УДК 517.98

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Александров А.И.

В вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве *H* рассмотрим оператор $U : H \to H$, обладающий свойством усиленной непрерывности. Это свойство заключается в том, что для любого элемента $x \in H$ и любой последовательности $\{x_n\}$ элементов *H*, слабо сходящейся к *x*, соответствующая последовательность $\{U(x_n)\}$ сильно сходится к $U(x)$. Рассмотрим также отображение $G : H \times H \to H$, для которого выполнены следующие два условия:

1) $\| G(x_1, y) - G(x_2, y) \| \le \| x_1 - x_2 \|$ для всех $x_1, x_2, y \in H$;

2) существует положительная константа *C* такая, что $\| G(y, x_1) - G(y, x_2) \| \le C \cdot \| x_1 - x_2 \|$, для всех $x_1, x_2, y \in H$.

Оператор $F : H \to H$, порождаемый отображением *G* и оператором *U*, определим таким образом, что $F(x) = G(x, U(x))$ для любого элемента $x \in H$. Докажем два утверждения о существовании неподвижной точки у оператора *F*.

Теорема 1. Пусть оператор *F* отображает шар $B[\theta, r] = \{x \in H \mid \| x \| \le r\}$ в $B[\theta, r]$. Тогда в этом шаре существует хотя бы одна неподвижная точка оператора *F*.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ есть полная ортонормированная система элементов пространства *H*, H_n – линейная оболочка первых n элементов данной системы, P_n – ортопроектор *H* на H_n. Рассмотрим уравнение

$$x = F_n(x), \qquad (1)$$

в котором $F_n(x) = P_n(F(x))$. Так как $F_n : H \to H$ – непрерывный оператор, отображающий выпуклое компактное множество $\Omega_n = H_n \cap B[\theta, r]$ в Ω_n, то из первого принципа неподвижной точки Шаудера [1] вытекает существование элемента $x_n \in \Omega_n$, удовлетворяющего уравнению (1).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ есть последовательность решений уравнений (1), соответствующих различным значениям индекса *n*. Поскольку $x_k \in B[\theta, r]$ для всех натуральных *k* и $B[\theta, r]$ – слабо компактное множество, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ рассматриваемой последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся слабо в *H* к некоторому элементу $x^* \in B[\theta, r]$. Докажем, что x^* есть неподвижная точка оператора *F*.

Для элемента $y = F(x^*)$ величина $\| P_{n_k}(y) - x_{n_k} \|$ допускает следующую верхнюю оценку:

$$\| P_{n_k}(y) - x_{n_k} \| = \| P_{n_k}(F(x^*)) - P_{n_k}(F(x_{n_k})) \| \le \| F(x^*) - F(x_{n_k}) \| =$$

$$= \| G(x^*, U(x^*)) - G(x_{n_k}, U(x_{n_k})) \| \le \| x^* - x_{n_k} \| + C \cdot \| U(x^*) - U(x_{n_k}) \|. \qquad (2)$$

Из оценки (2) вытекает неравенство

$$\left\| P_{n_k}(y) - x_{n_k} \right\|^2 \le \left\| x^* - x_{n_k} \right\|^2 + 2 \cdot \alpha_{n_k} \cdot \left\| x^* - x_{n_k} \right\| + \alpha_{n_k}^2 , \qquad (3)$$

в котором $\alpha_{n_k} = C \left\| U\left(x^*\right) - U\left(x_{n_k}\right) \right\|$. Так как для любого $x \in H$ значение $\left\| x \right\|^2$ равно скалярному произведению (x, x), то соотношение (3) можно записать в виде

$$\left(P_{n_k}(y), P_{n_k}(y)\right) - 2\left(P_{n_k}(y), x_{n_k}\right) \le \left(x^*, x^*\right) - 2\left(x^*, x_{n_k}\right) + 2 \cdot \alpha_{n_k} \cdot \left\| x^* - x_{n_k} \right\| + \alpha_{n_k}^2 . \qquad (4)$$

Переходя в неравенстве (4) к пределу при $n_k \to \infty$, получим неравенство

$$(y, y) - 2\left(y, x^*\right) \le -\left(x^*, x^*\right),$$

означающее, что $\left\| y - x^* \right\|^2 = 0$ и $x^* = y$. Так как $y = F\left(x^*\right)$ и $y = x^*$, то $x^* = F\left(x^*\right)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть оператор *F* отображает всё пространство *H* в некоторое ограниченное множество $M \subset H$. Тогда в *M* существует хотя бы одна неподвижная точка оператора *F*.

Доказательство. Для ограниченного множества *M* существует шар $B[\theta, r]$, содержащий в себе это множество. Из условий теоремы следует, что $F\left(B[\theta, r]\right) \subset F(H) \subset M \subset B[\theta, r]$. Таким образом, для оператора *F* и шара $B[\theta, r]$ выполнено условие теоремы 1, из которой вытекает существование в этом шаре неподвижной точки оператора *F*. Поскольку $F\left(B[\theta, r]\right) \subset M$, то эта неподвижная точка содержится в *M*.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь класс X_H всех таких операторов $F_0 : H \to H$, для каждого из которых существуют усиленно непрерывный оператор $U : H \to H$ и удовлетворяющее условиям 1), 2) отображение $G : H \times H \to H$, заданные таким образом, что $F_0(x) = G(x, U(x))$ для всех $x \in H$. Для класса X_H можно сформулировать очевидные обобщения доказанных утверждений.

Теорема 3. Если оператор F_0, принадлежащий классу X_H, отображает шар $B[\theta, r]$ в $B[\theta, r]$, то в этом шаре существует хотя бы одна неподвижная точка оператора F_0.

Теорема 4. Если оператор F_0, принадлежащий классу X_H, отображает всё пространство H в некоторое ограниченное множество $M \subset H$, то в этом множестве существует хотя бы одна неподвижная точка оператора F_0.

Отметим, что класс X_H достаточно широк. Этому классу, например, принадлежат все нерастягивающие и усиленно непрерывные операторы. Действительно, для нерастягивающего оператора $F_1 : H \to H$ и усиленно непрерывного оператора $F_2 : H \to H$ определим удовлетворяющие условиям 1) и 2) отображения $G_1, G_2 : H \times H \to H$ при помощи соотношений

$$G_1(x, y) = F_1(x) + y; \quad G_2(x, y) = \theta_1(x) + y; \quad x, y \in H , \qquad (5)$$

в которых $\theta_1 : H \to H$ есть нулевой оператор. Из (5) следуют равенства $F_1(x) = G_1\left(x, \theta_1(x)\right)$ и $F_2(x) = G_2\left(x, F_2(x)\right)$, означающие, что $F_1, F_2 \in X_H$. Классу X_H принадлежат также все операторы, представимые в виде суммы нерастягивающего и усиленно непрерывного операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.