подмножество $X_i \subseteq X$ всех решений $x \in X$, состоящих из звезд, центры которых образуют множество W_i . ВЦФ $F(x)$ задачи 1 определяет на X_i ПМ $\tilde{X}_i \subseteq X$ и ПМА $X_i^0 \subseteq X$.

Используя этапы 1 и 2 итерации i , строим 2 - дольный граф G_i' и рассматриваем для него множество $Y_i = \{y\}$ всех совершенных паросочетаний. ВЦФ $F(x)$ определяет ПМ $\tilde{Y}_i \subseteq Y_i$ и ПМА $Y_i^0 \subseteq Y_i$, т.е. Y_i^0 представляет собой искомое МА для соответствующей 2 - критериальной задачи о совершенных паросочетаниях, которую условимся называть “задача 1а”.

Из определения этапов 1 - 3 итерации i получаем, что справедливы следующие два вспомогательных утверждения.

Лемма 3. Для всякого графа $G \in J(n, N, 2)$ и всякого $W_i \in \mathfrak{L}$; существует взаимнооднозначное соответствие между элементами X_i и Y_i . При этом выполняются равенства $F(Y_i^0) = F(X_i)$ и $F(Y_i^0) = F(\tilde{Y}_i) = F(\tilde{X}_i) = F(X_i^0)$.

Лемма 4. Для всякого графа $G \in J(n, N, 2)$ выполняются следующие соотношения задачи 1:

$$\tilde{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^M \tilde{X}_i \quad \text{и} \quad F(X^0) \subseteq \bigcup_{i=1}^M F(X_i^0).$$

Для решения последовательности вспомогательных задач 1 используем полиномиальный алгоритм α_1^0 [3]. Построим алгоритм α_1^* решения задачи 1 в соответствии со следующей вычислительной схемой и ее обоснованием. Согласно теореме 1 [3] для каждого $i=1, \dots, M$ алгоритм α_1^0 находим ПМА Y_i^0 задачи 1, по которому согласно леммам 1 и 3 строятся ПМА X_i^0 для подмножеств X_i , $i=1, \dots, M$. Согласно лемме 4 путем попарного сравнения решений из объединения $\bigcup_{i=1}^M X_i^0$ выделяется ПМА X^0 задачи 1 на графе G . Тогда, в силу леммы 2 и полиномиальности алгоритма α_1^0 ,

Теорема 1. Если $h \geq n/c_0$, то вычислительная сложность нахождения ПМА задачи 1 с помощью алгоритма α_1^* ограничена сверху полиномом от входа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. - 1994. - Т. 6, вып. 1. - С. 3-33.
2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. - М.: Мир, 1985. - 512 с.
3. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. - 1987. - № 5. - С. 85 - 93.