

УДК 515.2

О КАТАКАУСТИКАХ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Куценко Л.Н., д.т.н., профессор

Академия пожарной безопасности Украины МВД Украины

Для геометрического расчета отражающей системы, состоящей из источника лучей, расположенного на координатной плоскости Oxy в точке $S(x_s, y_s)$, и кривой L , описанной на этой же плоскости уравнением, необходимо исследовать катакаусту этой системы. Катакаустикой называется огибающая семейства лучей, отраженных от кривой L (при этом учитываются и продолжения отраженных лучей «за кривую»). Точка S может быть несобственной.

В работе [1] приведено описание катакаустики как элемента отражающей системы в случае определения кривой в явном виде $y = f(x)$. В данной работе предлагается описание катакаустики в случае параметрического задания кривой.

Утверждение. Пусть кривая задана уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где t - параметр, а источник лучей расположен в точке $S(x_s, y_s)$. Тогда описание катакаустики имеет вид

$$\begin{aligned} X(t) = & \frac{1}{W} (x'^3 (yx_s - x_s y_s) + y'^3 (3xx_s - x_s^2 - 2x^2) + \\ & + x'^2 y' (x_s^2 - 2y^2 - xx_s + 4yy_s - 2y_s^2) + \\ & + x' y'^2 (4xy - 3yx_s - 4xy_s + 3x_s y_s) + \\ & + 2(x^3 + xy^2 + xy_s^2 + xx_s^2 - 2x^2 x_s - 2xyy_s)(x'y'' - y'x'')) ; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Y(t) = & -\frac{1}{W} (y'^3 (y_s x - x_s y_s) + x'^3 (3yy_s - y_s^2 - 2y^2) + \\ & + x' y'^2 (y_s^2 - 2x^2 - yy_s + 4xx_s - 2x_s^2) + \\ & + x'^2 y' (4xy - 3y_s x - 4x_s y + 3x_s y_s) + \\ & + 2(y^3 + x^2 y + yx_s^2 + yy_s^2 - 2y^2 y_s - 2xyx_s)(x'y'' - y'x'')) , \end{aligned}$$

где

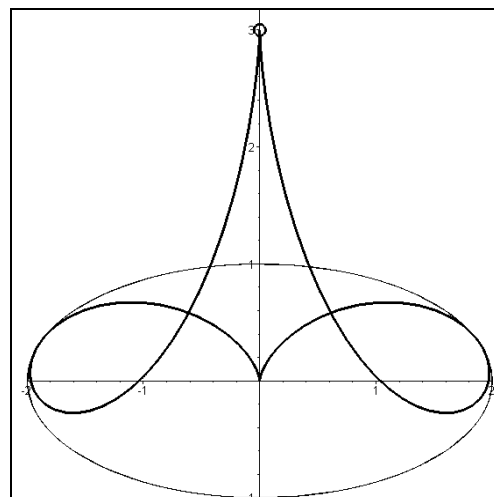
$$\begin{aligned} W = & 2(x'y'' - y'x'')(x^2 + y^2 + x_s^2 + y_s^2 - 2xx_s - 2yy_s) + \\ & (x'^2 + y'^2)(x'(y - y_s) - y'(x - x_s)). \end{aligned}$$

Далее приведены примеры уравнений и изображений катакаустик для конкретных отражающих кривых, полученных в результате выполнения Maple-программы.

Пример 1. Пусть отражающей кривой есть эллипс $x = 2 \cos t$; $y = \sin t$, а источник лучей расположен в точке $S(0; 3)$. Тогда уравнение катакаустики имеет вид

$$\begin{aligned} x = & 48 \frac{\cos^3 t}{9 \cos^2 t (1 - \sin t) + 16}; \\ y = & 3 \frac{(17 \sin t - 9) \cos^3 t + 8(1 - \sin t)}{9 \cos^2 t (1 - \sin t) + 16}. \end{aligned}$$

На рис. 1 (и далее) построение кривой (эллипса) выполняется тонкой линией, а построение катакаустики -



толстой линией.

Рис. 1. Катакаустика для эллипса

Пример 2. Отражающей кривой есть цисоида Диокла $x = 2 \sin^2 t$; $y = 2 \frac{\sin^3 t}{\cos t}$, а источник лучей расположен в точке $(-2; 0)$. Тогда уравнение катакастики имеет вид

$$x = 2 \frac{4 \cos^{10} t - 2 \cos^8 t + 19 \cos^6 t - 18 \cos^4 t - 9 \cos^2 t + 6}{9 \cos^6 t - 16 \cos^4 t - 7 \cos^2 t + 2};$$

$$y = 4 \frac{\sin 2t (\cos^8 t + 6 \cos^4 t - 4 \cos^2 t - 3)}{9 \cos^6 t - 16 \cos^4 t - 7 \cos^2 t + 2}.$$

На рис. 2. изображена катакаустика для цисоиды Диокла. При этом источник лучей изображается кружочком, а также изображаются асимптоты этих кривых.

Пример 3. Отражающей кривой есть «петля», уравнение которой $x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$, а источник лучей расположен в точке $(0; 0)$. Тогда уравнение катакастики имеет вид

$$x = \frac{2t^2(t^8 + 12t^4 - 2t^2 - 3)}{(1+t^2)(t^8 - 4t^6 + 22t^4 - 12t^2 - 3)}; \quad y = \frac{4t(3t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 1)}{(1+t^2)(t^8 - 4t^6 + 22t^4 - 12t^2 - 3)}.$$

На рис. 3. изображена катакаустика «петли».

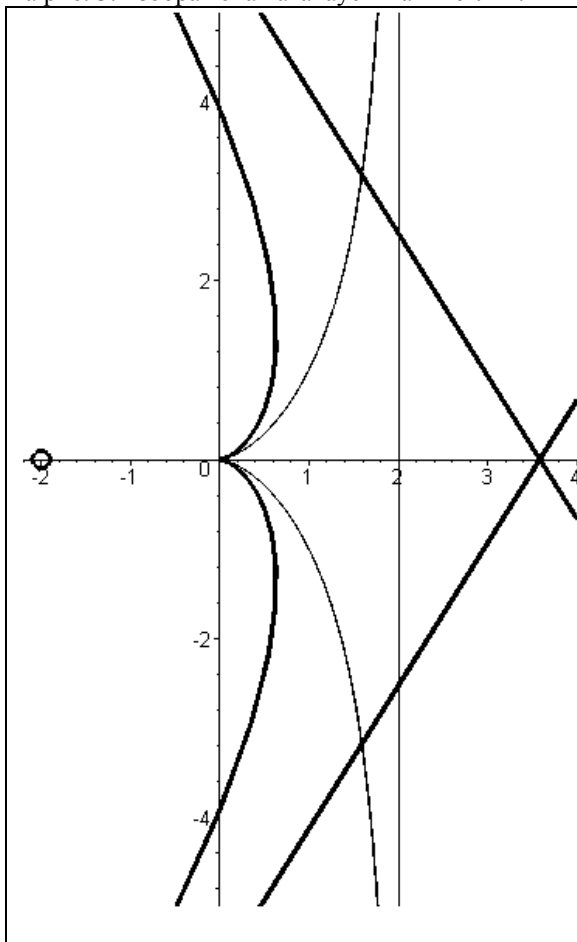


Рис. 2. Катакаустика цисоиды Диокла

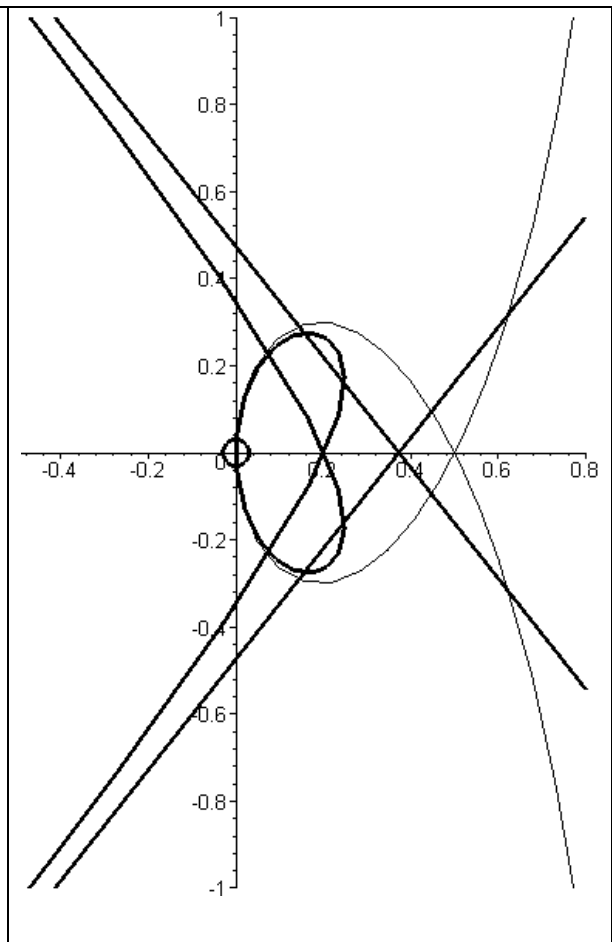


Рис. 3. Катакаустика для «петли».

Далее рассмотрим случай, когда источник лучей расположен в несобственной точке $S(x_s, \infty)$. Т.е. случай, когда на отражающую кривую будет падать семейство лучей, каждый из которых направлен навстречу оси Oy.

Утверждение. Пусть на кривую, заданную уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где t - параметр, падает пучок параллельных лучей, направленных вдоль оси Oy. Тогда описание катакастики имеет вид

$$X(t) = x - \frac{x'^2 y'}{x' y'' - y' x''}; \quad Y(t) = y + \frac{x'}{2} \cdot \frac{x'^2 - y'^2}{x' y'' - y' x''}. \quad (2)$$

Приведем примеры уравнений и изображений катакаустики для конкретных отражающих кривых, полученных в результате выполнения Maple-программы.

Пример 4. Отражающей кривой есть окружность, уравнение которой $x = \cos t$; $y = \sin t$. Тогда описание катакаустики имеет вид $x = \cos^3 t$; $y = \sin t \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin t$. На рис. 4. изображена катакаустика окружности.

Пример 5. Отражающей кривой есть эллипс, уравнение которого $x = 2 \cos t$; $y = \sin t$. Тогда уравнение катакаустики имеет вид $x = 2 \cos^3 t$; $y = \frac{5}{2} \sin t \cos^2 t - \sin t$.

На рис. 5. изображена катакаустика эллипса.

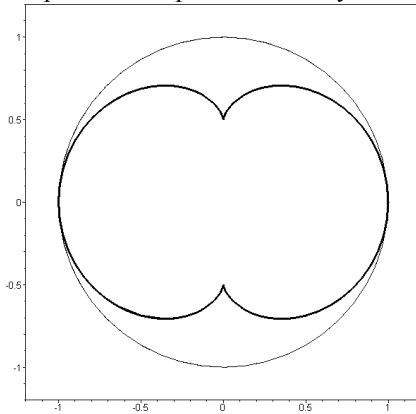


Рис.4. Катакаустика окружности

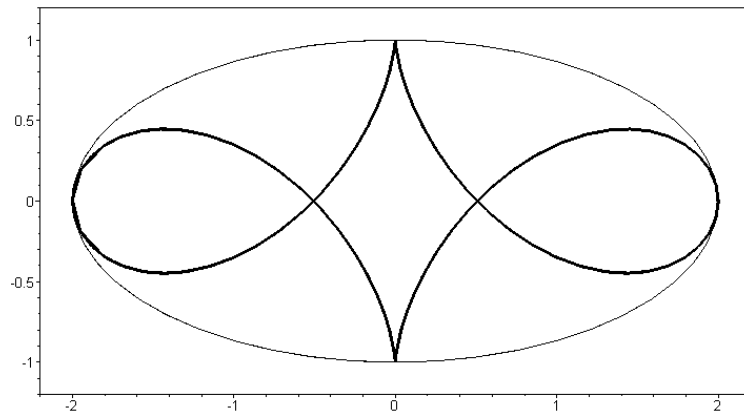


Рис.5. Катакаустика эллипса

Пример 6. Пусть отражающей кривой есть улитка Паскаля, уравнение которой $x = \sin t (1 + \cos t)$; $y = \cos t (1 + \cos t)$. Тогда уравнение катакаустики имеет вид

$$x = -\frac{2}{3} \sin t (4 \cos^4 t + 2 \cos^3 t - 3 \cos^2 t - 2 \cos t - 1);$$

$$y = -\frac{2}{3} \cos^2 t (4 \cos^3 t + 2 \cos^2 t - 5 \cos t - 3).$$

На рис. 6. изображена катакаустика улитки Паскаля.

Пример 7. Отражающей кривой есть астроида, уравнение которой $x = \sin^3 t$; $y = \cos^3 t$. Тогда уравнение катакаустики имеет вид

$$x = 2 \sin t (-3 \cos^4 t + 2 \cos^2 t - 3); \quad y = 3 \cos^5 t - \frac{7}{2} \cos^3 t + \frac{3}{2} \cos t.$$

На рис. 7. изображена катакаустика астроиды.

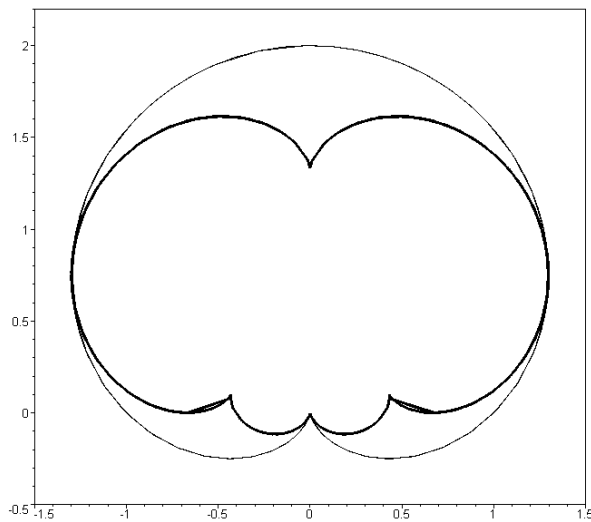


Рис.6. Катакаустика улитки Паскаля

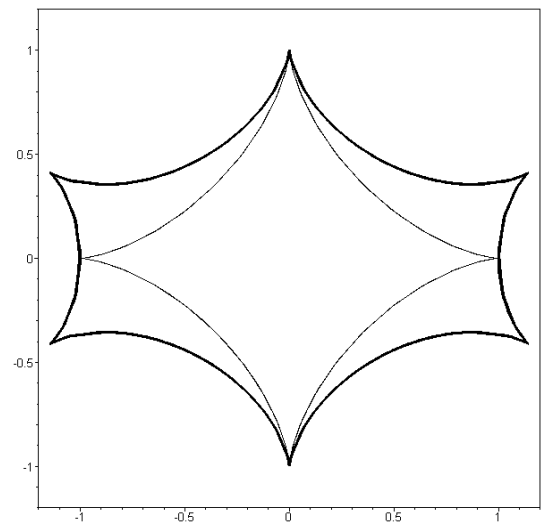


Рис.7. Катакаустика астроида

Пример 8. Пусть отражающей кривой есть трехлепестковая роза, уравнение которой $x = \sin t - \sin 2t$; $y = \cos t + \cos 2t$. На рис. 8. изображена ее катакаустика.

Пример 9. Пусть отражающей кривой есть «петля» $x = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$; $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}$.

На рис. 9. изображена ее катакаустика.

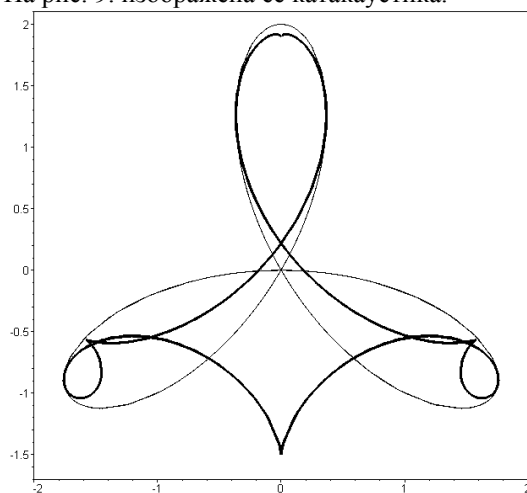


Рис.8. Катакаустика трехлепестковой розы

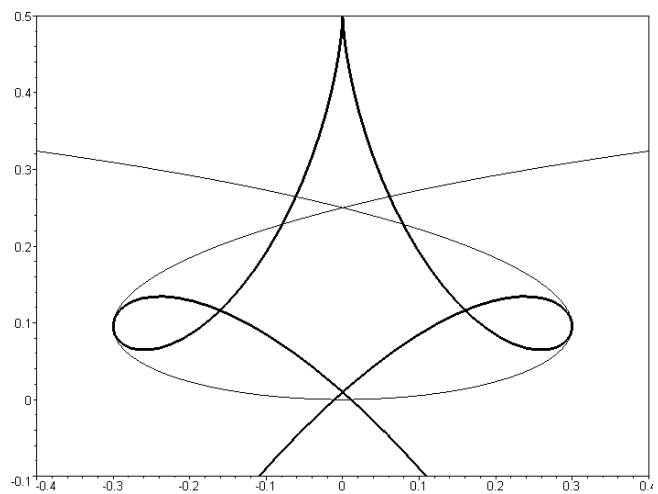


Рис.9. Катакаустика «петли»

ЛИТЕРАТУРА

1. Підгорний О.Л., Куценко Л.М. Опис подери, ортотоміки і катакаустики як елементів відбивальної системи // Труды / Таврическая государственная агротехн. академия. - вып. 4, Том 10. - Мелитополь: ТГАТА, 1999 - С. 14 - 18.