УДК 681.3

# СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ ДИСКРЕТНИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Бакурова Г.В.

Дана стаття є коротким звітом про основні результати досліджень стійкості розв'язків багатокритеріальних дискретних задач, що проводяться на кафедрі економічної кібернетики ЗДУ з 1989 року.

**Актуальність і коротка історія проблеми.** При розв'язку будь-якої реальної задачі дослідник завжди має справу з деякою моделлю задачі, яка є наближеною до вихідної. На базі задачі виникає деяка множина постановок для більш гнучкого відбиття особливостей моделі. Розв'язок усіх задач у сукупності дозволяє одержати більш точний та адекватний опис моделі. Така сукупність будується шляхом варіації деяких числових параметрів задачі. Аналіз стійкості є одним з методів урахування погрішності у вимірі числових параметрів та їх впливу на одержуваний розв'язок.

Проблема дослідження стійкості докладно розроблена для оптимізаційних задач з "неперервними" вихідними даними. Через складність дискретних моделей, які при малих змінах у вихідних даних поводять себе непередбачено, ця проблема спочатку не отримала достатнього розвитку в дискретній оптимізації і почала грунтовно досліджуватися у 70-ті роки. Теоретичному дослідженню задач з повністю або частково цілочисельними змінними, що базується на використанні властивостей точково-множинних відображень присвячена монографія [10]. Конструктивний підхід до проблеми дослідження стійкості траєкторних задач дискретної оптимізації, основою якого є поняття радіуса стійкості, укладено в роботах [9]. В останній час з'явився новий напрямок дослідження питань стійкості – ймовірнісний [5,6]. На кафедрі економічної кібернетики ЗДУ вперше було розглянуто проблему локальної стійкості для багатокритеріальних траєкторних задач на графах та одержано формули радіуса стійкості для різних класів задач. Викладемо основні теоретичні положення цієї проблеми.

**Постановка траєкторних задач векторної оптимізації.** Системою підмножин (СП) називаємо пару $(E,T)$, де $E$ - скінченна множина елементів, потужність $|E| = q$, а $T$ - деяка сукупність непустих підмножин множини $E$, які називають траєкторіями і $T = \{t\}$.

У роботах [1-6, 9] розглядаються класи масових задач з двома типами зваження елементів $e \in E$ ваговим та інтервальним :

***I тип.*** На множині $E$ задамо векторну вагову функцію (ВВФ)

$$w(e) = (w_1(e),..., w_\nu(e),..., w_n(e)), \qquad (1)$$

де $w_\nu(e) \in R \quad \forall \nu = \overline{1,n} \quad \forall e \in E.$

На множині траєкторій $T$ задамо векторну цільову функцію (ВЦФ)

$$F(t) = (F_1(t),.., F_\nu(t),..., F_n(t)), \qquad (2)$$

вид критеріїв якої визначає класи задач $Z_j, j = \overline{0,4}$ :

- клас $Z_0$: $F_\nu(t) = \min_{e \in t} w_\nu(e) \to \min_T, \qquad \nu = \overline{1,n}, \qquad (3)$

$$F_\nu(t) = \max_{e \in t} w_\nu(e) \to \min_T, \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

$$F_\nu(t) = \min_{e \in t} w_\nu(e) \to \max_T, \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

$$F_\nu(t) = \max_{e \in t} w_\nu(e) \to \max_T, \quad \nu = \overline{1,n}; \qquad (6)$$

- клас $Z_1$: $F_\nu(t)=\sum_{e\in t} w_\nu(e)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=\overline{1,n}$; (7)

- клас $Z_2$: $F_\nu(t)=\sum_{e\in t} w_\nu(e)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=\overline{1,n-1}$,

$F_\nu(t)=s(t)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=n$; (8)

- клас $Z_3$: $F_\nu(t)=\sum_{e\in t} w_\nu(e)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=\overline{1,n-1}$,

$F_\nu(t)=d(t)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=n$; (9)

- клас $Z_4$: $F_\nu(t)=\sum_{e\in t} w_\nu(e)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=\overline{1,n-1}$,

$F_\nu(t)=s(t)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=n-1$,

$F_\nu(t)=d(t)\to \underset{T}{opt}$, $\nu=n$.

При визначенні топологічних критеріїв (8), (9) завжди визнаємо, що $E$ являє собою множину ребер даного графу $G$, при цьому підмножина $t\subseteq E$ утворює зв'язний підграф $t$ графу $G$: $s(t)=\max_{e\in t}\deg\nu$ - степінь $t$, $d(t)$ - діаметр $t$.

***II тип.*** На множині $E$ визначена інтервальна вагова функція (ІВФ)

$$w(e)=[w_1(e),w_2(e)], \quad (10)$$

де $w_1(e)(w_2(e))$ - нижня (верхня) межа заданого інтервалу.

На множині траєкторій $T$ визначена інтервальна цільова функція (ІЦФ), що містить такі критерії:

$$F_1(t)=\sum_{e\in t} w_1(e)\to \max_T, \quad (11)$$

$$F_2(t)=\sum_{e\in t} w_2(e)\to \max_T, \quad (12)$$

$$F_3(t)=\max_{e\in t}(w_2(e)-w_1(e))\to \min_T. \quad (13)$$

ВЦФ $F(t)$ вигляду (3)-(9) та ІЦФ (11)-(13) визначають на множині допустимих розв'язків (МДР) паретовську множину (ПМ) $\tilde{T}$, що містить усі паретовські оптимуми (ПО): $\tilde{t}\in\tilde{T}$, якщо не існує такої траєкторії $t^o\in T$, для якої виконуються нерівності $F(t^0)\le F(\tilde{t}),F(t^0)\ne F(\tilde{t})$. Багатокритеріальною задачею будемо називати задачу знаходження та зображення ПМ $\tilde{T}$ в явному вигляді.

Якщо занумерувати усі елементи множини $E=\{e_1,e_2,...,e_q\}$, то індивідуальну ВВФ $w(e)$ з класів $Z_j,j=\overline{0,4}$ зручно трактувати як матрицю $W=\|w_{\nu\kappa}\|_{nxq}$ у просторі $R^{nq}$, $\nu=\overline{1,n},q=|E|$. Змінюючи матрицю $W$, будемо одержувати різні індивідуальні задачі.

Для кожного класу масових задач $Z_j,j=\overline{0,4}$ введені позначення індивідуальної задачі, тобто: $z^n(W)$ - індивідуальна задача з класу $Z_0$; $z^*(W)$ - з класу $Z_1$; $z'(W)$ - з класу $Z_j,j=\overline{2,4}$; задачу з ІЦФ (11)-(13) позначаємо через $z^i(W)$ і називаємо інтервальною. ПМ таких задач позначаємо відповідно $\tilde{T}^n(W),\tilde{T}^*(W),\tilde{T}'(W)$. Взагалі (без уточнення класу) символами $T(W)$ та $\tilde{T}(W)$ позначаємо

МДР та ПМ задачі. Значення $\nu$-го критерію $F_\nu(t)$ вигляду (3)-(6) в задачі $z^n(W)$ будемо позначати через $M_\nu(t,W)$. Інтервальну задачу $z^i(W)$ зводимо до задачі багатокритеріальної оптимізації з двома ваговими та одним мінімаксним критеріями.

**Постановка проблеми локальної стійкості.** Для задач з ВВФ (ІВФ) у просторі $R^{nq}$ $(R^{3q})$ задамо норму. Під нормою матриці $B = \|b_{\nu\kappa}\| \in R^{nq}$ будемо розуміти число $\|B\| = \max\{|b_{\nu\kappa}| : \nu = \overline{1,n}, k = \overline{1,q}\}$. Через $\mathcal{B}(\varepsilon)$ позначаємо множину всіх таких матриць $B$ з $R^{nq}$, що норма $\|B\| \le \varepsilon, \varepsilon \ge 0$. Задачу $z(W+B)$, що одержана з вихідної задачі $z(W)$ при складенні матриць $W$ та $B$, будемо називати збуреною, а матрицю $B$ - збурюючою.

Означення 1. Задача $z(W)$ є $\varepsilon$-стійкою, якщо виконуються включення

$$\tilde{T}(W+B) \subseteq \tilde{T}(W) \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon) \tag{14}$$

*Зауваження.* У роботі [5] було проведено дослідження $\varepsilon$-стійкості для випадків симетричного включення до означення (14) та строгої рівності між паретовськими множинами, знайдено необхідні та достатні умови $\varepsilon$-стійкості для цих означень. Далі цей напрямок набув розвитку в колег з Білорусі, наприклад, робота [8].

В індивідуальних задачах $z^n(W)$, $z^*(W)$, $z^‘(W)$, $z^i(W)$ з відповідних класів масових задач $Z_j, j = \overline{0,4}$ для будь-якої траєкторії $t^0 \in \overline{T(W)}$ визначимо множину парето-оптимальних траєкторій, що домінують траєкторію $t^0$. Для цього введемо позначення множин індексів $\nu \in I_l, l = \overline{1,7}$, якими занумеровані критерії (3)-(9), що являють собою неперехрещені підмножини $I_l \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Тоді ця множина визначається таким чином:

- для класу $Z_0$

$$\tilde{T}^n(W,t^0) = \{\tilde{t} \in \tilde{T}^n(W) : \tau_\nu^w(t^0,\tilde{t}) \ge 0, \nu \in I_l, l = \overline{1,4}\}, \tag{15}$$

де $\tau_\nu^w(t^0,\tilde{t}) = M_\nu(t^0,W) - M_\nu(\tilde{t},W), \nu \in I_1, I_2$,

$\tau_\nu^w(\tilde{t},t^0) = M_\nu(\tilde{t},W) - M_\nu(t^0,W), \nu \in I_3, I_4$;

-для класу $Z_j, j = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^‘(W,t^0) &= \{\tilde{t} \in \tilde{T}^‘(W) : \tau_\nu^w(t^0,\tilde{t}) \ge 0, \nu \in I_6, I_7\}, \\ \tilde{T}^*(W,t^0) &= \{\tilde{t} \in \tilde{T}^*(W) : \tau_\nu^w(t^0,\tilde{t}) > 0, \nu \in I_5\}, \end{aligned} \tag{16}$$

де $\tau_\nu^w(t^0,\tilde{t}) = F_\nu(t^0,W) - F_\nu(\tilde{t},W), \nu \in I_l, l = \overline{5,7}$;

- для інтервальної задачі $z^i(W)$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,2}(W,t^0) &= \{\tilde{t} \in \tilde{T}_{1,2}(W) : \tau_\nu^w(\tilde{t},t^0) > 0, \nu = 1,2\}, \\ \tilde{T}_3(W,t^0) &= \{\tilde{t} \in \tilde{T}_3(W) : \tau_\nu^w(\tilde{t},t^0) \ge 0, \nu = 3\}, \end{aligned} \tag{17}$$

де $\tau_\nu^w(\tilde{t},t^0) = F_\nu(\tilde{t},W) - F_\nu(t^0,W), \nu = \overline{1,3}$.

Для інтервальної задачі $z^i(W)$ введемо два типи збурення вхідних даних, що не виводять вихідну задачу з класу інтервальних:

$$1)\ \mathcal{B}_1(\varepsilon) = \{B = \|b_{\nu\kappa}\| : b_{\nu\kappa} \le \varepsilon, \varepsilon > 0, b_1 + w_1 < b_2 + w_2\}, \tag{18}$$

де $w(e)=[w_1(e),w_2(e)]$ - вхідна вага, $b(e)=[b_1(e),b_2(e)]$ - збурююча вага;

$$\mathrm{B}_2(\varepsilon)=\left\{B=\|b_{\nu\kappa}\|:b_{\nu\kappa}\le\varepsilon, 0<\varepsilon<\min_k\frac{d_k}{2}\right\}, \tag{19}$$

де $d_k=w_{2k}-w_{1k}$ - ширина інтервалу, $k=\overline{1,q}$ .

Радіусом стійкості будь-якої індивідуальної задачі $z(W)$ назвемо число

$$\rho(W)=\sup\{\varepsilon:T(W+B)\subseteq T(W)\forall B\in\mathcal{B}(\varepsilon)\}.$$

Наведемо основні результати, що були одержані протягом останніх 3-х років.

**1.** Проведено дослідження $\varepsilon$-стійкості векторних задач на СП з векторною ваговою функцією. Розглянуто два випадки, що визначаються видом задач: частинний, що має аналог для однокритеріальних задач та загальний, що виникає в умовах багатокритеріальності. Відносно частинного випадку отримані результати, які аналогічні векторним траєкторним задачам з лінійними критеріями, що розглядалися раніш у роботах [4-6]. У загальному випадку, коли можливим є вплив перехрещення паретовської та непаретовської траєкторій, сформульовано необхідні та достатні умови $\varepsilon$-стійкості задач класу $Z_0$, а також визначено формулу радіуса стійкості. В їх формулюванні використано визначення $i$-го квазіоптимуму, що вводиться рекурентно:

- $e_\nu(t^0\cap\tilde{t})$ - ребро, на якому досягається рівність значень $\nu$-го критерію паретовської та непаретовської траєкторій, тобто $M_\nu(t^0,W)=M_\nu(\tilde{t},W)$; множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначаємо через $J(t^0,\tilde{t})$;
- $M_\nu^1(\tilde{t},W)$ - перший квазіоптимум траєкторії $\tilde{t}\in T^n(W,t^0)$;

$e_\nu^i(t^0\cap\tilde{t})$ - ребро, на якому однакові $i$-ті квазіоптимуми траєкторій $t^0,\tilde{t}$ та виконується послідовність рівностей та нерівностей:

$$[M_\nu(t^0,W)=M_\nu(\tilde{t},W)]>[M_\nu^1(t^0,W)=M_\nu^1(\tilde{t},W)]>\ldots>[M_\nu^i(t^0,W)=M_\nu^i(\tilde{t},W)]$$

множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначаємо через $J^i(t^0,\tilde{t})$, де $\nu\in J^{i-1}(t^0,\tilde{t})$.

Формула обчислення радіуса стійкості має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\rho(W)=\min_{t^0\in T(W)}\max_{\tilde{t}\in T^n(W,t^0)}\min\frac{1}{2}\Big\{&\min_{\nu\in J^i(t^0,\tilde{t})}\big[(M_\nu(\tilde{t},W)-M_\nu^i(\tilde{t},W)),\\&(M_\nu(\tilde{t},W)-M_\nu^i(t^0,W))\big],\min_{\nu\in\{1,\ldots,n\}\setminus J(t^0,\tilde{t})}\tau_\nu^w(t^0,\tilde{t})\Big\}\end{aligned} \tag{20}$$

**2.** Розглянуто вплив включення топологічних критеріїв степеня та діаметра на стійкість векторних задач з адитивними критеріями. Сформульовано критерій $\varepsilon$-стійкості задачі з топологічними критеріями. Знайдено формулу обчислення радіуса стійкості задачі $z'(W)$ з класу $Z_j, j=\overline{2,4}$ :

$$\rho(W)=\min_{t^0\in T(W)}\max_{\tilde{t}\in T'(W,t^0)}\min\left\{\min_{\nu\in I_5}\frac{\tau_\nu^w(t^0,\tilde{t})}{c(t^0,\tilde{t})},\tau_{\nu\in I_6,I_7}^w(t^0,\tilde{t})\ne 0\right\}, \tag{21}$$

де $c(t^0,\tilde{t})=|t^0|+|\tilde{t}|-2|t^0\cap\tilde{t}|$ - кількість різних ребер у парі траєкторій $t^0,\tilde{t}\in T(W)$.

**3.** Проведено дослідження $\varepsilon$-стійкості векторних задач на СП з інтервальною ваговою функцією.
За допомогою лінійного перетворення, що залишає незмінними межі області значень інтервалу $w(e)=\left[w_1(e),w_2(e)\right], e\in E$ критерій (13) перетворено до максимізованого:

$$F_3(t)=\min_{e\in E}(D(W)-d_k)\to\max_T\ , \tag{22}$$

де $d_k=w_{2k}-w_{1k}, k=\overline{1,q}$ - ширина інтервалу, $D(W)=\min_{e\in E}d(e)+\max_{e\in E}d(e); d(e')=\min_{e\in E}d(e), d(e'')=\max_{e\in E}d(e)$.

Введемо ще дві множини:

1) збурення, що не впливають на величини $D(W)$ та $d_k$:

$$B_d(\varepsilon)=\left\{B=\|b_{\nu\kappa}\|: b_{\nu\kappa}\le\varepsilon, \varepsilon\ge 0, (b_{2k}+w_{2k})-(b_{1k}+w_{1k})=d_k\right\}; \tag{23}$$

2) збурення, при яких $D(W)=const$, а $d_k\neq const$:

$$B_D(\varepsilon)=\left\{B=\|b_{\nu\kappa}\|: b_{\nu\kappa}\le\varepsilon, \varepsilon\ge 0, 0\le\Delta_k\le d(e'')-d_k\right\}, \tag{24}$$

де $\Delta_k=b_{2k}-b_{1k}$, - ширина інтервалу збурення.

Для кожного із збурень $\mathcal{B}_1(\varepsilon)$, $\mathcal{B}_2(\varepsilon)$, $\mathcal{B}_d(\varepsilon)$, $\mathcal{B}_D(\varepsilon)$ досліджено умови $\varepsilon$-стійкості та визначено формули радіуса стійкості. Для наведення формул радіуса стійкості введені такі позначення: $\mathcal{T}'\in\mathcal{T}_{1,2}(W,t^0), \mathcal{T}''\in\mathcal{T}_3(W,t^0); \mathcal{T}_{1,2}(W,t^0)\cup\mathcal{T}_3(W,t^0)=\mathcal{T}^{\wedge}(W,t^0)$;

$M_3^i(\mathcal{T}'',W)$ або $M_3^i(t^0,W)$ - $i$-ті квазіоптимуми у траєкторіях $\mathcal{T}'', t^0$;

$-'(t^0,\mathcal{T})=-(t^0,\mathcal{T})-\phi(t^0,\mathcal{T})$ - кількість різних ребер у парі траєкторій $t^0,\mathcal{T}\in T(W)$; $\phi(t^0,\mathcal{T})$ - число входів ребер $e'$ та $e''$ у траєкторії $\mathcal{T}, t^0$;

$\tau_\nu^{*w}(\mathcal{T},t^0), \nu=1,2; \tau_3^{*w}(\mathcal{T},t^0)$ - позначення величин відповідно

$\tau_\nu^{w}(\mathcal{T},t^0), \nu=1,2; \tau_3^{w}(\mathcal{T},t^0)$, що задовольняють нерівностям $\tau_\nu^{w}(\mathcal{T},t^0)\ge\dfrac{\Delta^*}{2}c'(\mathcal{T},t^0), \nu=1,2$ та

$\tau_3^{w}(\mathcal{T},t^0)\ge\Delta^*$, де $\Delta^*=\min_k\Delta_k^*, \Delta_k^*=d(e'')-d_k$.

Наступні формули радіуса стійкості наведені відповідно для збурень $B_1(\varepsilon)$, $B_2(\varepsilon)$, $B_d(\varepsilon)$, $B_D(\varepsilon)$:

$$\rho_1(W)=\min_{t^0\in T(W)}\max_{\mathcal{T}\in\mathcal{T}^{\wedge}(W,t^0)}\min\left\{\frac{\tau_{1,2}^{w}(\mathcal{T}',t^0)}{c'(t^0,\mathcal{T}')},\frac{1}{2}\left[\min\left\{(M_3^i(t^0,W)-M_3(\mathcal{T}'',W)),\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.(M_3^i(\mathcal{T}'',W)-M_3(\mathcal{T}'',W))\right\},\tau_3^{w}(\mathcal{T}'',t^0)\right]\right\} \tag{25}$$

$$\rho_2(W)=\min\left\{\rho_1(W);\min_k\frac{d_k}{2}\right\} \tag{26}$$

$$\rho_d(W)=\min_{t^0\in T(W)}\max_{\mathcal{T}\in\mathcal{T}_{1,2}(W,t^0)}\min_{\nu=1,2}\frac{\tau_\nu^{w}(\mathcal{T},t^0)}{c(t^0,\mathcal{T})} \tag{27}$$

$$\rho_D(W) = \min_{t^0 \in \overline{T(W)}} \max_{\tilde{\tau} \in T^{\wedge}(W,t^0)} \min\left\{ \frac{\tau_{1,2}^{*w}(\tilde{\tau}',t^0)}{c'(t^0,\tilde{\tau}')}, \frac{1}{2}\left[\min\left\{(M_3^i(t^0,W) - M_3(\tilde{\tau}'',W)),\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.(M_3^i(\tilde{\tau}'',W) - M_3(\tilde{\tau}'',W))\right\}, \tau_3^{*w}(\tilde{\tau}'',t^0)\right] \right\} \tag{28}$$

## ЛІТЕРАТУРА


1. Bakurova A.V., Perepelitsa V.A., Zin'kovskaya J.S. Research of Stability of Vector Ptoblem on Spanning Tree with Topological Criteria. IKM'97 digital proceedings. Bauhaus-Universitat/Weimar/Germany, 1997.- P.159-165 (article).
2. Бакурова А.В., Зиньковская Ю.С., Перепелица В.А. Исследование устойчивости векторных задач на системах подмножеств при дополнении ВЦФ топологическими критериями // Доповіді НАН України - 1998 - № 5 – С.89-92.
3. Бакурова Г.В., Зіньковська Ю.С. Дослідження стійкості 3-критеріальної задачі формування інвестиційного портфелю // Міжвідомчий зб. наук. пр. Машинна обробка інформації. - КДЕУ, 1997. - 59. - С.48-54.
4. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств // Доклады АН Беларуси – 1995. – Т.39 - № 2. – С.33-35.
5. Бакурова А.В. Исследование устойчивости и сложности некоторых задач дискретной многокритериальной оптимизации : Дис. …канд.физ.-мат.наук: Запорожье: ЗГУ, 1993. – 100 с.
6. Бакурова Г.В., Перепелиця В.О. Ймовірнісний аналіз складності і стійкості векторної задачі комівояжера // Доповіді АН України. – 1993 - № 11. – С.80-84.
7. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // ЖВМиМФ – Т.36 -№ 1.– 1996. – С.12-18.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Математические заметки РАН. – М. – Т.63 – В.1 – 1998. – С.21-27.
9. Зіньковська Ю.С. Дискретні екстремальні задачі в умовах невизначеності: питання стійкості – Дис.: канд.фіз.-мат.наук. – Запоріжжя : ЗДУ, 1997. – 122 с.
10. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К: Наукова думка, 1995. – 170 с.