

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон
для довідок:
(061) 228-76-28

Факс: (061) 764-45-46

В і с н и к

Запорізького національного університету

- **Фізико-математичні науки**

№ 2, 2015

Запоріжжя 2015

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – 264 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 8 від «31» березня 2015 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	кандидат технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І.,	доктор технічних наук, професор
	Тамуров Ю.М.,	доктор фізико-математичних наук, професор
	Клименко М.І.,	кандидат фізико-математичних наук, доцент
	Швидка С.П.,	кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Павленко А.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)

ЗМІСТ

АБРОСОВ Ю.Ю., МАКСИМЮК В.А., ТАРАСЮК В.С. ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ.....	5
АКУЛЕНКО Л.Д., ЛЕЩЕНКО Д.Д., КОЗАЧЕНКО Т.А. ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗКИХ К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ.....	10
БУДАК В.Д., ГРИГОРЕНКО О.Я., БОРИСЕНКО М.Ю., БОЙЧУК О.В. ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК КРУГОВОГО ТА НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРИ РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ.....	20
ВЕТРОВ О.С., ШЕВЧЕНКО В.П., РУСАКОВ В.Ф. ДИНАМИКА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК	28
ГАЧКЕВИЧ О.Р., СОЛОДЯК М.Т., МАХОРКІН М.І., ТОРСЬКИЙ А.Р., СТАНІК-БЕСЛЕР А. ПРО ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗА ЧАСОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ	36
ГЛУХОВ Ю.П. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ	46
ГРИГОРЕНКО А.Я., ЛОЗА И.А. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИМЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛОМ СЛОИСТОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СЛОЕВ, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ.....	53
ГРИГОРЕНКО А.Я., ПАРХОМЕНКО А.Ю., ВАСИЛЬЕВА Л.Я. РАСЧЕТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ И УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛЕЙ.....	62
ЄМЕЦЬ О.О., ОЛЬХОВСЬКИЙ Д.М. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ І НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ ВІДСІКАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ.....	73
ЗЕЛЕНСЬКИЙ А.Г. ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ЗГИНУ ВАРІАНТА МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНИХ ПЛАСТИН.....	80
КАГАДІЙ Т.С., БІЛОВА О.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ДО ДВОМІРНИХ ЗАДАЧ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	88
КАЛОЕРОВ С. А., ЗАНЬКО А. И., КОШКИН А. А. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ОСНОВАНИЮ УСИЛИЙ.....	95
КОНОНОВ Ю.Н., РУСАКОВ В.Ф., ДЖУХА Ю.А. ОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ	106
КУРЕННОВ С.С. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ.....	116
ЛАВІНСЬКИЙ Д.В., МОРАЧКОВСЬКИЙ О.К. ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СИСТЕМ ТІЛ ПРИ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ ...	125
МИХЛИН Ю.В., КЛИМЕНКО А.А., ПЛАКСИЙ Е.Ю. РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ.....	136
НОВИКОВ А.В., ПОТАПОВИЧ Л.П. ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛИСТОВ КОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ УКРАИНЫ.....	143
НОВІКОВА Ю.В., ЗУЄВ О.Л. СТАБІЛІЗАЦІЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ	149

ОБОДАН Н.И., ГРОМОВ В.А. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ	162
ОНИЩЕНКО И.С., ЧЕРНЯКОВ Ю.А., ШНЕЙДЕР В.П. КОНЕЧНАЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ	172
ОПАНАСОВИЧ В.К., НИКОЛИШИН М.М., СЛОБОДЯН М.С., АЛЬФАВИЦЬКА С.О. ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ КОНТАКТУЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ	182
ПРОЦЕНКО В.С., УКРАИНЕЦ Н.А. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ	193
ROMANUKE V.V. FINITE APPROXIMATION OF UNIT-HYPERCUBIC INFINITE NONCOOPERATIVE GAME VIA DIMENSION-DEPENDENT IRREGULAR SAMPLINGS AND RESHAPING THE PLAYER'S PAYOFFS INTO LINE ARRAY FOR SIMPLIFICATION AND SPEEDUP	202
СЕНЧЕНКОВ И.К., ЧЕРВИНКО О.П., ДОЛЯ Е.В. РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЦИЛИНДРА ПРИ МНОГОСЛОЙНОМ НАРАЩИВАНИИ ЖИДКИМ МЕТАЛЛОМ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОСЛЕДУЮЩЕМ ЦИКЛИЧЕСКОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	222
СКЛЕПУС С.Н. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ	234
ЧЕРНЯКОВ Ю.А., ШЕВЧЕНКО А.Г. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ФОРМЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЫ РАЗРЫВА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	244
ЩЕРБАКОВА Ю.А., ШЕХВАТОВА Е.М. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НДС МНОГОСВЯЗНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ	253
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»	262

УДК 539.37

ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

¹Абросов Ю. Ю., аспірант, ²Максимюк В. А., д. ф.-м. н., ³Тарасюк В. С., к. ф.-м. н.

^{1,2}*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

³*Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна*

¹devlpr@bk.ru, ²desc@inmech.kiev.ua, ³vastar2004@ukr.net

Привернуто увагу до одновимірної класичної задачі теорії оболонок про деформування довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перетину. Стисло описано історію аналітичних розв'язків проблеми. На числовому прикладі показано, що ця інженерна задача може бути тестом для чисельних методів через наявність мембранного замикання. Продемонстровано характер збіжності чисельних розрахунків до аналітичного розв'язку.

Ключові слова: еліптичний циліндр, напружено-деформований стан, мембранне замикання.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДЛИННОЙ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

¹Абросов Ю. Ю., аспирант, ²Максимюк В. А., д. ф.-м. н., ³Тарасюк В. С., к. ф.-м. н.

^{1,2}*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

³*Национальный авиационный университет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина*

¹devlpr@bk.ru, ²desc@inmech.kiev.ua, ³vastar2004@ukr.net

Привлечено внимание к одномерной классической задаче теории оболочек о деформировании длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Коротко описана история аналитических решений проблемы. На числовом примере показано, что данная инженерная задача может быть тестом для численных методов из-за наличия мембранного запириания. Продемонстрирован характер сходимости численных расчетов к аналитическому решению.

Ключевые слова: эллиптический цилиндр, напряженно-деформированное состояние, мембранное запириание.

DEFORMATION OF A LONG THIN CYLINDRICAL SHELL WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION

¹Abrosova Yu. Yu., postgraduate, ²Maksimiyuk V. A., D.Sc. in Physics and Maths,

³Tarasjuk V. S., Ph.D. in Physics and Maths

^{1,2}*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

³*National Aviation University,
Cosmonaut Komarov ave. 1, Kyiv, 03058, Ukraine*

¹devlpr@bk.ru, ²desc@inmech.kiev.ua, ³vastar2004@ukr.net

Attention to the one-dimensional classical problem in the shell theory on a deformation of a long cylindrical shell with elliptical cross-section is attracted. Design of the long cylindrical shells with elliptical cross-section is of importance from an engineering point of view. In addition, there is another aspect of importance. The fact that the analytical solutions are used as tests for numerical methods. They are especially valuable to the problems of mechanics, for which are inherent the so-called locking effects. Just such is the problem of deformation under internal pressure of the long cylindrical shell with the elliptical cross-section, that is due to a dominance of bending comparing with membrane deformation. This problem can complete a collection of so-called pathological tests.

This one-dimensional problem has century and a half. But the first analytical solutions were too simplistic. For example, the Bresse solution (1866) for the shell under internal pressure predicts of a different sign (rightly so), but equal in the absolute value (this is simplified) bending moments and deflections near the major and minor axes. Correct results, it is obvious the first time (1933), were obtained by Timoshenko. He have created a table of some coefficients which enable to calculate bending moments for a number of values of semi-axis ratios. The procedure for obtaining the coefficients was not presented and has remained unknown.

The computing phenomena of the membrane locking is demonstrated in the variational-difference method based on a mixed functional in which the geometric part of Kirchhoff-Love hypotheses implemented with method of Lagrange multipliers. A slowed and however stable convergence for numerical calculations of the stress-strain state to the analytic solution is shown.

To improve the convergence a mixed functional is proposed, in which the membrane deformation varies additionally. From the point of view of the locking phenomenon the two-dimensional deformation of a cylindrical shell with supported ends to be an easier problem by reducing the bends.

Key words: elliptical cylinder, stress-strain state, membrane locking.

ВСТУП

У сучасній інженерній справі широко застосовуються циліндричні оболонки. В авіаційній техніці та в ракетобудуванні елементи конструкцій можуть мати форму оболонок з некруговими поперечними перетинами, що виявляється вигіднішим від оболонок з круговими поперечними перетинами. У ряді випадків вони виявляються міцнішими, стійкішими і легшими [1]. Некругові поперечні перетини таких конструкцій часто бувають еліптичні або овальні різного типу. У коротких оболонок торці певним чином закріплюються, тому напружено-деформований стан (НДС) у них буде двовимірний. У довгих оболонках НДС у будь-якому поперечному перетині можна вважати однаковим, тому теоретична задача статики буде одновимірною. На перший погляд двовимірні задачі мають бути складнішими від одновимірних. Проте це справедливо для аналітичних методів, а для чисельних залежить від особливостей деформування оболонок та від ефективності методів.

Крім того, що розрахунок довгих циліндричних оболонок еліптичного перетину є актуальним з інженерного погляду, існує ще один аспект актуальності. Річ у тім, що аналітичні розв'язки мають цінність як тести для чисельних методів. Особливо цінними вони є для задач механіки, яким притаманні явища замикання [2]. Саме такою є задача про деформування під внутрішнім тиском довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу, що обумовлено великими згинами за малих розтягів. Ця одновимірна задача має півтора столітню історію [3, с. 326-338]. Проте перші аналітичні розв'язки були надто спрощені. Згаданий розв'язок [3] для оболонки під внутрішнім тиском давав значення різного знаку (це є правильним), але рівні за абсолютною величиною (це є спрощено) моменти й переміщення в двох перетинах площинами симетрії. Подальшу історію розвитку аналітичних та графічних методів можна знайти в праці [4].

Коректні результати, очевидно вперше (1933), були отримані С.П. Тимошенком і опубліковані в першому виданні монографії [5]. Моменти обчислювались за допомогою таблиці деяких коефіцієнтів для ряду значень співвідношень півосей еліпса. Процедура отримання коефіцієнтів не наводилась і залишилась невідомою.

Основна увага в цій праці направлена на точність результатів та збіжність чисельного методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у декартовій системі координат (x, y, z) рівняння серединної поверхні замкнутої довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перетину (рис. 1) має вигляд:

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

де a і b – півосі еліпса.

Цю поверхню віднесемо до криволінійної системи координат (s, z, γ) , у якій координата γ направлена по нормалі до поверхні, а s – довжина дуги еліпса, що відраховується від точки $(x=0, y=b)$ за годинниковою стрілкою (рис. 1). Очевидно, що обидва коефіцієнти першої квадратичної форми в цій системі будуть дорівнювати одиниці $A_s = A_z = 1$, а кривина твірної нульова.

За допомогою оригінального алгоритму чисельної дискретизації плоскої кривої [6] рівняння (1) можна подати в параметричному вигляді:

$$x = x(s), \quad y = y(s). \quad (2)$$

Причому форма залежностей (2) може бути як табличною, так і алгоритмічною. Тоді кривина еліпса обчислюватиметься за формулою

$$k = x'y'' - x''y'. \quad (3)$$

Символ «штрих» в (3) і в подальшому позначає диференціювання по координаті s .

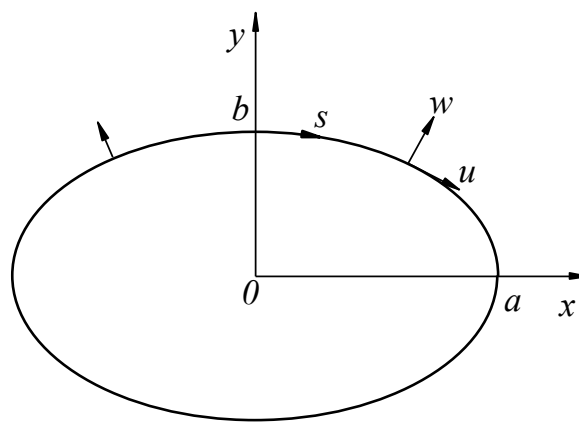


Рис. 1. Поперечний перетин циліндричної оболонки

Нехай під дією сталого і рівномірного внутрішнього тиску p в ізотропній однорідній пружній тонкій оболонці постійної товщини h виникають малі переміщення в поперечному перетині, а вздовж осі z переміщення відсутні. Тоді компоненти НДС залежатимуть тільки від координати s . Очевидно, замкнута оболонка намагатиметься набрати близьку до кругової форму, що приведе до великих згинів поблизу точок перетину еліпса площинами симетрії. Для розрахунку НДС за таких умов доцільно скористатися геометрично лінійною теорією тонких оболонок з використанням змішаного функціонала для спрощення реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява [2].

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій серединної поверхні і переміщеннями та кутом повороту визначаються формулами:

$$\varepsilon = u' + kw; \quad \kappa = \varphi', \quad (4)$$

де u , w – компоненти вектора переміщень вздовж осей (s, γ) відповідно. Для гіпотез Кірхгофа-Лява кут φ в (4) задається [2] за допомогою методу множників Лагранжа з умов рівності нулеві деформації поперечного зсуву

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varphi + w' - ku = 0. \quad (5)$$

Мембранна деформація довільної точки по товщині $(\gamma = \text{const})$ перетину оболонки, коли не враховується зміна метрики по товщині, виражається формулою:

$$e = \varepsilon + \gamma \kappa. \quad (6)$$

У довгій оболонці виникають поперечні

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} e \quad (7)$$

і поздовжні $\sigma_z = \nu \sigma_s$ напруження, де E та ν – модуль пружності та коефіцієнт поперечної деформації ізотропного матеріалу. Напруження (7) замінюються середніми по товщині внутрішніми зусиллям та моментом:

$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon, \quad M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa. \quad (8)$$

Чисельний метод будуватиметься на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [2]

$$\Pi(u, w, \varphi, T_{sy}^f) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (T\varepsilon + M\kappa - 2pw) d\Omega + \iint_{\Omega} T_{sy}^f \varepsilon_{sy} d\Omega. \quad (9)$$

Функціонал (9) є сумою енергії деформації оболонки та додаткової умови для реалізації геометричної частини (5) гіпотез Кірхгофа-Лява методом множників (T_{sy}^f) Лагранжа. Він залежить від чотирьох варіюваних функцій: двох переміщень, кута повороту та зусилля T_{sy}^f , яке має фізичний зміст перерізуючої сили. Переваги такої побудови функціонала викладено в [2].

Слід відмітити використання в (9) позначень верхнім індексом для зусилля, що підкреслює відмінність між зусиллям-формулою й зусиллям-функцією і має певне методологічне значення для запису крайових умов та під час побудови алгоритму.

З умови стаціонарності функціонала $\delta\Pi = 0$ випливають природні статичні крайові умови, а головні геометричні умови [2] у випадку симетрії, наприклад, мають вигляд:

$$u = 0, \quad \varphi = 0, \quad T_{sy}^f = 0. \quad (10)$$

Для знаходження стаціонарних значень функціонала (9) використовується варіаційно-різницький метод (ВРМ), який дає систему лінійних алгебраїчних розв'язувальних рівнянь з симетричною матрицею [2].

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

Розраховано НДС оболонки з такими геометричними параметрами: $h = 0,01$ м; $a = 1$ м; $b = 0,5$ м. Матеріал оболонки – сталь з $E = 210$ ГПа; $\nu = 0,3$. Навантаження – $p = 10$ кПа. Внаслідок симетрії задачі (рис. 1) відносно площин $x = 0$ та $y = 0$ розглядалась чверть області $s \in [0, s_k]$, де $s_k = 1,211$ м – чверть периметра еліпса, який обчислено згаданим алгоритмом [6] чисельної дискретизації кривої (1). Тим же алгоритмом ця дуга еліпса розбивалась на K вузлових точок з рівномірним кроком. Диференціювання в (3) виконувалось чисельно за різницевиими формулами.

Практична збіжність результатів розрахунків НДС зі збільшенням кількості вузлів K показана в табл. 1, де наведено безрозмірні угини, напруження на зовнішній (σ^+), серединній (σ^0) і внутрішній (σ^-) поверхні оболонки та моменти в точках $\tilde{s} = s/s_k = 0$ (коротка піввісь) і $\tilde{s} = 1$ (довга піввісь).

У двох останніх рядках табл. 1 наведено: точні значення напружень $\sigma^0(0) = pb/h$ і $\sigma^0(s_k) = pa/h$; моменти $M(0) = 0,629pb^2$ і $M(s_k) = -0,870pb^2$, куди входять табличні

числові коефіцієнти з монографії [5] для випадку $b/a = 0,5$; обчислені відповідно з (6) і (8) за попередніми величинами (σ^0, M) напруження $\sigma^+ = \sigma^0 + 6M/h^2$ і $\sigma^- = \sigma^0 - 6M/h^2$.

Таблиця 1 – Збіжність результатів розрахунків НДС

K	$\tilde{S}$	w/h	σ^+ , МПа	σ^0 , МПа	σ^- , МПа	M , Н
641	0	2,20	87,88	0,5794	-86,72	1455
	1	-1,01	-109,4	0,6081	110,6	-1833
1281	0	2,36	93,03	0,5273	-91,97	1541
	1	-1,10	-124,0	0,8922	125,7	-2080
2561	0	2,41	94,47	0,5127	-93,45	1566
	1	-1,12	-128,0	0,9724	130,0	-2150
5121	0	2,42	94,85	0,5088	-93,84	1572
	1	-1,13	-129,1	0,9931	131,1	-2168
10241	0	2,42	94,96	0,5077	-93,94	1574
	1	-1,13	-129,3	0,9981	131,3	-2171
[5]	0	-	94,85	0,5	-93,85	1572,5
	1	-	-129,5	1,0	131,5	-2175

Результати розрахунків у табл. 1 демонструють зі згущенням сітки сповільнену, але стійку збіжність розрахованих ВРМ компонент НДС до аналітичного розв'язку [5]. Збіг у двох значущих цифрах максимальних величин угинів, напружень чи моментів досягається вже при $K = 2561$, а збіг мембранних напружень σ^0 у серединній поверхні – дещо пізніше при $K = 5121$. При $K < 321$ настільки проявляється завищена фіктивна жорсткість оболонки, що в обчислених моментах біля більшої півосі змінюється знак. Такі негативні обчислювальні ефекти обумовлені великими згинами за малих розтягів і називаються мембранним замиканням або виродженням [2].

ВИСНОВКИ

Продемонстровано обчислювальне явище мембранного замикання у ВРМ на основі змішаного функціонала, у якому геометрична частина гіпотез Кірхгофа-Лява реалізована методом множників Лагранжа. Показано сповільнену, але стійку збіжність чисельних розрахунків НДС до аналітичного розв'язку. Очевидно, для покращення збіжності доцільно використати змішані функціонали, у яких додатково варіюється мембранна деформація. З погляду явищ замикання двовимірне деформування циліндричної оболонки з закріпленими торцями буде простішою задачею за рахунок зменшення згинів через підкріплюючу дію торців. Ця задача може доповнити колекцію так званих патологічних тестів [7].

ЛІТЕРАТУРА

1. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey / K. P. Soldatos // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237-274.
2. Maximyuk V. A. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maximyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 613-687.
3. Bresse J. A. C. H. Cours de mécanique appliquée. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions / J.A.C.H. Bresse. – Deuxième Édition. – Paris : Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.

4. Holland M. Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function / M. Holland // J. Mech. Engng Sci. – 1976. – 18, N 5. – P. 245-253.
5. Timoshenko S. Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems / S. Timoshenko. – 2nd Ed. – New York : D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
6. Chernyshenko I. S. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials / I.S. Chernyshenko, V.A. Maksimuk // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 1. – P. 90-97.
7. Mallikarjuna Rao K. A set of pathological tests to validate new finite elements / K. Mallikarjuna Rao, U. Shrinivasa // Sadhana. – 2001. – 26. – P. 549-590.

REFERENCES

1. Soldatos, K.P. (1999), “Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey”, *Appl. Mech. Rev.* vol. 52, no. 8, pp. 237-274.
2. Maksimuk, V.A., Storozhuk, E.A. and Chernyshenko, I.S. (2012), “Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review)”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 48, no. 6, pp. 613-687.
3. Bresse, J.A.C.H. (1866), *Cours de mécanique appliquée. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions, Deuxième Edition*, Gauthier-Villars, Paris, France.
4. Holland, M. (1976), “Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function”, *J. Mech. Engng Sci.*, vol. 18, no. 5, pp. 245-253.
5. Timoshenko, S. (1941), *Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems, 2nd Ed*, D. Van Nostrand Company, New York, USA.
6. Chernyshenko, I.S. and Maksimuk, V.A. (2000), “On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials”, *Int. Appl. Mech.* vol. 36, no. 1, pp. 90-97.
7. Mallikarjuna Rao, K., Shrinivasa, U. (2001) “A set of pathological tests to validate new finite elements”, *Sadhana*. vol. 26, pp. 549-590.

УДК 531.381

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗКИХ К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

¹Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., профессор, ²Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., профессор,

²Козаченко Т. А., к. ф.-м. н., доцент

¹Институт проблем механики РАН,

просп. Вернадского, 101, корп.1, Москва, 119526, Россия

²Одесская государственная академия строительства и архитектуры,

ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65029, Украина

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Рассматриваются возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа. Проведено усреднение уравнений движения по быстрой переменной – углу нутации. Рассмотрены механические модели возмущений.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, метод усреднения, псевдорегулярная прецессия.

ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАНЬ ВОВЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗЬКИХ ДО ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЇ ПРЕЦЕСІЇ

¹Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., професор, ²Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., професор,

²Козаченко Т. О., к. ф.-м. н., доцент

¹*Інститут проблем механіки РАН,*

просп. Вернадського, 101, корп.1, Москва, 119526, Росія

²*Одеська державна академія будівництва та архітектури,*

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, 65029, Україна

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Розглядаються збуджені рухи твердого тіла, близькі до псевдорегулярної прецесії у випадку Лагранжа. Проведено усереднення рівнянь руху за швидкою змінною – кутом нутації. Розглянуто механічні моделі збуджень.

Ключові слова: вовчок Лагранжа, метод усереднення, псевдорегулярна прецесія.

EVOLUTION OF ROTATION OF LAGRANGE TOP, CLOSE TO PSEUDOREGULAR PRECESSION

¹Akulenko L. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

²Leshchenko D. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, ²Kozachenko T. A., Associate Professor

¹*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,*

Vernadskogo prosp., 101, block 1, Moscow, 119526, Russia

²*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture,*

Didrikhsona str., 4, Odessa, 65029, Ukraine

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Paper [1] is a brief survey of some theoretical results in area of dynamics of the rigid body with one fixed point from view point of the applications to the mechanics of space flight. Only the papers are mentioned here, that are the most close to the results of author and his colleagues.

The authors investigated some new problems of the motion of a rigid body about a fixed point under the action of perturbation torques of forces of different physical nature. The motion with the moment of external forces in Lagrange's case is considered as a nonperturbed motion. The influence of the perturbations is determined by the averaging method for the Lagrange-Poisson motion [3]. The paper [3] develops an approximate solution to a specific set of dynamic equations. These equations are the basic Euler equations with the symmetric heavy mass assumption and an additional εM_i perturbation term (where ε is a small quantity). It is further assumed that the problem can be decomposed into slowly and quickly changing variables, that one quickly changing variable (θ , the nutation angle) has 2π periodicity, and thus that averaging with respect to θ can be accomplished with a small resulting error in the results. The averaging technique reduces the system order from 6 to 3, making the system autonomous, and does not contain fast oscillations. The averaged system of equations of the first approximation is got for slow variables where: G_z is the projection of the angular momentum vector onto the vertical, H – the body's total energy, r is the projection of the angular velocity vector onto the axis of dynamic symmetry.

The authors investigated perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case. The averaged systems of equations of motion is obtained in the first and second approximations [4, 5]. The authors investigated perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case when the restoring torque depends on the nutation angle. Analogously to the case of constant restoring torque, the averaged systems of equations of motion is obtained and investigated in the first and second approximations. For the motion under the action of the resistance torque, applied by the medium, and the torque that is constant in body-connected axes, we have found out the evolution of the precession and nutation angles [7].

In this paper the perturbed motions of Lagrange top similar to pseudoregular precession, are investigated.

1. In this paper a class of rotations of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point has been investigated.

2. An averaging procedure has been developed for the resulting essentially nonlinear systems.

3. We consider mechanical models of perturbations related to rigid body motion in the following cases: the linear-dissipative medium or under the action of a torque that is constant in the attached axes.

Key words: Lagrange top, averaging method, pseudoregular precession.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии. При этом в качестве порождающего (опорного) движения, учитывающего основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту сил тяжести, создается также аэродинамическими силами, действующими на тело в потоке среды. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, исследовались в целом ряде работ по динамике твердого тела, движущегося относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной физической природы. Исследования в этой области востребованы в связи с развитием современной техники. В статье [1] дается обзор работ, опубликованных до 1998 года по проблеме эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа. При изучении данной темы были предложены различные методы исследований. Одним из которых является метод усреднения [2]. С помощью данного метода изучается эволюция вращения волчка Лагранжа [3-8], получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближении. В настоящей статье продолжены и развиты исследования возмущенного вращательного движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, начатые в работе [6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется возмущенное движение относительно неподвижной точки O динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -mgl \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; ψ, θ, φ – углы Эйлера; величины εM_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений; m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O .

Ставится задача исследования поведения решения системы (1.1) при значениях ε , отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ с помощью метода усреднения [2]. Исследованию возмущенных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, посвящены работы [3-10].

Приведем необходимые для процедуры усреднения соотношения для невозмущенного движения. Первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ являются [11, 12]:

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + mgl \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i ($i=1,2,3$) – произвольные постоянные ($c_2 \geq -mgl$).

Соотношения между корнями кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} \left[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2 \right]$$

и первыми интегралами (1.2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{H}{mgl} - \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{C^2 r^2}{2Amgl}, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 &= \frac{G_z Cr}{Amgl} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{H}{mgl} + \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{G_z^2}{2Amgl}, \\ -1 &\leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В работе делаются следующие исходные предположения: $p^2 + q^2 \ll r^2$, $Cr^2/2 \gg mgl$, которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии. Движение твердого тела в этом случае будет соответствовать псевдорегулярной прецессии [11].

Известны [11] приближенные выражения для угла нутации θ и корней u_i ($i=1,2,3$) в невозмущенном движении:

$$\begin{aligned} u &\approx u_0 - \frac{1 - u_0^2}{2d} \cos^2(\alpha t + \beta), \quad u_1 \approx u_0 - \frac{1 - u_0^2}{2d}, \quad u_2 = u_0, \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1} \ll 1, \quad u_3 \approx 2d, \quad u_1 \ll u_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $u_0 = \cos \theta_0$, θ_0 – начальный угол отклонения; $2d = \frac{C^2 r_0^2}{2Amgl} \gg 1$, r_0 – большая начальная скорость вращения тела вокруг своей оси; $\alpha = [mgl(u_3 - u_1)/(2A)]^{1/2}$, k – модуль эллиптических функций.

Переменные φ и ψ получаются квадратурами из следующих уравнений [12]:

$$\dot{\varphi} = r - \frac{(G_z - Cru)u}{A(1 - u^2)}, \quad \dot{\psi} = \frac{G_z - Cru}{A(1 - u^2)}. \quad (1.5)$$

Формулы (1.2)-(1.5) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в случае псевдорегулярной прецессии.

Корни кубического многочлена u_1, u_2 выражаются через первые интегралы уравнений движения невозмущенной системы из (1.3) с учетом (1.4), где

$$u_3 \approx \frac{C^2 r_0^2}{2Amgl}, \quad u_1 = s \mp \sqrt{s^2 - n}, \quad u_2 = s \pm \sqrt{s^2 - n}. \quad (1.6)$$

Здесь $s = (4Amgl)^{-1} [2AH + C(C - A)r_0^2 - C^2 r_0^2]$, $n = C^{-2} r_0^{-2} (-2AH + ACr_0^2 + G_z^2)$.

В рассматриваемой задаче параметр ε характеризует малость возмущений. Так как модуль эллиптических функций $k^2 \ll 1$, то можно положить, что $k^2 \sim \delta \ll 1$ (δ характеризует аппроксимацию порождающего решения). При $\varepsilon < \delta$ или $\varepsilon \sim \delta$ усреднение оправдано.

2. ПРОЦЕДУРА УСРЕДНЕНИЯ

В работе применяется методика усреднения, разработанная Л. Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноушко [3]. Уравнения возмущенного движения приводим к виду, допускающему применение одночастотной процедуры метода усреднения [2]. Выделим быстрые и медленные переменные, при этом первые интегралы (1.2) для возмущенного движения (1.1) являются медленными переменными, а в случае псевдорегулярной прецессии угол прецессии ψ – также медленная переменная [12]. Быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ и угол нутации θ .

Первые три уравнения (1.1) приведем с помощью ряда преобразований к виду [3]:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta], \\ \dot{H} &= \varepsilon (M_1 p + M_2 q + M_3 r), \\ \dot{r} &= \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и в трёх последних уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (1.2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$ и подставлены в (1.1), (2.1).

Правые части уравнений (2.1) содержат две быстрые переменные θ, φ , что представляет трудность для применения метода усреднения, связанную с возможностью появления нелинейных резонансов. Потребуем, чтобы правые части уравнений (2.1) для медленных переменных зависели лишь от одной быстрой переменной – угла нутации θ и были бы периодическими функциями с периодом 2π . Тогда уравнение (2.1) можно усреднить по θ и получить уравнение первого приближения.

Приведем некоторые достаточные условия возможности усреднения уравнений (2.1) только по углу нутации θ . Потребуем, чтобы путем тождественных преобразований комбинации $M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi$, $M_1 p + M_2 q$, M_3 , входящие в правые части уравнений (2.1), могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации θ , периодические по θ с периодом 2π , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил:

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*(G_z, H, r, \theta), \\ M_1 p + M_2 q &= M_2^*(G_z, H, r, \theta), \\ M_3 &= M_3^*(G_z, H, r, \theta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из соотношений (1.2) и (2.2) видим, что если возмущающие моменты M_i удовлетворяют условиям

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta) \quad (2.3)$$

или условиям

$$M_1 = F \sin \varphi, \quad M_2 = F \cos \varphi, \quad M_3 = M_3^*, \quad (2.4)$$

где произвольные функции f, F, M_3^* зависят только от G_z, H, r, θ и периодичны по θ с периодом 2π , то налагаемые требования (2.2) выполняются.

Таким образом, достаточными условиями усреднения уравнений медленных переменных (2.1) по углу нутации θ являются требования (2.3) или (2.4), налагаемые на моменты приложенных сил. В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия (2.2) или, в частности, достаточные условия (2.3) или (2.4), что обеспечивает справедливость соотношений (2.2).

Система (2.1) тогда может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \theta), \quad F_1 = M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь F_1, F_2, F_3 – 2π -периодические функции θ .

Процедура усреднения уравнений (2.5) для медленных переменных G_z, H, r первого приближения состоит в следующем [2]. Подставим в правые части системы (2.5) быструю переменную θ из первого выражения (1.4) для невозмущенного движения

$$\theta = \arccos \left[u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d} \cos^2(\alpha t + \beta) \right]. \quad (2.6)$$

Усредняя правые части полученной системы по t , получим с учетом (1.3), (1.4) усредненную систему первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon V_1(G_z, H, r), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2(G_z, H, r), \quad \dot{r} = \varepsilon V_3(G_z, H, r), \\ V_i(G_z, H, r) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} F_i(G_z, H, r, \theta(t)) dt, \quad i=1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.7)$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (2.7) подставлено выражение (2.6).

Согласно предлагаемой методике, исследование возмущенного движения Лагранжа, близкого к псевдорегулярной прецессии, проводится следующим образом. Пусть возмущающие моменты εM_i удовлетворяют условиям (2.2) или в частности, (2.3), (2.4) (вместе с (2.5)). Вычислим функции M_i^*, F_i ($i=1, 2, 3$) при помощи соотношений (2.2), (2.5). После этого усредним, согласно (2.7), функции F_i , используя выражения (1.4), (2.6), и составим усредненную систему. Система (2.7) значительно проще, чем исходная система (1.1), так как она имеет третий порядок вместо шестого, автономна и не содержит быстрых осцилляций.

Вопрос о близости решений системы (2.5) и усредненной системы (2.7) в случае решения θ вида (2.6), имеющего погрешность $O(\delta)$, где $\delta \ll 1$ малый параметр, рассматривается в [13].

На интервале времени порядка ε^{-1} оценка близости решений систем (2.5), (2.7) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения δ и малого параметра ε , характеризующего величину возмущений [13].

После исследования и решения системы (2.7) для G_z, H, r медленные переменные u_1, u_2 определяются по формулам (1.6).

3. ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТА

Исследуем возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Считаем, что возмущающие моменты M_i ($i=1,2,3$) имеют вид [14]:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br, \quad a, b > 0, \quad (3.1)$$

где a, b – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (3.1) удовлетворяют достаточным условиям (2.3), (2.4) возможности усреднения только по углу нутации θ . Система (2.1) для моментов указанного вида записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon [a(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + br \cos \theta], \\ \dot{H} &= -\varepsilon [a(p^2 + q^2) + br^2], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} br. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проинтегрировав третье уравнение (3.2), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения, $\tau = \varepsilon t$ – медленное время):

$$r = r_0 \exp(-bC^{-1}\tau). \quad (3.3)$$

В первых двух уравнениях (3.2) выполним усреднение согласно (2.7), подставляя вместо r его выражение (3.3). После ряда преобразований усредненная система первого приближения принимает вид (штрихом обозначено дифференцирование по τ):

$$\begin{aligned} G'_z &= -aA^{-1}G_z - \frac{b-aCA^{-1}}{4Amgl} r_0 \exp(-bC^{-1}\tau) [2AH + Cr_0^2(C-A)\exp(-2bC^{-1}\tau) - C^2r_0^2], \\ H' &= -aA^{-1}H + \left[\frac{aC^2}{2A^2} + \frac{aC}{2A} - b \right] r_0^2 \exp(-2bC^{-1}\tau) - \frac{aC^2r_0^2}{2A^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение системы (3.4) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} G_z &= -\frac{C^3r_0^3}{2Amgl} \exp(-bC^{-1}\tau) + \mu \frac{(bA-aC)Cr_0}{2bmgl} \exp[-\tau(aA^{-1}+bC^{-1})] \\ &\quad - \xi \exp(-3bC^{-1}\tau) + \eta \exp(-aA^{-1}\tau), \\ H &= \frac{(aC^2+aAC-2bA^2)Cr_0^2}{2A(aC-2bA)} \exp(-2bC^{-1}\tau) - \frac{C^2r_0^2}{2A} + \mu \exp(-aA^{-1}\tau), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= H_0 - \frac{Cr_0^2}{2} - \frac{bC^2r_0^2}{aC-2bA}, \quad \xi = \frac{C^3r_0^3(aC-bA)^2}{2Amgl(aC-2bA)(aC-3bA)}, \\ \eta &= G_{z_0} + \frac{C^3r_0^2}{2Amgl} - H_0 \frac{(bA-aC)Cr_0}{2bmgl} + \frac{C^2r_0^3[A(aC-3bA)(2bC-2bA+aC)-2bC(aC-bA)]}{4bAmgl(aC-2bA)(aC-3bA)}. \end{aligned}$$

Здесь H_0, G_{z_0} – произвольные начальные значения полной энергии тела и проекции вектора кинетического момента на вертикаль Oz .

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r и проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz монотонно уменьшаются по экспонентам согласно (3.3), (3.5). Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -C^2 r_0^2 / 2A$. Из (1.6) с учетом (3.3), (3.5) следует, что величины u_1, u_2 монотонно убывают и стремятся к

$$u_1 = -\frac{C^2 r_0^2}{A m g l} \mp \sqrt{\left(\frac{C^2 r_0^2}{A m g l}\right)^2 - 1}, \quad u_2 = -\frac{C^2 r_0^2}{A m g l} \pm \sqrt{\left(\frac{C^2 r_0^2}{A m g l}\right)^2 - 1}.$$

4. ДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА, ПРИЛОЖЕННОГО ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ

Рассмотрим движения твердого тела, близкие к псевдoreгулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты M_i ($i = 1, 2, 3$) в этом случае имеют вид:

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = M_3^0 = \text{const} \quad (4.1)$$

и удовлетворяют достаточным условиям (2.3), (2.4) возможности усреднения по углу нутации. Система (2.1) для моментов (4.1) записывается следующим образом:

$$\dot{G}_z = \varepsilon M_3^0 \cos \theta, \quad \dot{H} = \varepsilon M_3^0 r, \quad \dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3^0. \quad (4.2)$$

Проинтегрировав третье уравнение (4.2), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r = \varepsilon C^{-1} M_3^0 t + r_0. \quad (4.3)$$

С учетом (4.3) уравнения для полной энергии (4.2), сохраняя члены порядка ε , интегрируется и дает:

$$H = \varepsilon r_0 M_3^0 t + H_0. \quad (4.4)$$

Усредняя правую часть первого уравнения (4.2) согласно (2.7), получим в результате интегрирования:

$$G_z = \frac{\varepsilon M_3^0 t}{2 m g l} \left(H_0 - \frac{C r_0^2}{2} \right) + G_{z_0}. \quad (4.5)$$

Согласно (4.3), величина $|r(t)|$ возрастает, если параметры r_0, M_3^0 имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны. Из (4.4) следует, что величина $|H(t)|$ возрастает, если у параметров H_0, M_3^0 одинаковые знаки, и убывает если разные. Согласно (4.5) величина $|G_z(t)|$ возрастает, если параметры $G_{z_0}, M_3^0 (H_0 - C r_0^2 / 2)$ имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны.

ВЫВОДЫ

1. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдoreгулярной прецессии в случае Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений медленных переменных по углу нутации. В отличие от [3,8], в качестве порождающего решения берется не общее решение в случае Лагранжа, выражающееся в эллиптических функциях, а приближенное, представляемое в элементарных функциях.

2. Согласно используемой методике, полученная усредненная система уравнений первого приближения значительно проще исходной, так как автономна и не содержит быстрых осцилляций.
3. В качестве примеров рассмотрены механические модели возмущений, отвечающие движению тела в среде с линейной диссипацией, а также под действием постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии. Усредненная система уравнений интегрируется и позволяет определить полную энергию тела, проекцию вектора кинетического момента на вертикаль и угловую скорость вращения тела относительно оси симметрии в аналитическом виде. Полученные решения имеют самостоятельное значение для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа / Д.Д. Лещенко // Российско-американский журнал «Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, методы, эксперимент». – 1998. – Вып. 2.(6). – С. 32-37.
2. Волосов В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М. : Изд-во МГУ, 1971 – 507 с.
3. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, №5. – С. 771-778.
4. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С. 3-10.
5. Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа / Д.Д. Лещенко, А.С. Шамаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №6. – С.8-17.
6. Лещенко Д. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдoreгулярной прецессии / Д.Д. Лещенко, С.Н. Саллам. – Одесса 1988. – 18 с. – Деп. в УкрНИНТИ 28.06.1988, №1656 – Ук.88.
7. Akulenko L. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments / Akulenko L. Leshchenko D, Kushpil T. and Timoshenko I // Multibody System Dynamics. – 2001. – Vol. 6, №1. – P. 3-16.
8. Козаченко Т. А. Возмущённые вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов / Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Вісник Одеського нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2011. – Т. 16, Вип. 16. – С. 152-157.
9. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V.V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – Vol. 4. – P. 35-57.
10. Simpson H. C. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction / H.C. Simpson, M.D. Gunzburger // J. Appl. Math. and Phys. – 1986. – Vol. 37, №6. – P. 867-894.
11. Магнус К. Гирискосп. Теория и применение / Курт Магнус. – М. : Мир, 1974. – 526 с.
12. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Гавриил Константинович Суслов. – М.-Л. : Гостехиздат, 1946. – 655 с.

13. Мухин Н. П. Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем / Н.П. Мухин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 51-54.
14. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / Владимир Николаевич Кошляков. – М. : Наука, 1985. – 288 с.

REFERENCES

1. Leshchenko, D.D. (1998), "The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case", *International Russian-American Scientific Journal "Actual problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment"*, issue 2(6), pp. 32-37.
2. Volosov, V.M. and Morgunov, B.I. (1971), *Metod osrednenia v teorii nelineynykh kolebatelnykh system* [Method of averaging in the theory of nonlinear oscillatory systems], Izdatelstvo MGU, Moscow, Russia.
3. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1979), "Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 43, no. 5, pp. 771-778.
4. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1986), "Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession", *Mechanics of Solids*, no. 5, pp. 3-10.
5. Leshchenko, D.D. and Shamaev, A.S. (1987), "Perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case", *Mechanics of Solids*, no. 6, pp. 8-17.
6. Leshchenko, D.D. and Sallam, S.N. (1988), "Perturbed motions of a rigid body similar to pseudoregular precession", *Dep. v UkrNIINTI* 28.06.1988, no. 1656. – Uk.88.
7. Akulenko, L., Leshchenko, D., Kushpil, T. and Timoshenko, I. (2001), "Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments", *Multibody System Dynamics*, vol. 6, no. 1, pp. 3-16.
8. Kozachenko, T.A., Leshchenko, D.D. and Rachinskaya, A.L. (2011), "Perturbed rotation of Lagrange top under the action of nonstationary dissipative torques", *Visnyk Odeskogo nationalnogo universytetu, Matematika i mekhanika*, vol. 16, issue 6, pp. 152-157.
9. Sidorenko, V.V. (1994), "Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium", *J. Nonlinear Sci.*, vol. 4, pp. 35-57.
10. Simpson, H.C. (1986), "A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction", *J. Appl. Math. and Phys.*, vol. 37, no. 6, pp. 867-894.
11. Magnus, K. (1971), *Giroskop. Teoriya i primeneniye* [Kreisel. Theorie und Anwendungen], Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
12. Suslov, G.K. (1946), *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics], Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, Russia.
13. Mukhin, N.P. (1985), "Simplified algorithm of asymptotic integration substantially of the nonlinear systems", *Mechanics of Solids*, no. 6, pp. 51-54.
14. Koshlyakov, V.N. (1985), *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in rigid body dynamics and the applied theory of gyroscopes. Analytical methods], Nauka, Moscow, Russia.

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК КРУГОВОГО ТА НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРИ РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

¹Будак В. Д., ²Григоренко О. Я., ¹Борисенко М. Ю., ¹Бойчук О. В.

¹Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,
вул. Нікольська, 24, Миколаїв, 54030, Україна

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

ayagrigorenko@yandex.ru; maxborisenko530@mail.ru

Визначаються частоти та форми вільних коливань тонких циліндричних оболонок кругового та еліптичного поперечного перерізу еквівалентної маси при різних граничних умовах на одному торці та вільному іншому. Дослідження проводилось за допомогою системи автоматизованого конструювання та виконання інженерного аналізу методом скінченних елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів. Отримані результати дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення їх з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

Ключові слова: власні частоти, форми коливань, кругова оболонка, еліптична оболонка, метод скінченних елементів.

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КРУГОВОГО И НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ РАЗНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

¹Будак В. Д., ²Григоренко А. Я., ¹Борисенко М. Ю., ¹Бойчук Е. В.

¹Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, Николаев, 54030, Украина

²Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

ayagrigorenko@yandex.ru; maxborisenko530@mail.ru

Определяются частоты и формы свободных колебаний тонких цилиндрических оболочек кругового и эллиптического сечения эквивалентной массы при различных граничных условиях на одном торце и свободном втором. Исследование проводилось с помощью системы автоматизированного конструирования и выполнения инженерного анализа методом конечных элементов – Femap с решателем NX Nastran. Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием обоснованной математической модели, корректностью постановки задачи, решением тестовых задач и практической сходимостью рассчитанных частот при применении метода конечных элементов. Полученные результаты дают возможность управлять спектром частот свободных колебаний оболочечных конструкций для исключения их из резонансного режима за счет вариации граничных условий, что является одной из актуальных проблем исследования прочности оболочечных конструкций.

Ключевые слова: собственные частоты, формы колебаний, круговая оболочка, эллиптическая оболочка, метод конечных элементов.

ABOUT FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS WITH CIRCULAR AND NON-CIRCULAR CROSS-SECTION UNDER DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

¹Budak V. D., ²Grigorenko A. Ya., ¹Borisenko M. Yu., ¹Boychuk O. V.

¹Sukhomlynsky National University of Mykolaiv, Mykolaiv, Ukraine

²Tymoshenk Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The process of finding free vibration frequencies and shapes of thin cylindrical shells with circular and elliptical cross-section of equivalent weight under different boundary conditions on the one end face is viewed in the article. The study was conducted with the usage of computer-aided design and performing an engineering analysis by the finite elements

method – Femap with NX Nastran solving. The selected method makes it possible to calculate the design of any form with different boundary conditions, and the user is able to evaluate the computer model behavior of product in actual use, check the design capacity without significant investment of time and budget. The reliability of the results is provided by reasonable mathematical model usage, correctness of the task, solution of the test problems and practical convergence of calculated frequencies by using the finite element method.

Analysis of the received results proved: the order of mode shapes occurrence and the frequency change pattern for circular and elliptical shells is the same for the same types of fixation; free vibration frequencies are the same under clamped and hinged boundary conditions, and under simply-supported and free boundary conditions. The lowest frequencies are observed at free end faces. Comparing frequencies of circular and elliptical shells with different ways of fixing the hinge on the plane curves of the one end face proved: the discrepancy of frequencies under different conditions of fixing the hinge does not exceed 18%; the highest frequencies are observed when the end face of the shell is hinged along its inner line.

The results of the research make it possible to operate free vibrations frequency spectrum of the shell structures to exclude it from the resonant mode by varying boundary conditions. This is one of the issues of the day of the research on shell structure strength.

Key words: frequencies, mode shapes, circular shell, elliptical shell, finite element method.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Сучасні оболонкові конструкції, залежно від їх функціонального призначення і умов експлуатації мають різну геометрично складну поверхню, некругові контури перерізу, різні граничні умови на торцях та інші особливості. Рациональне проектування таких оболонкових конструкцій пов'язане з дослідженням їх міцності, жорсткості та стійкості. Не менш важливим є визначення власних частот, особливо при дії змінного навантаження, оскільки при співпаданні частоти зовнішньої сили з власною частотою деталі або конструкції спостерігається руйнівне явище резонансу.

Метою цієї роботи є визначення частот та форм вільних коливань пружних ізотропних циліндричних оболонок кругового та еліптичного поперечного перерізу з одним вільним торцем та з різними видами граничних умов на іншому.

Задачам про вільні коливання кругових та некругових циліндричних оболонок з різними граничними умовами присвячена публікація [1]. Дослідження вільних коливань консольно закріплених тонких ізотропних еліптичних оболонок змінної товщини однакової маси на основі методу скінчених елементів та порівняння частот при однакових формах коливань для оболонок однакової геометрії для трьох різних матеріалів проводиться в [2]. У роботі [3] проводиться порівняння частот вільних коливань некругової оболонки, отриманих чисельним методом з частотами отриманими експериментально. Дослідженню методом сплайн-колокацій вільних коливань незамкнених еліптичних циліндричних оболонок при різних граничних умовах присвячена стаття [4].

Застосування для розв'язування задач механіки систем автоматизованого конструювання дає можливість розраховувати конструкцію будь-якої форми при різних граничних умовах завдяки використанню метода скінчених елементів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінчених елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran [5].

ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Рівняння руху оболонки за відсутності демпфування має вигляд:

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де $\mathbf{K}$ та $\mathbf{M}$ – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок усі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) у рівняння руху оболонки визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos), що вимагає менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам'яті на жорсткому диску) порівняно з іншими методами. Метод Ланцоша [6] дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм за реальний час, при цьому результати можна вважати практично точними для цієї дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$. Чим більшу кількість власних пар потрібно визначити, тим помітнішими виявляються переваги цього методу, він гарантує відсутність пропущених власних пар у досліджуваному частотному діапазоні, а також дозволяє аналізувати власні коливання закріплених систем.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

За допомогою системи Femap побудовано геометрію двох оболонок еквівалентної маси висотою $h = 120 \text{ мм}$ та товщиною $d = 2 \text{ мм}$ у вигляді циліндричних поверхонь кругового та еліптичного перерізів. Дослідження проводилися для обох оболонок за різних граничних умовах на торці $z = 0$ та вільному торці $z = h$. Варіанти граничних умов описуються так:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) жорстко закріплений контур (C) | $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0;$ |
| 2) шарнірно закріплений контур (Sc) | $u = v = w = 0;$ |
| 3) шарнірно опертий контур (S) | $u = v = 0;$ |
| 4) вільно опертий контур (Sf) | $u = v = \varphi_x = \varphi_y = 0;$ |
| 5) ковзаюче закріплення (Sl) | $w = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0;$ |
| 6) вільний (незакріплений) контур (F) | $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0, \varphi_z \neq 0,$ |

де $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – відповідно компоненти переміщень та кутів повороту для точок на торці.

За матеріал оболонки була обрана сталь 40Х з модулем Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,32$, густиною $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$. Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами з розміром сторони 1 мм.

РЕЗУЛЬТАТИ

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язком тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів.

За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань кругової ($R_c = 43,547 \text{ мм}$) циліндричної ізотропної оболонки при різних граничних умовах, які накладені на всю поверхню одного торця, інший торець в усіх випадках вільний. Резонансні частоти при кожному виді закріплення торця по площині та відхилення від частот

при жорсткому закріпленні у відсотках наведені в порівняльній таблиці 1, де m – кількість вузлів уздовж твірної, n – кількість вузлів по колу та у вигляді гістограм (рис. 1).

Таблиця 1 – Власні частоти круглої циліндричної оболонки при різних граничних умовах

m	n	Власні частоти $f, \text{Гц}$						$\varepsilon_{\text{закріплення}} = \frac{f_c - f_{\text{закріплення}}}{f_c} \times 100\%$				
		f_c	f_{Sc}	f_S	f_{Sf}	f_{Sl}	f_F	ε_{Sc}	ε_S	ε_{Sf}	ε_{Sl}	ε_F
1	4	1836	1836	755	755	719	716	0,0	58,9	58,9	60,8	61,0
1	6	2266	2266	2076	2076	2028	2022	0,0	8,4	8,4	10,5	10,8
1	8	3977	3977	3929	3929	3877	3867	0,0	1,2	1,2	2,5	2,8
1	10	6318	6318	6299	6299	6249	6231	0,0	0,3	0,3	1,1	1,4
1	12	9155	9155	9145	9145	9098	9072	0,0	0,1	0,1	0,6	0,9
2	4	6476	6476	6139	6139	2905	852	0,0	5,2	5,2	55,1	86,8
2	6	4812	4812	4316	4316	2671	2222	0,0	10,3	10,3	44,5	53,8
2	8	5302	5302	4990	4990	4228	4092	0,0	5,9	5,9	20,3	22,8
2	10	7231	7231	7057	7057	6551	6465	0,0	2,4	2,4	9,4	10,6
2	12	9935	9935	9826	9826	9392	9309	0,0	1,1	1,1	5,5	6,3

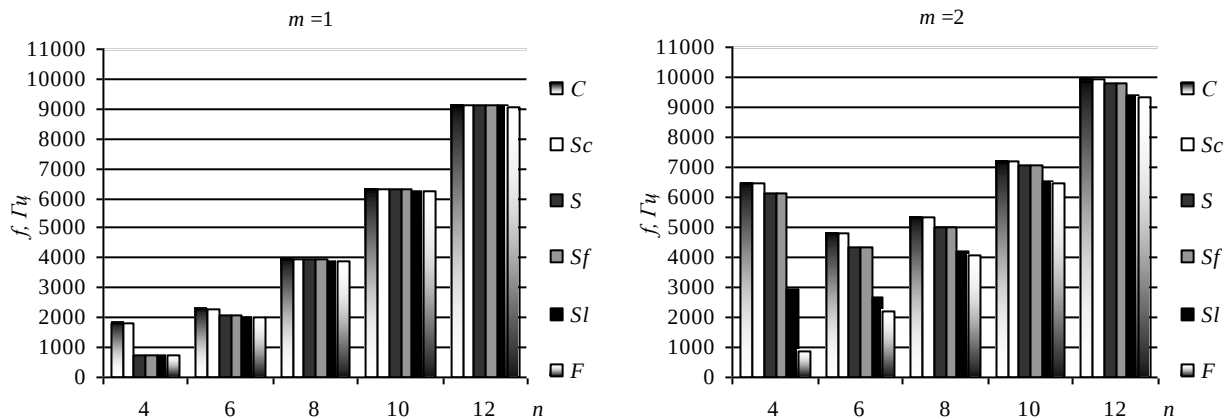


Рис. 1. Порівняльна гістограма власних частот кругової циліндричної оболонки при різних граничних умовах, накладених на площину торця

З таблиці 1 видно, що власні частоти кругової оболонки при жорсткому та шарнірному закріпленні торця по площині взагалі не відрізняються, тому є необхідним більш детально дослідити частоти при різних варіаціях шарнірного закріплення. Програмний засіб дозволяє накладати граничні умови не тільки на площини, але й на криві та точки, що належать тілу. Використовуючи цю можливість, накладемо умови шарнірного закріплення тільки на криві лінії поверхні торця оболонки в такій послідовності:

- шарнірне закріплення двох контурів торця оболонки (Sc_l^I);
- шарнірне закріплення зовнішнього контуру торця оболонки (Sc^I);
- шарнірне закріплення внутрішнього контуру торця оболонки (Sc_l).

Резонансні частоти кругової оболонки при різних видах шарнірного закріплення торця по кривим лініям та відхилення від частот оболонки при шарнірному закріпленні по площині у відсотках наведені в порівняльній таблиці 2 та у вигляді гістограм (рис. 2).

Таблиця 2 – Власні частоти кругової циліндричної оболонки при шарнірному закріпленні по різних кривим площини торця

m	n	Власні частоти $f, \text{Гц}$				$\varepsilon_{\text{крива}} = \frac{f_{Sc} - f_{Sc \text{ крива}}}{f_{Sc}} \times 100\%$		
		f_{Sc}	$f_{Sc_l^I}$	f_{Sc^I}	f_{Sc_l}	$\varepsilon_{Sc_l^I}$	ε_{Sc^I}	ε_{Sc_l}
1	4	1836	1815	1748	1520	1,14	4,79	17,21
1	6	2266	2260	2245	2171	0,26	0,93	4,19
1	8	3977	3975	3973	3943	0,05	0,10	0,85
1	10	6318	6317	6317	6301	0,02	0,02	0,27
1	12	9155	9154	9154	9145	0,01	0,01	0,11
2	4	6476	6446	6386	6137	0,46	1,39	5,23
2	6	4812	4790	4774	4406	0,46	0,79	8,44
2	8	5302	5290	5286	5026	0,23	0,30	5,21
2	10	7231	7225	7223	7063	0,08	0,11	2,32
2	12	9935	9932	9930	9825	0,03	0,05	1,11

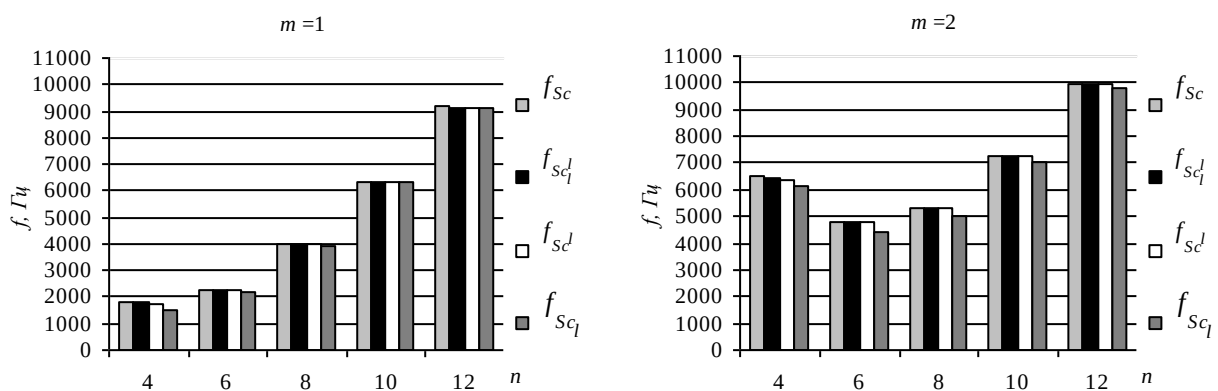


Рис. 2. Порівняльна гістограма власних частот кругової циліндричної оболонки при шарнірному закріпленні по різних кривим площини торця

Окрім кругової оболонки розглядається еліптична циліндрична ізотропна оболонка еквівалентної маси з піввіссю середньої поверхні $a_c = 50,810 \text{ мм}$ і $b_c = 36,285 \text{ мм}$ при таких самих граничних умовах. Резонансні частоти при кожному виді закріплення торця по площині з урахуванням відхилення від жорсткого закріплення у відсотках наведені в порівняльній таблиці 3 та у вигляді гістограм (рис. 3).

Таблиця 3 – Власні частоти еліптичної циліндричної оболонки при різних граничних умовах

m	n	Власні частоти $f, \Gamma\text{ц}$						$\varepsilon_{\text{закріплення}} = \frac{f_c - f_{\text{закріплення}}}{f_c} \times 100\%$				
		f_c	f_{Sc}	f_S	f_{Sf}	f_{Sl}	f_F	ε_{Sc}	ε_S	ε_{Sf}	ε_{Sl}	ε_F
1	4	1712	1712	728	728	692	690	0,0	57,5	57,5	59,6	59,7
1	6	2154	2154	1992	1992	1944	1938	0,0	7,5	7,5	9,7	10,0
1	8	3849	3849	3794	3794	3744	3732	0,0	1,4	1,4	2,7	3,0
1	10	6129	6129	6107	6107	6059	6041	0,0	0,4	0,4	1,1	1,4
1	12	8963	8963	8952	8952	8907	8883	0,0	0,1	0,1	0,6	0,9
2	4	6159	6159	5821	5821	2691	824	0,0	5,5	5,5	56,3	86,6
2	6	4488	4488	4046	4046	2544	2137	0,0	9,8	9,8	43,3	52,4
2	8	4895	4895	4639	4639	4416	3954	0,0	5,2	5,2	9,8	19,2
2	10	7072	7072	6882	6882	6366	6270	0,0	2,7	2,7	10,0	11,3
2	12	9748	9748	9631	9631	9196	9112	0,0	1,2	1,2	5,7	6,5

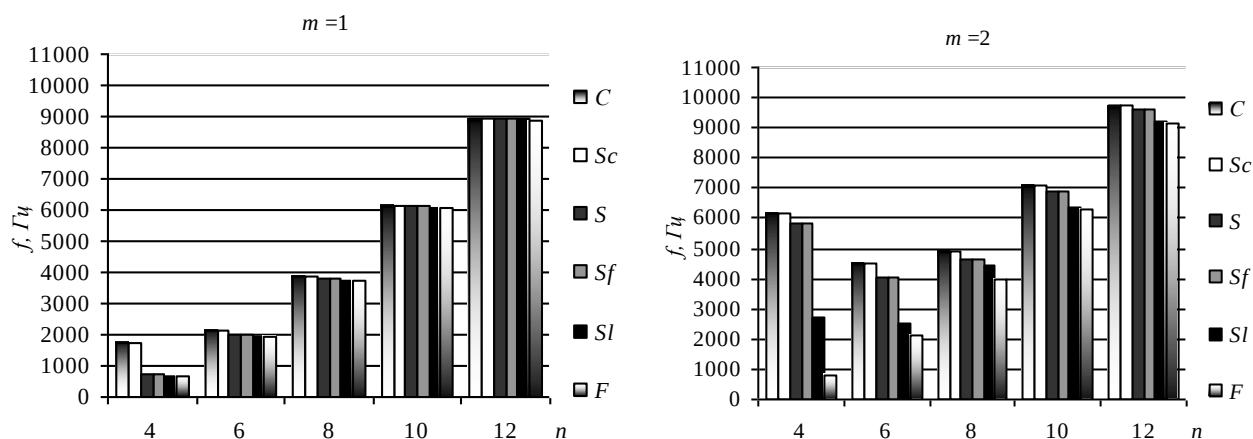


Рис. 3. Порівняльна гістограма власних частот еліптичної циліндричної оболонки при різних граничних умовах, накладених на площину торця

Резонансні частоти еліптичної оболонки при різних видах шарнірного закріплення торця по кривим лініям з урахуванням відхилення від шарнірного закріплення по площині у відсотках наведені в порівняльній таблиці 4 та у вигляді гістограм (рис. 4).

Таблиця 4 – Власні частоти еліптичної циліндричної оболонки при шарнірному закріпленні різних кривих ліній площини торця

m	n	Власні частоти f , Гц				$\varepsilon_{\text{закріплення}} = \frac{f_{Sc} - f_{Sc-\text{закріплення}}}{f_{Sc}} \times 100\%$		
		f_{Sc}	$f_{Sc_l^l}$	f_{Sc^l}	f_{Sc_l}	$\varepsilon_{Sc_l^l}$	ε_{Sc^l}	ε_{Sc_l}
1	4	1712	1693	1634	1420	1,11	4,56	17,06
1	6	2154	2149	2136	2058	0,23	0,84	4,46
1	8	3849	3848	3844	3815	0,03	0,13	0,88
1	10	6129	6128	6127	6112	0,02	0,03	0,28
1	12	8963	8962	8962	8953	0,01	0,01	0,11
2	4	6159	6133	6082	5833	0,42	1,25	5,29
2	6	4488	4470	4449	4127	0,40	0,87	8,04
2	8	4895	4884	4870	4651	0,22	0,51	4,98
2	10	7072	7064	7059	6898	0,11	0,18	2,46
2	12	9748	9744	9740	9635	0,04	0,08	1,16

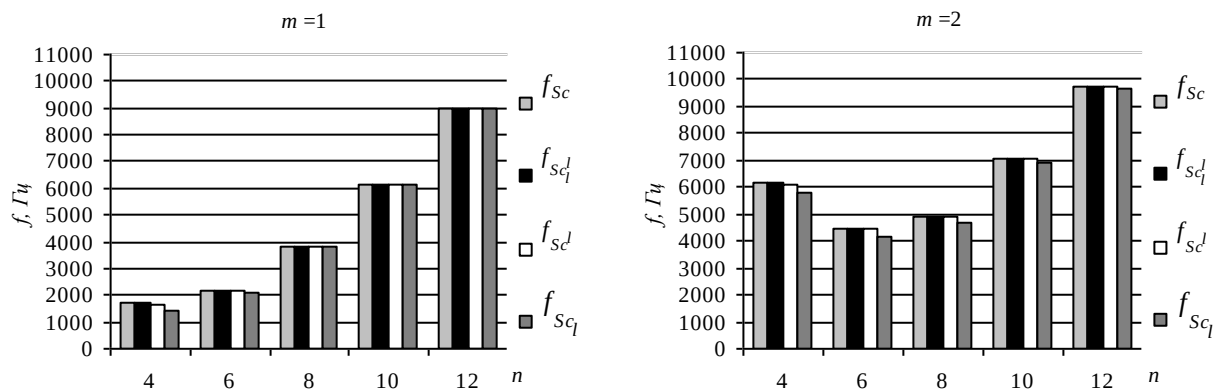
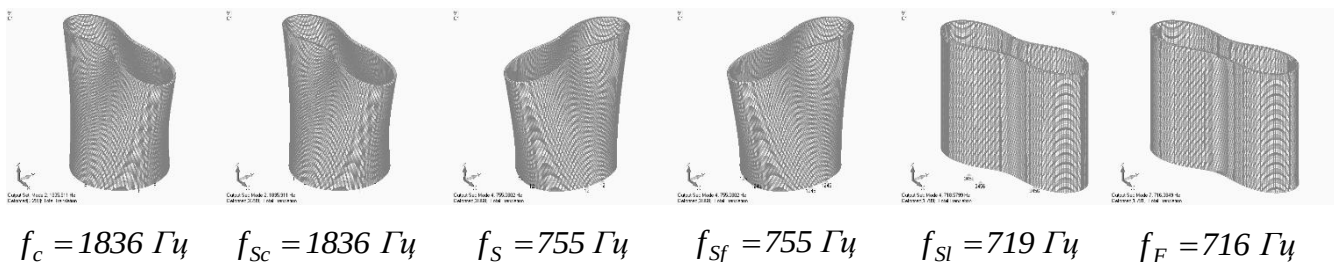


Рис. 4. Порівняльна гістограма власних частот еліптичної циліндричної оболонки при різних граничних умовах, накладених на площину торця

Форми коливань для оболонок з різними видами закріплення на деяких частотах зображено на рис. 5. Переміщення точок оболонок для візуалізації показані в десятикратному збільшенні.

$$m = 1, n = 4$$



$$m=2, n=4$$

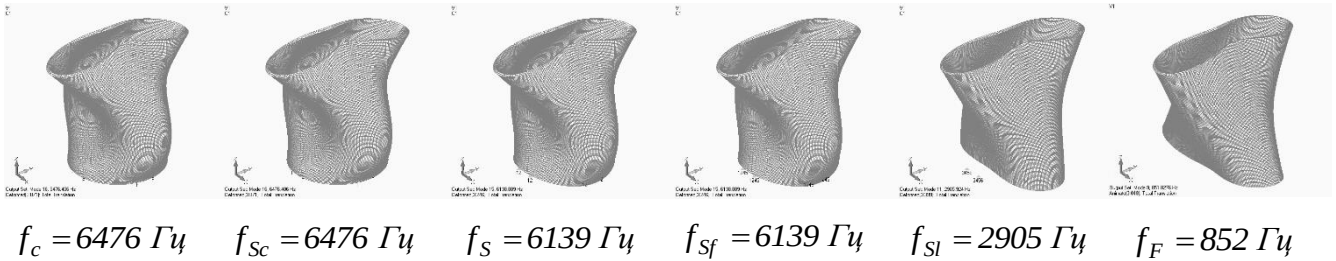


Рис. 5. Форми коливань для кругової оболонки з різними видами закріплення

ВИСНОВКИ

Проведено розрахунки вільних коливань кругової та еліптичної циліндричних оболонок еквівалентної маси при різних видах закріплення площини торця на основі методу скінченних елементів із застосуванням комплексу Femap. Аналіз отриманих результатів показав:

- порядок виникнення форм коливань для кругової та еліптичної оболонки однаковий при однакових видах закріплення;
- частоти при жорсткому та шарнірному закріпленні однакові (перша група закріплень);
- частоти при шарнірному обпиранні та вільному обпиранні однакові (друга група закріплень);
- частоти при ковзаючому закріпленні та незакріпленому контурі при $m=1$ практично однакові для всіх n , а при $m=2$ збіжність проявляється лише при $n > 8$ (третя група закріплень);
- значні відхилення частот різних груп закріплень спостерігаються на формах коливань з кількістю півхвиль по контуру $n=4$ і $n=6$;
- малі відхилення частот різних груп закріплень спостерігаються на формах коливань з кількістю півхвиль по контуру $n=10$ і $n=12$;
- найнижчі частоти спостерігаються при вільних торцях;
- характер зміни частот для обох оболонок однаковий.

Порівняння частот кругової та еліптичної оболонок при різних способах шарнірного закріплення по кривим площини торця показало:

- розбіжність частот при різних способах задавання шарнірного закріплення не перевищує 18%;
- найбільші частоти спостерігаються при шарнірному закріпленні по всій площині торця оболонки;
- найменші частоти спостерігаються при шарнірному закріпленні вздовж внутрішньої лінії торця оболонки.

Отримані результати дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек / С.В. Лекомцев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – 5, №2. – С. 233-243.

2. Буда́к В. Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В.Д. Буда́к, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – 2(32). – С. 32-37.
3. Буда́к В. Д. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Буда́к, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, №1. – С. 145-152.
4. Григоренко А. Я. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, №3. – С. 60-69.
5. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков. – К. : НТУУ «КПИ», 2011. – 317 с.
6. Papadrakakis M. Solving large-scale problems in mechanics / M. Papadrakakis. – Oxford, UK : Wiley, 1993.

REFERENCES

1. Lekomtsev, S.V. (2012), “Konechno-elementnyie algoritmy rascheta sobstvennyih kolebaniy trekhmernykh obolochek”, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 5 (2), pp. 233-243.
2. Budak, V.D., Grigorenko, A.Ya., Borisenko, M.Yu., and Boychuk, E.V. (2014), “Vil'ni kolivannia eliptichnoi obolonky zminnoi tovshchini”, *Visnyk Kyivs'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematyka. Mekhanika*, 2 (32), pp. 32-37.
3. Budak, V.D., Grigorenko, A.Ya., Borisenko, M.Yu., and Boychuk, E.V. (2014), “Opredelenie sobstvennyih chastot ellipticheskoy obolochki postoyannoy tolshchinyi metodom konechnyih elementov”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 57 (1), pp. 145-152.
4. Grigorenko, A.Ya., Puziriyev, S.V., and Volchek, E.A. (2011), “Issledovanie svobodnyih kolebaniy nekrugovyih tsilindricheskih obolochek s pomoshchyu metoda splayn-kollokatsii”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 54 (3), pp. 60-69.
5. Rudakov, K.N. (2011), *FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksiy* [Geometric and finite- element modeling of structures], NTUU «KPI», Kiev, Ukraine.
6. Papadrakakis, M. (1993), *Solving large-scale problems in mechanics*, UK: Wiley, Oxford.

УДК 393.3

ДИНАМИКА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Ветров О. С., ст. преподаватель,
Шевченко В. П., д. ф.-м. н., профессор, академик НАН Украины,
Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., профессор

Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

В статье рассмотрена задача о построении фундаментальных решений системы динамических уравнений теории тонких изотропных оболочек с учетом линейного демпфирования. Искомые решения были найдены путем совместного использования интегральных преобразований Фурье и Лапласа и методов теории специальных функций. Фундаментальные решения получены в форме, удобной для дальнейшего использования при решении начально-краевых задач теории тонких оболочек, и записываются в виде двойных

рядов по функциям Мейера. На основании полученных решений была исследована задача о действии на оболочку локальной нагрузки, распределенной по круговой области. Численно исследовано влияние геометрии оболочки на характер прогиба.

Ключевые слова: тонкая оболочка, фундаментальное решение, демпфирование, локальная нагрузка.

ДИНАМІКА ТОНКИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ДЕМПФУВАННЯ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Ветров О. С., ст. викл., Шевченко В. П., д. ф.-м. н., професор, академік НАН України,
Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., професор

*Донецький національний університет,
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

Розглянута задача про побудову фундаментальних розв'язків системи динамічних рівнянь теорії тонких ізотропних оболонок з урахуванням лінійного демпфування. Шукані розв'язки були отримані за допомогою спільного використання інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа і методів теорії спеціальних функцій. Фундаментальні розв'язки отримані у формі, що є зручною для подальшого їх використання в початково-крайових задачах теорії оболонок, і виражаються у вигляді подвійних рядів, членами яких є функції Мейера. Використовуючи отримані розв'язки, була досліджена задача про дію на оболочку локального навантаження, розподіленого по круговій області. Чисельно досліджений вплив геометрії оболонки на характер її прогину.

Ключові слова: тонка оболочка, фундаментальний розв'язок, демпфування, локальне навантаження.

DYNAMICS OF THIN SHELLS IN VIEW OF DAMPING UNDER THE ACTION OF LOCAL LOADS

Vetrov O. S., senior lecturer,
Shevchenko V. P., D.Sc. in Physics and Maths , professor, academician of the NAS of Ukraine,
Rusakov V. F., D.Sc. in Physics and Maths , professor

*Donetsk National University,
600-richya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

o.s.vetrov@gmail.com, o.vietrov@donnu.edu.ua

Study of the behavior of the thin shell under the action of external static and dynamic loads is an actually problem of the applied mechanics. Also control of damping in thin-walled structures is an important mechanics problem. The aim of this paper is to describe the development of the method of fundamental solutions (MFS) for the study of various problems of the dynamic theory of thin shells. Method of fundamental solutions is one of the most effective methods for solving various static and dynamic problems of the theory of thin anisotropic plates and shells as well as initial and boundary. The MFS has been adapted well for the solution of the dynamic equations of the theory of thin isotropic shells with the linear damping. Fundamental solutions are represented in the explicit analytical form. Solutions of the thin shells theory dynamic equations were constructed by using the Fourier and Laplace integral transformations and methods of the theory of special functions. Based on these solutions the problem of action at the local shell load distributed over a circular area was considered. The influence of the geometry of the shell on the dynamic deflection was numerically investigated. Conditions, under which the damping effect cannot be ignored, were obtained.

Key words: thin shell, the fundamental solution, MFS, damping, local load.

ВВЕДЕНИЕ

В прикладных задачах авиастроения, автомобилестроения, строительной механики часто стоит необходимость демпфирования колебаний, возникающих в тонкостенных конструкциях. В инженерной практике могут применяться различные механические методы демпфирования [1]. В частности, для оболочечных конструкций наиболее подробно изучены системы с вязким сопротивлением. Неисследованной, однако, остается задача о действии при этих условиях на оболочку локальной динамической нагрузки, распределенной по произвольной области. Актуальной остается проблема построения фундаментальных решений динамической теории оболочек для соответствующего класса задач.

В [2] представлены фундаментальные решения динамики тонких изотропных оболочек. Соответствующие результаты для случая ортотропии материала были получены авторами в [3, 4]. Позднее была дополнительно рассмотрена модель динамики оболочки с учетом упругого основания Винклера [5]. Фундаментальные решения динамических уравнений,

учитывающих демпфирование, для тонких оболочек отсутствуют. Построить указанные решения представляется возможным, расширив имеющуюся методику [2, 5, 6], как это уже было сделано ранее для частного случая сферической оболочки [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается тонкая полая оболочка постоянной толщины h , изготовленная из изотропного материала (рис. 1). Будем считать, что граничный контур оболочки существенно удален от начала координат. Краевые условия на границе оболочки заменим нулевыми условиями на бесконечности, т.е., рассматривается модель бесконечной оболочки.

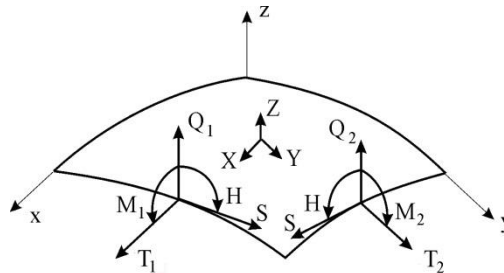


Рис. 1

Ограничимся рассмотрением тех задач, в которых оболочка в пределах рассматриваемой зоны возмущения напряженного состояния может быть корректно отнесена к прямоугольной системе координат (x, y) на плоскости. Коэффициенты Ламе в этом случае $A=B=1$, а радиусы кривизны оболочки R_1, R_2 являются постоянными величинами.

Введем обозначения: T_1, T_2, S – мембранные усилия; M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты; Q_1, Q_2 – перерезывающие силы. На рисунке 1 показаны положительные направления соответствующих внутренних силовых факторов оболочки. Проекции действующей на оболочку внешней нагрузки обозначены соответственно X, Y, Z .

Рассматриваем динамический процесс без учета распространения упругих волн. Система уравнений динамики тонких оболочек в классической постановке с учетом линейного демпфирования будет иметь вид:

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 N - (c^4 D R_2) \nabla_\lambda^2 w = 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w + R_2^{-1} \nabla_\lambda^2 N = Z - \mu \frac{\partial w}{\partial \tau} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad \nabla_\lambda^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \lambda \partial^2 / \partial y^2,$$

где N – функция напряжений; τ – время; μ – коэффициент демпфирования; ρ – плотность материала; D – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона. Также обозначено $\lambda = R_2 / R_1$, $c^4 = 12(1 - \nu^2)(R_2 h)^{-2}$. Начальные условия считаем нулевыми.

В (1) функция N введена через соотношения:

$$Eh \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right) - \frac{Eh}{R_1} w, \quad Eh \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - \frac{Eh}{R_2} w,$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

Представим внешнюю нагрузку в (1) в виде $Z(x, y, \tau) = \delta(x, y) \delta(\tau)$, где $\delta(\cdot)$ – обобщенная функция Дирака. Перейдем непосредственно к построению фундаментального решения искомой системы (1).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Перейдем в системе (1) к безразмерной системе координат (x_1, y_1, t)

$$x = x_1 c^{-1}, \quad y = y_1 c^{-1}, \quad \tau = t c^{-2} \sqrt{\rho h D^{-1}}. \quad (2)$$

Применим к системе (1)-(2) двойное преобразование Фурье $F[\cdot]$ и интегральное преобразование Лапласа $L[\cdot]$ по формулам

$$F[g(x_1, y_1)] = g^F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1) e^{i(\xi x_1 + \eta y_1)} dx_1 dy_1, \quad L[g(t)] = g^L(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Трансформанты функций напряжений и динамического прогиба в пространстве Фурье-Лапласа будут иметь вид:

$$\begin{aligned} w^{FL} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho h D}} w_1^{FL}, \quad w_1^{FL} = \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta}, \\ N^{FL} &= -\frac{c^2 R_2}{2\pi\sqrt{\rho h D^{-1}}} N_1^{FL}, \quad N_1^{FL} = \frac{(\xi^2 + \lambda \eta^2)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta = (\xi^2 + \eta^2)^4 + 2\mu's(\xi^2 + \eta^2)^2 + s^2(\xi^2 + \eta^2)^2 + (\xi^2 + \lambda\eta^2)^2$, $2\mu' = \mu c^{-2}(\rho h D)^{-1/2}$. Величины w_1^{FL} и N_1^{FL} введены для сокращения записей.

Знаменатель в (3) отличается от соответствующего [2, 6] наличием дополнительного слагаемого $2\mu's(\xi^2 + \eta^2)^2$, что требует несколько расширить существующую методику построения фундаментальных решений динамики тонких оболочек.

Методику обращения трансформант фундаментальных решений традиционно продемонстрируем на примере функции w_1 . Применим к (3) формулу обратного интегрального преобразования Фурье, и в результате соответствующих преобразований [2, 5, 6] получим:

$$w_1^L = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{J_{2n}(rR)R}{R^4 + K_\lambda^2(\theta) + 2\mu's + s^2} dR, \quad (4)$$

где δ_n^0 – символ Кронекера; $J_{2n}(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода [8]; $K_\lambda(\theta) = (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)$. Выражение (4) записано в полярных координатах $x_1 = r \cos \varphi$, $y_1 = r \sin \varphi$.

Применим к (4) формулу обратного преобразования Лапласа. Используя теорему Эфроса, получим:

$$L^{-1} \left[(s^2 + 2\mu's + K_\lambda^2(\theta) + R^4)^{-1} \right] = e^{-\mu't} \int_0^t I_0 \left(\vartheta \sqrt{t^2 - u^2} \right) \cos(R^2 u) du, \quad (5)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [8]; $\vartheta = \sqrt{\mu'^2 - K_\lambda^2(\theta)}$.

Подставим (5) в выражение (4) и после некоторых промежуточных вычислений получим:

$$\begin{aligned}
w_1(r, \varphi, t) e^{\mu' t} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \times \\
&\times r^{2m-1} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{m+1/2} \int_0^{\infty} R^{-m-1/2} J_{2n}(\sqrt{R}) J_{m+1/2}(t \cdot r^{-2} \cdot R) dR, \\
b_{mn}^{01}(\lambda, \mu') &= \int_0^{\pi/2} \left(\mu'^2 - (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)^2 \right)^m \cos 2n\theta d\theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Интегралы в соотношениях (6) вычислим по разработанной методике [2], основывающейся на теории специальных функций. Так:

$$\int_0^{\infty} R^{-m-1/2} J_{m+1/2}(t \cdot r^{-2} \cdot R) J_{2n}(\sqrt{R}) dR = \frac{r^{-2m+1}}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{m-1/2} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+1 \right] \right), \tag{7}$$

где G – функция Мейера [9].

Подставим (7) в (6) и получим окончательное выражение фундаментального решения:

$$w_1(r, \varphi, t) = \frac{e^{-\mu' t}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+1 \right] \right), \tag{8}$$

$$b_{mn}^{01}(\lambda, \mu') = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{\Gamma(2k+n+1)} \binom{m}{k} \lambda^k \mu'^{2m-2k} P_{2k}^n \left(\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \right), \tag{9}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $P_m^n(\cdot)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода [8]. Выделим два важных случая сферической ($\lambda=1$) и цилиндрической ($\lambda=0$) оболочек. Выражения для (9) упростятся и будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
b_{mn}^{01}(0, \mu') &= \pi \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{B^{-1}(2k+n+1, 2k-n+1)}{2^{4k+1} (4k+1)} \mu'^{2m-2k}, \\
b_{mn}^{01}(1, \mu') &= \frac{\pi}{2} (\mu'^2 - 1)^m \delta_n^0,
\end{aligned}$$

где $B(\cdot)$ – бета-функция [8].

Аналогично (8)-(9) получено фундаментальное решение для функции напряжений, которое для N_1 имеет вид:

$$N_1(r, \varphi, t) = \frac{e^{-\mu' t}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_n^0) \cos 2n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{mn}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1} G_{2,4}^{2,1} \left(\frac{r^4}{64t^2} \left[\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2} \right] \right), \tag{10}$$

$$d_{mn}^{01}(\lambda, \mu') = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+n+2)} \binom{m}{k} \lambda^k \mu'^{2m-2k} P_{2k+1}^n \left(\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \right). \tag{11}$$

Для оговоренных ранее частных случаев оболочек справедливо:

$$\begin{aligned}
d_{mn}^{01}(0, \mu') &= \pi \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{B^{-1}(2k+n+2, 2k-n+2)}{2^{4k+3} (4k+3)} \mu'^{2m-2k}, \\
d_{mn}^{01}(1, \mu') &= b_{mn}^{01}(1, \mu').
\end{aligned}$$

Соотношения (8)-(9) и (10)-(11) представляют собой фундаментальные решения искомой системы дифференциальных уравнений (1). Отметим, что при значении $\mu' = 0$ соотношения (8)-(11) совпадут с известными выражениями фундаментальных решений динамики оболочек без учета демпфирования [2]. Используя описанную методику, можно построить соответствующие выражения для перерезывающих сил, а также всех компонент фундаментальных матриц усилий и моментов.

В случае ортотропии материала (при сохранении остальных условий) методика построения фундаментальных решений в целом останется прежней. Дополнительно потребуются операция разделения переменных в специальной функции гипергеометрического вида, для чего была получена соответствующая «формула умножения» [3].

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что на оболочку действует внезапная локальная нагрузка единичной интенсивности вида:

$$q(r, t) = \begin{cases} -\frac{\delta(t)}{\pi R_0^2}, & r^2 \leq R_0^2, \\ 0, & r^2 > R_0^2. \end{cases} \quad (12)$$

Свертка полученного фундаментального решения (8)-(9) с (12) даст искомую функцию динамического прогиба, которая в точке приложения нагрузки будет иметь вид:

$$w_q(R_0, t) = -\frac{e^{-\mu' t}}{4\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{m0}^{01}(\lambda, \mu')}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,m+1} \right), \quad (13)$$

где $\vartheta = R_0^2 / (8t)$.

В случае импульсной нагрузки указанного вида необходимо (13) проинтегрировать по координате t .

На рисунке 2 показано влияние параметра μ' на значение прогиба $w_q(r, t)$. Прямой 1 соответствует случай $\mu' = 0.5$, прямой 2 – случай $\mu' = 0.25$, прямой 3 отвечает прогиб оболочки без учета демпфирования ($\mu' = 0$). Остальные параметры выбраны $\lambda = 0.25$, $R_0 = 2$. Как видно из рисунка при $t \ll 1$ учет демпфирования практически никак не влияет на результат. Влияние более 5% на прогиб $w_q(r, t)$ начинает проследиваться для прямых 1 и 3 при $t > 1/10$. С увеличением значения параметра μ' существенно уменьшается максимальное значение прогиба по абсолютному значению. Так, на рассматриваемом на рисунке 2 промежутке времени справедливо $\min(w_q)_{\mu'=0} \approx 1.3 \min(w_q)_{\mu'=0.25}$ и $\min(w_q)_{\mu'=0} \approx 1.6 \min(w_q)_{\mu'=0.5}$ соответственно.

Также исследуем влияние, которое отношение кривизн оболочки λ оказывает на величину прогиба. На рисунке 3 показаны случаи поведения прогибов для сферической и цилиндрической оболочек (возможный промежуточный вариант оболочки представлен на рис. 2). Случаю $\lambda = 1$ на рис. 3 соответствуют прямая 1 ($\mu' = 0$) и прямая 3 ($\mu' = 0.5$), а случаю $\lambda = 0$ – прямая 2 ($\mu' = 0$) и прямая 4 ($\mu' = 0.5$) соответственно. До значения $t = 1.5$ темп уменьшения значений прогиба по абсолютной величине практически одинаков для обоих случаев кривизны оболочек. С течением времени картина меняется. Отметим, что в процентном отношении максимальная разница между соответствующими значениями прогиба наблюдается для прямых 1 и 3, тогда как максимальная разница по абсолютному значению $w_q(r, t)$ достигается для случая цилиндрической оболочки (прямые 2 и 4). Из

анализа рисунка 3 видно, что значения $w_q(r, t)$ для прямой 4 всегда по абсолютному значению остается меньше значений прямой 2, тогда как прямые 1 и 3 несколько раз пересекаются при значениях $t > 2$. Таким образом процесс сглаживания колебаний на указанном промежутке t более сложен для случая сферической оболочки. При этом, по абсолютной величине, значения прямой 4 на рисунке 3 всегда превосходят соответствующие значения прямой 3. Таким образом, при одинаковом коэффициенте демпфирования μ' значение прогиба цилиндрической оболочки больше прогиба сферической оболочки для одинаковых моментов времени. Данный результат согласуется с [2].

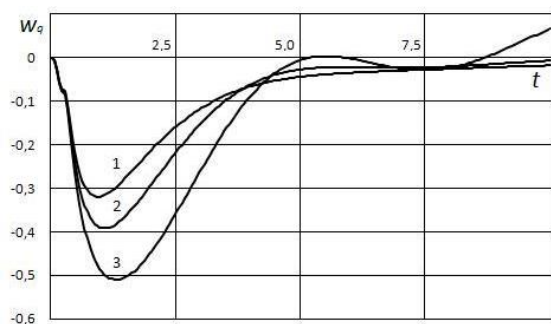


Рис. 2

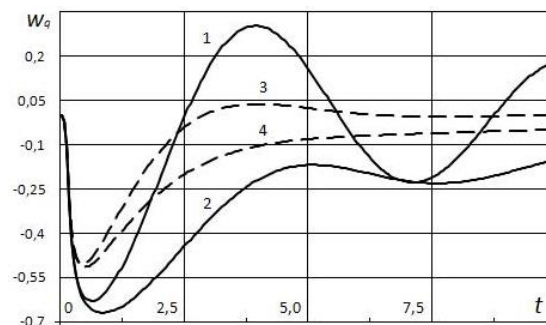


Рис. 3

В заключение сделаем замечание по поводу вычисления значения $w_q(r, t)$ при $t \rightarrow 0$. Системы компьютерной алгебры испытывают серьезные трудности с вычислением значения гипергеометрической функции в моментах времени близких к начальным. Одним способом решения проблемы является использование асимптотических выражений в нерегулярной точке. Другим способом является представление каждой конкретной функции Мейера в (13) через комбинации более простых функций (в том числе и специальных), для которых вычисление значений автоматизированными системами при $t \ll 1$ не представляет существенного труда. Так, например, в (13) для первых двух членов ряда

$$m=0 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,1} \right) = \pi - \vartheta - \vartheta \cos(2\vartheta) - 2\text{Si}(2\vartheta),$$

$$m=1 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{2,4}^{2,1} \left(\vartheta^2 \middle|_{0,0.5,0,-0.5}^{0.5,2} \right) = \\ = \frac{2}{3} (1.5\pi + \pi\vartheta^2 - 0.5\sin(2\vartheta) + \vartheta^{-1} - \vartheta^{-1}(1 + \vartheta^2)\cos(2\vartheta) - (3 + 2\vartheta^2)\text{Si}(2\vartheta)),$$

где $\text{Si}(\cdot)$ – интегральный синус [8].

ВЫВОДЫ

В статье получила дальнейшее развитие методика построения фундаментальных решений уравнений динамики тонких оболочек. Используя совместно теорию специальных функций и методологию обращения преобразования Лапласа, были получены новые соотношения фундаментальных решений оболочек с учетом демпфирования, которые хорошо согласуются с известными результатами.

На основании полученных решений, была решена задача о действии на оболочку внезапно приложенной локальной распределенной по кругу нагрузки. Проведены численные исследования, которые показали в частности, что при локальной нагрузке в близкие к начальным моменты времени эффект демпфирования можно не учитывать.

Проанализировано также влияние геометрии оболочки на характер процесса демпфирования.

Опираясь на полученные ранее результаты, можно утверждать, что описанная в статье методика в перспективе может получить эффективное развитие. Так, например, дополнительный учет в рассмотренной задаче влияния на прогиб оболочки упругого основания не приведет к изменению методики построения соответствующих фундаментальных решений. Более того, конечные соотношения будут незначительно отличаться от полученных в статье формул. Это позволяет говорить о некоторой «устойчивости» представленной методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бишоп Р. Е. Колебания / Р.Е. Бишоп. – М. : Наука, 1968. – 161 с.
2. Нагорная Р. М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек / Р.М. Нагорная, В.А. Цванг, В.П. Шевченко // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. – 1994. – № 3. – С. 173-180.
3. Ветров О. С. Динамическое деформирование пологих ортотропных оболочек под действием локальных нагрузок / О.С. Ветров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 89-96.
4. Vetrov O. S. Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads / O.S. Vetrov, V.P. Shevchenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, № 2. – P. 231-240.
5. Ветров О. С. Напряженно-деформированное состояние оболочек на упругом основании под действием локальных динамических нагрузок / О.С. Ветров // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : Материалы VII международной научной конференции. – 2013. – Т. 1. – С. 84-88.
6. Shevchenko V. P. Fundamental-solution methods in stress-concentration problems for thin elastic shells / V.P. Shevchenko // Int. Applied Mech. – 2007. – Vol. 43, № 7. – P. 707-725.
7. Ветров О. С. Фундаментальные решения динамических уравнений теории сферических оболочек с учетом демпфирования / О.С. Ветров // Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii. Book of Abstracts. – Donetsk, 2012. – P. 31-32.
8. Kristensson G. Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification / G. Kristensson. – Springer, 2010. – 216 p.
9. Mathai A. M. The H-function: Theory and Applications / A.M. Mathai, R.K. Saxena, H.J. Haubold. – Springer, 2010. – 270 p.

REFERENCES

1. Bishop, R.E. (1968), *Kolebaniya* [Vibration], Science, Moscow, USSR.
2. Nagornaya, R.M., Tsvang, V.A. and Shevchenko, V.P. (1994), “Fundamental solutions of the theory of shallow shells dynamic equations”, *Izvestiya AN USSR, Mehanika tverdogo tela*, no. 3, pp. 173-180.
3. Vetrov, O.S. (2012), “Dynamic deformation of shallow orthotropic shells under the action of local loads”, *Problemi obchislyvalnoyi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy*, iss. 20, pp. 89-96.
4. Vetrov, O.S. and Shevchenko, V.P. (2012), “Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 183, no. 2, pp. 231-240.
5. Vetrov, O.S. (2013), “Stress-strain state of shells on elastic foundation under the action of local dynamic loads”, *Aktualnyie problemy mehaniki deformiruemogo tverdogo tela: Materialy VII mezhdunarodnoy nauchnaya konferentsii*, vol. 1, pp. 84-88.
6. Shevchenko, V.P. (2007), “Fundamental-solution methods in stress-concentration problems for thin elastic shells”, *Int. Applied Mech.*, vol. 43, no. 7, pp.707-725.

7. Vetrov, O.S. (2012), "Fundamental solutions of the dynamic equations of the theory of spherical shells with the damping", *Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya.B. Lopatinskii. Book of abstracts*, pp. 31-32.
8. Kristensson, G. (2010), "Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification", Springer, Germany.
9. Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J (2010), "The H-function: Theory and Applications", Springer, Germany.

УДК 539.3, 538.54

ПРО ВПЛИВ ПЕРІОДИЧНОГО ЗА ЧАСОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ

¹Гачкевич О. Р., д. ф.-м. н., професор, ²Солодяк М. Т., к. ф.-м. н., ³Махоркін М. І., к. ф.-м. н.,
²Торський А. Р., к. т. н., ³Станік-Беслер А., Ph. D.

^{1,2,3}*Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна*

⁴*Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна*

⁵*Technical University in Opole, Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Запропоновано розрахункову модель визначення параметрів, які описують магнітне, температурне та фізико-механічні поля в електропровідному шарі, який знаходиться в гармонічному за часом магнітному полі. Отримано критерії, за якими визначають необхідність враховувати коливні складові температури та переміщень
Ключові слова: гармонічне за часом магнітне поле, коливні складові тепловиділень, динамічні члени задачі термопружності, пондеромоторна сила.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СЛОЯ

¹Гачкевич А.Р., д. ф.-м. н., профессор, ²Солодяк М. Т., к. ф.-м. н.,
³Махоркин Н. И., к. ф.-м. н., ⁴Торский А. Р., к. т. н., ⁵Станик-Беслер А., Ph. D.

^{1,2,3}*ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова 3-б, Львов, 79060, Украина*

⁴*ЦММ ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15, Львов, 79005, Украина*

^{1,5}*Technical University in Opole,
Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua,
5a.stanik-besler@po.opole.pl

Предложена расчетная модель определения параметров, описывающих магнитное, температурное и физико-механические поля в электропроводящем слое, который находится в гармоничном во времени магнитном поле. Получены критерии, при выполнении которых необходимо учитывать колебательные составляющие температуры и перемещений.
Ключевые слова: гармоническое во времени магнитное поле, колебательные составляющие тепловыделений, динамические члены задачи термоупругости, пондеромоторная сила.

ON INFLUENCE OF TIME-PERIODIC MAGNETIC FIELD ON THERMOELASTIC STATE OF ELECTROCONDUCTING LAYER

¹Hachkevych O. R., D. Sc., Professor, ²Solodiak M. T., Ph. D., ³Makhorkin M. I., Ph. D.
⁴Torskyi A. R., Ph. D., ⁵Stanik-Besler A., Ph. D.

^{1,2,3}*Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,
 3b Naukova str, Lviv, 79060, Ukraine*

⁴*Center of Mathematical Modelling within Ya. S. Pidstrygach
 Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
 15 D. Dudayeva str., Lviv, 79005, Ukraine*

⁵*Technical University in Opole,
 Liuboshitska str., 3, Opole, Poland*

1,2dept13@iapmm.lviv.ua; 3mahorkin@ukr.net, 4adrian@cmm.lviv.ua, 5a.stanik-besler@po.opole.pl

A refined calculation procedure of determination the thermoelastic state of electroconducting non-ferromagnetic layer in time-harmonic magnetic field is offered. It takes into account the oscillation components of heat releases and ponderomotive force and dynamic terms in the thermoelasticity problem. According to it from equations of electrodinamics the electromagnetic field in the stationary approximation is determined. Then the power of heat releases and density of ponderomotive force are determined according to the know formulas. In addition, both time independent and oscillation components are considered, and on the basis of thermoelasticity equation the temperature and displacements are calculated.

According to the relations obtained in the work the numerical studies are carried out for dependence on time of temperature and displacement change on the layer surface and also for distribution of time independent and oscillation components of temperature and displacements through the layer thickness for different values of the parameter of penetration depth of magnetic field into the medium. The conditions, under which the oscillation components in the expressions of thermoelastic state should be considered, are clarified.

By numerical experiment it is found out that: the thermoelastic state of nonferromagnetic conductive layer under the action of time-harmonic magnetic field depends essentially on the parameter H_0 (the amplitude of harmonic component of magnetic field intensity) and the relative depth of the magnetic field penetration $\delta = 1/\gamma$ ($\gamma = l\sqrt{\pi\lambda\mu_0\nu}$; μ_0 is the permeability of free space; λ is the electrical conductivity; ν is the frequency of oscillation of external magnetic field; l is the layer thickness); the contribution of ponderomotive force in thermoelastic state of electroconducting non-ferromagnetic bodies can always be neglected in comparison with heat releases; for small γ (up to 1% for $\gamma < 0,1$) both the stable component of the temperature and its oscillating component are to be considered (in this case the temperature and displacement are of explicitly oscillating nature); the values of frequency ν and the layer thickness l , for which both the stable component of the temperature and its oscillation component should be considered, are clarified.

Key words: time-harmonic magnetic field, oscillation components of heat release, dynamic terms of thermoelasticity problem, ponderomotive force.

ВСТУП

Індукційна технологія нагріву (ІН) широко використовується в промисловості, медицині чи побуті [1]. Такий широкий спектр застосувань зумовлений її перевагами в плані ефективності, економічності, швидкості нагріву та безпеки перед іншими технологіями нагрівання. Очевидно, що для точності контролю процесу нагріву необхідні ефективні математичні моделі, котрі описуватимуть термopужну поведінку електропровідних матеріалів у змінних за часом електромагнітних полях (ЕМП).

Дослідженню термopужного стану електропровідних неферромагнітних тіл у зовнішньому гармонічному за часом ЕМП (індукційному нагріву) присвячена фундаментальна монографія [2]. У даній роботі подано спрощену методику знаходження магнітоелектропружного стану, яка полягає в наступному. На першому етапі із рівнянь електродинаміки визначають ЕМП в усталеному наближенні. Після цього записують усереднені за період коливань зовнішнього ЕМП відповідні вирази для потужності тепловиділень і густини пондеромоторної сили. При цьому нехтують їх коливними (гармонічними) складовими. На другому етапі з рівняння

теплопровідності (у якому джерелами тепла є тепловиділення, визначені на першому етапі) знаходять температурне поле. На третьому етапі з рівнянь квазістатичної термопружності [2, 3] (нехтується динамічними членами, пондеромоторними силами та зв'язністю полів деформації та температури) розраховують переміщення та напруження. У рівняннях термопружності вирази для густини енергії беруть з першого, а вирази для температури – з другого етапів.

Останнім часом у літературі [1, 4-6] приділяють все більшу увагу чисельному розв'язанню задач про знаходження ЕМП та температури в електропровідних тілах при індукційному нагріві та їх експериментальній перевірці. Однак, недостатня увага приділена дослідженню механічних полів (напружень та переміщень), які можуть перевищувати допустимі значення, тобто переходити в зону пластичності та руйнування. Не завжди також враховують вклад коливних складових тепловиділень та пондеромоторної сили (чи не розрізняють їх та усереднені за часом) у термопружний стан таких тіл [6].

Для практичних потреб виникає необхідність розробити більш уточнену розрахункову модель, де враховувались би коливні складові тепловиділень і пондеромоторної сили, а також динамічні члени в квазістатичній задачі термопружності. Критеріальне обґрунтування такої моделі подано в роботі [7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається електропровідний шар товщиною l , віднесений до прямокутної безрозмірної системи координат (x, y, z) (рис. 1). На шар діє дотична компонента зовнішнього магнітного поля H_y на верхній поверхні

$$H_y(0; t) = H_0 \cos \omega t, \quad H_y(1; t) = 0. \quad (1)$$

Тут $\omega = 2\pi\nu$, ν – частота, t – час; H_0 – амплітуда гармонічної складової напруженості магнітного поля. Надалі індекс « y » опускатимемо.

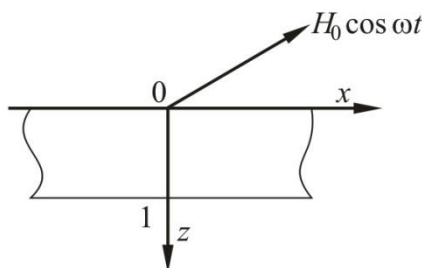


Рис. 1. Схема задачі

Напруженість магнітного поля $H(z; t)$ в області шару знаходимо з рівняння Максвелла, яке для даного випадку буде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала, λ – електропровідність.

Знаючи магнітне поле в області шару, потужність джоулевого тепла Q , густину енергії ЕМП W , запасеної в тілі, та густину пондеромоторної сили F знаходимо за формулами:

$$Q = \frac{1}{\lambda l^2} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2, \quad W = \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad F = -\frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (3)$$

Останнє співвідношення (3) дозволяє в цій моделі замість пондеромоторної сили F використовувати густину енергії ЕМП W , що в подальшому буде використано.

Визначаючи термопружний стан, вважатимемо, що на верхній основі шару відбувається конвективний теплообмін з довкіллям, температура якого дорівнює T_0 шару, а нижня – теплоізована. Прийmemo також, що основа $z=0$ вільна від силового навантаження, а $z=1$ жорстко скріплена з діелектричним півпростором.

Тоді температурне поле знаходимо з рівняння

$$\frac{1}{a_T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\kappa} \quad (4)$$

за таких початкової та крайових умов:

$$T(z;0) = T_0, \quad \frac{\partial T(0;t)}{\partial z} = Bi[T(0;t) - T_0], \quad \frac{\partial T(1;t)}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Тут κ і a_T – коефіцієнти тепло- і температуропровідності; Bi – критерій Біо.

У системі рівнянь термопружності матимемо ненульову компоненту переміщень $u_z = u(z;t)$ та три діагональних компоненти тензора механічних напружень σ_{xx} , σ_{yy} та σ_{zz} . Рівняння руху запишемо у вигляді:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz} - W) \quad (6)$$

за таких початкових та крайових умов

$$u(z;0) = \frac{\partial u(z;0)}{\partial t} = 0, \quad u(1;t) = 0, \quad \sigma_{zz}(0;t) = 0. \quad (7)$$

У формулах (4) і (6) у класичній теорії [2] значення Q і W усереднені за періодом коливань зовнішнього ЕМП.

Використовуючи закон Гука та співвідношення (6) і (7), отримаємо рівняння для переміщень

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{l^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} l \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_T T + \frac{1-2\nu_p}{E_p} W \right) \quad (8)$$

та крайові умови

$$u(1;t) = 0, \quad \frac{1}{l} \frac{\partial u(0;t)}{\partial z} = \frac{1+\nu_p}{1-\nu_p} \alpha_T [T(0;t) - T_0]. \quad (9)$$

Тут $c_1 = \sqrt{(1-\nu_p)E_p [\rho(1+\nu_p)(1+2\nu_p)]^{-1}}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль, ρ – густина.

2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Розв'язок задачі електродинаміки (1)-(2) подаємо у вигляді

$$H(z;t) = 0,5H_0 [h(z)e^{i\omega t} + \tilde{h}(z)e^{-i\omega t}]. \quad (10)$$

Тут тильда « $\sim$ » над величиною означає її комплексно спряжене значення; i – уявна одиниця.

Підставляючи подання (10) у співвідношення (1), (2), для функції $h(z)$ отримаємо таке звичайне диференціальне рівняння та граничні умови:

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = 2i\gamma^2 h, \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 0, \quad (11)$$

де $\gamma = l\sqrt{\pi\lambda\mu_0\nu}$, $\delta = 1/\gamma$ – відносна глибина проникання магнітного поля в середовище.

Розв'язок задачі (11) буде таким:

$$h(z) = \text{sh}[(1+i)\gamma(1-z)] \text{sh}^{-1}[(1+i)z]. \quad (12)$$

З формули (3) для тепловиділень Q та густини енергії ЕМП W , запасеної в тілі, матимемо

$$\Psi(z; t) = \bar{\Psi}(z) + \Psi_2(z)e^{2i\omega t} + \Psi_2(z)e^{-2i\omega t}, \quad (13)$$

де $\Psi \equiv \{Q; W\}$, $\bar{\Psi}(z)$ – усереднені величини по періоду коливань ЕМП; $\Psi_2(z)$ – їхні другі гармоніки.

Запишемо конкретні вирази величин

– усереднені значення:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(z) &= \frac{H_0^2}{2\lambda l^2} \frac{dh(z)}{dz} \frac{dh(z)}{dz} = \frac{\gamma^2 H_0^2}{\lambda l^2} \frac{\text{ch } 2\gamma(1-z) + \cos 2\gamma(1-z)}{\text{ch } 2\gamma - \cos 2\gamma}, \\ \bar{W}(z) &= \frac{\mu_0 H_0^2}{4} h(z) h(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{4} \frac{\text{ch } 2\gamma(1-z) - \cos 2\gamma(1-z)}{\text{ch } 2\gamma - \cos 2\gamma}, \end{aligned} \quad (14)$$

– гармонічні складові:

$$\begin{aligned} Q_2(z) &= \frac{H_0^2}{4\lambda l^2} \left(\frac{dh(z)}{dz} \right)^2 = \frac{i\gamma^2 H_0^2}{2\lambda l^2} \frac{\text{ch } 2(1+i)\gamma(1-z) + 1}{\text{ch } 2(1+i)\gamma - 1}, \\ W_2(z) &= \frac{\mu_0 H_0^2}{8} h^2(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{8} \frac{\text{ch } 2(1+i)\gamma(1-z) - 1}{\text{ch } 2(1+i)\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отримані вирази (14), (15), з урахуванням подання (13), входять у рівняння теплопровідності (4) та в рівняння для переміщень (8).

3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТА ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Температурне поле шукатимемо із задачі теплопровідності (4)-(5), у якій вираз для тепловиділень Q задається формулами (13)-(15). Використовуючи перетворення Лапласа за часом t [8], для функції $T(z; t)$ матимемо:

$$T(z; t) = T_0 + \bar{T}(z) + T_2(z)e^{2i\omega t} + T_2(z)e^{-2i\omega t} + T_*(z; t), \quad (16)$$

де $\bar{T}(z)$ – складова частина температури, спричинена усередненими тепловиділеннями $\bar{Q}(z)$; $T_2(z)$ – гармонічна складова, викликана коливними тепловиділеннями $Q_2(z)$; $T_*(z; t)$ – складова, що описує перехідний температурний режим.

Враховуючи подання (13) для густини енергії ЕМП та (16) – для температури, в аналогічному вигляді можна записати також і вигляд для переміщень:

$$u(z; t) = \bar{u}(z) + u_2(z)e^{2i\omega t} + u_2(z)e^{-2i\omega t} + u_*(z; t). \quad (17)$$

Зауважимо, що кожний член у поданні (17) має таку ж інтерпретацію, що й для температури в поданні (16).

Розв'язуючи задачу (8), (9), з урахуванням вищесказаного, отримаємо конкретні вирази для компонент температури та переміщень (16), (17).

Для оцінки впливу коливних складових температури, переміщень та механічних напружень на термопружний стан електропровідного неферромагнітного шару в гармонічному за часом магнітному полі порівняно з усередненим за часом відповідними складовими проведено розрахунки для шару з міді, характеристики якої такі [9-11]:

$$\rho = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E_p = 1,29 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_p = 0,35, \quad \alpha_T = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \kappa = 406 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ \alpha_T = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \quad \lambda = 5,88 \cdot 10^7 \text{ А/(В} \cdot \text{м)}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2, \quad c_1 = 4,818 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Вважатимемо також, що $T_0 = 300\text{К}$ та приймемо $Bi = 0,2$. Оскільки частота ν змінюється в межах $(50 \div 10^{10}) \text{ Гц}$, а товщина $l - (10^{-6} \div 1) \text{ м}$, то параметр γ змінюватиметься в межах $10^{-4} \div 10^4$.

Надалі для зручності будемо працювати з безрозмірними температурою, переміщенням та часом, які введемо відповідно:

$$\Theta(0; \tau) = (T(0; \tau) - T_0) T_m^{-1}, \quad v(0; \tau) = u(0; \tau) u_m^{-1}, \quad \tau = \alpha_T l^{-2} t. \quad (18)$$

Одним із завдань даної роботи є дослідження впливу амплітуд коливних складових температури $A_\Theta(z) = \sqrt{\Theta_2(z) \Theta_2(z)}$ та переміщень $A_v(z) = \sqrt{v_2(z) v_2(z)}$ на термопружний стан електропровідних неферромагнітних тіл порівняно з їх усталеними величинами – $\bar{\Theta}(z)$, $\bar{v}(z)$. Цей вплив будемо характеризувати відношеннями $S_\Theta(z) = A_\Theta(z) / \bar{\Theta}(z)$ та $S_v(z) = A_v(z) / \bar{v}(z)$. Коливні складові розглядуваних величин будемо враховувати за умови:

$$S_\Theta > 10^{-2}, \quad S_v > 10^{-2}. \quad (19)$$

У табл. 1 наведено значення величин $S_\Theta(z)$ та $S_v(z)$ для різних значень γ , z . Зауважимо, що $S_v(z) < 0$, оскільки переміщення $\bar{u}(z) < 0$ по всій товщині шару.

Аналіз даних, поданих у таблиці, а також отриманих на основі (10)-(17) формул показує, що при доволі малих γ (у граничному випадку $\gamma \rightarrow 0$) ці відношення дорівнюють одиниці (мінус одиниці) незалежно від z . Зі збільшенням γ вони зменшуються та на нескінченості прямують до нуля. Із означення (18) та умови (19) випливає, що для $\gamma \leq 0,1$ необхідно враховувати як усталену складову температури та переміщення, так і їх коливні складові. При $\gamma \geq 1$ величини $S_\Theta(z)$ і $S_v(z)$ є настільки нехтовними, що немає потреби їх досліджувати.

Таблиця 1

γ	0,001	0,01	0,1	1	10	100
$S_\Theta(0)$	0,99	0,97	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$5,58 \cdot 10^{-4}$	$7,69 \cdot 10^{-5}$	$7,69 \cdot 10^{-6}$
$S_\Theta(0,25)$	0,99	0,97	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$4,55 \cdot 10^{-4}$	$5,91 \cdot 10^{-7}$	$1,71 \cdot 10^{-27}$
$S_\Theta(0,5)$	0,99	0,97	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$3,78 \cdot 10^{-4}$	$3,99 \cdot 10^{-9}$	$3,29 \cdot 10^{-49}$
$S_\Theta(0,75)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	$2,69 \cdot 10^{-11}$	$6,36 \cdot 10^{-71}$
$S_\Theta(1)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$3,55 \cdot 10^{-4}$	$7,18 \cdot 10^{-13}$	$4,86 \cdot 10^{-92}$

$-S_v(0)$	0,99	0,97	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$4,42 \cdot 10^{-4}$	$3,70 \cdot 10^{-5}$	$4,01 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,25)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$5,35 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$4,04 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,5)$	0,99	0,97	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$5,89 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(0,75)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$6,17 \cdot 10^{-4}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$
$-S_v(1)$	0,99	0,97	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$4,01 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-6}$

У табл. 2 а наведено значення частот ν і товщин l , для яких потрібно враховувати коливні складові температури та переміщень.

Таблиця 2 а

$\nu, \text{Гц}$	50	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$l, \text{м}$	$0,93 \cdot 10^{-3}$	$6,57 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-5}$	$6,57 \cdot 10^{-6}$

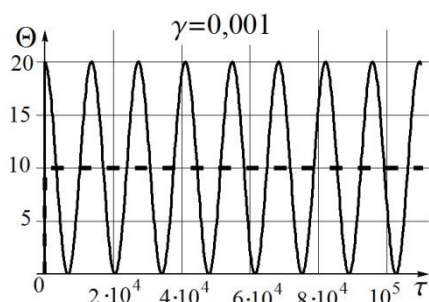
Отже, для дуже широкого діапазону частот умова (19) годиться лише для дуже малих товщин (тонких плівок).

Зауважимо, що для частот $\nu < 50 \text{ Гц}$ (див. табл. 2 б), які існують, наприклад, у біосистемах [12, 13], необхідно враховувати коливні складові термопружних характеристик для товщин у діапазоні $l = 1 \text{ мм} \div 1 \text{ м}$.

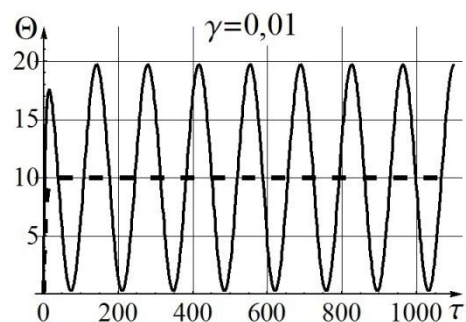
Таблиця 2 б

$l, \text{м}$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\nu, \text{Гц}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-3}$	0,43	43,12

На рис. 2 і 3 наведено графіки залежностей безрозмірних температури $\Theta(0; \tau)$ та переміщень $v(0; \tau)$ від безрозмірного часу τ для тих же значень γ , що подані в табл. 1, на верхній поверхні $z=0$. Суцільні лінії на графіках описують температуру $\Theta(0; \tau)$ та переміщення $v(0; \tau)$, що обчислювалися за уточненою розрахунковою моделлю, а пунктирні лінії – температурі $\bar{\Theta}(0)$ та переміщенню $\bar{v}(0)$ для випадку спрощеної методики, ($v_2(z) = 0$ і $v_*(z; \tau) = 0$).



а)



б)

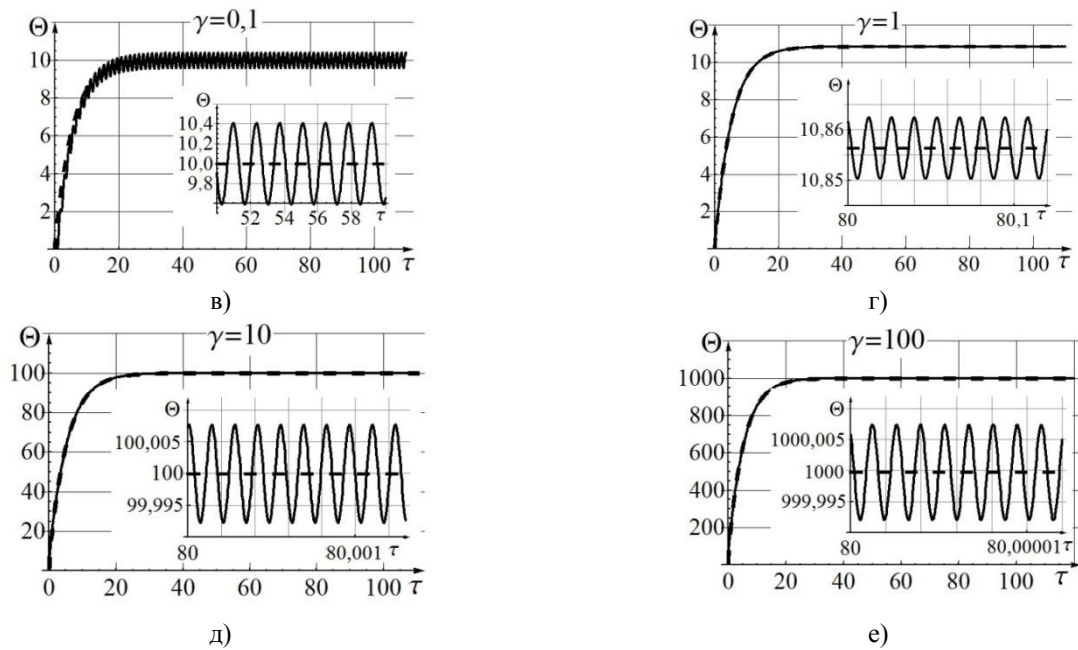


Рис. 2. Часова залежність температури на верхній поверхні шару

Для параметрів $\gamma = 10^{-3}$ і $\gamma = 10^{-2}$ (рис. 2 а, б та 3 а, б) температура та переміщення носять явно коливний характер. Вони коливаються відносно положення рівноваги, яким є усталена температура $\bar{\Theta}(0; \tau)$ (переміщення $\bar{v}(0)$). Для $\gamma = 10^{-1}$ (рис. 2в і 3в) видно, що амплітуда коливань явно зменшується. Для більших γ (рис. 2г, д, е і 3г д, е) коливання практично відсутні. У цих випадках можна говорити лише про мікроколивання.

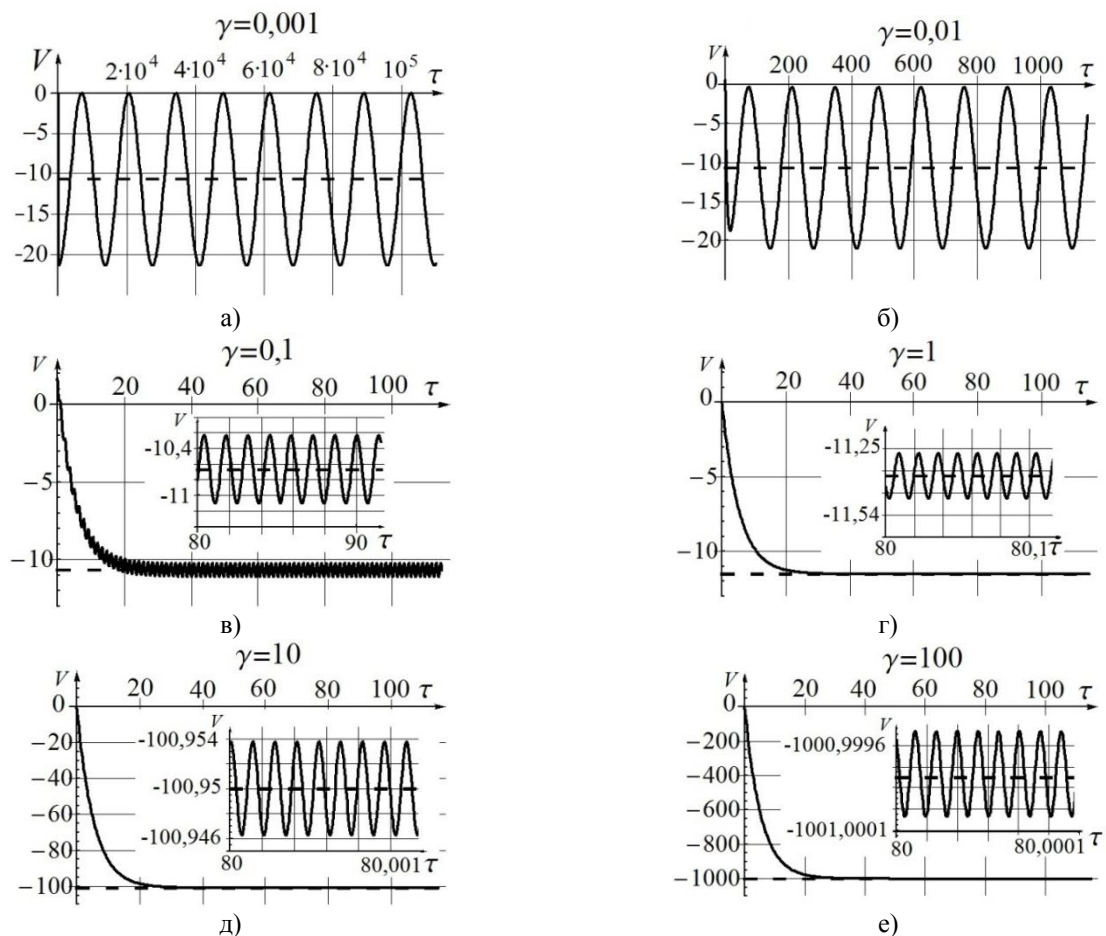


Рис. 3. Часова залежність переміщень на верхній поверхні шару

Розподіл безрозмірної температури $\bar{\Theta}(z)$ в усталеному тепловому режимі та її амплітуди $A_{\Theta}(z)$ її коливної складової по товщинній координаті є доволі рівномірний. Спостерігається надто слабка квадратична залежність, яка зі збільшенням параметра γ спочатку зменшується, а потім і зовсім зникає (стає лінійною). Для малих γ ($\gamma \leq 10^{-3}$) амплітуда коливної складової $A_{\Theta}(z)$ практично співпадає з розподілом усталеної складової $\bar{\Theta}(z)$. При $\gamma \cong 10^{-2}$ вона зменшується на 2%, а при $\gamma \cong 0,1$ амплітуда $A_{\Theta}(z)$ становить лише 4% від $\bar{\Theta}(z)$. У випадку $\gamma \geq 1$ – стає практично нехтовною.

Зауважимо, що різниця безрозмірної усталеної температури та амплітуди її коливної складової на верхній $z=0$ та нижній $z=1$ поверхнях дорівнює одиниці та не залежить від величини γ .

На відміну від температури, розподіли переміщень в усталеному режимі $\bar{v}(z)$ та амплітуди її коливної складової $A_v(z)$ носять повністю рівномірний характер по товщинній координаті. На верхній поверхні $z=0$ переміщення $\bar{v}(z)$ приймають мінімальне значення і рівномірно збільшуються з ростом z та згідно з першою граничною умовою (7) приймають нульове значення на нижній поверхні $z=0$.

Аналогічно поводить ся і амплітуда $A_v(z)$ порівняно з $\bar{v}(z)$. Так для малих значень $\gamma = 10^{-3}$ і $\gamma = 10^{-2}$ вони з точністю до знаку співпадають, при $\gamma = 0,1$ – розбіжність не перевищує 4%, а при подальшому збільшенні γ вплив амплітуди $A_v(z)$ стає нехтовно малим.

Графіки для механічних напружень наводити не будемо, оскільки вони з точністю до множника повторюють розподіл температури.

ВИСНОВКИ

Термопружний стан електропровідного неферромагнітного шару під дією гармонічного за часом магнітного поля суттєво залежить від параметра H_0 та відносної глибини проникання магнітного поля γ . Ця величина в свою чергу залежить від товщини шару l , частоти зовнішнього магнітного поля ν та електрофізичних характеристик матеріалу.

Показано, що вкладом пондеромоторної сили на термопружний стан електропровідних неферромагнітних тіл необхідно завжди нехтувати у порівнянні з тепловиділеннями.

Для малих γ (з точністю до 1% для $\gamma < 0,1$) потрібно враховувати як усталену складову температури так і її коливну складову. Тоді температура та переміщення носять явно коливний характер. У коливні складові переміщень входить характерний тепловий розмір, яким можна завжди нехтувати. Знайдено ті значення частоти ν і товщини шару l , для яких потрібно враховувати як усталену складову температури, так і її коливну складову.

З'ясовано, що розподіли температури та переміщень практично лінійні по товщині шару.

Цю розрахункову модель для шару доцільно в подальшому застосовувати для розв'язування аналогічних задач для тіл більш складної конфігурації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lucia O. Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges / O. Lucia, P. Maussion, E.J. Dede, J.M. Burdío // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2014. – Vol. 61. – №5. – P. 2509-2520.

2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К. : Наук. думка, 1977. – 248 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Вища шк., 1975. – 216 с.
4. Bay F. A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics / F. Bay, V. Labbe, Y. Favennec, J.L. Chenot // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2003. – Vol. 58. – №6. – P. 839-867.
5. Kurose H. 3-D Eddy Current Analysis of Induction Heating Apparatus Considering Heat Emission, Heat Conduction, and Temperature Dependence of Magnetic Characteristics / H. Kurose, D. Miyagi, N. Takahashi, N. Uchida, K. Kawanaka // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 2009. – Vol. 45. – Iss. 3. – P. 1847-1850.
6. Doležel I. Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem / I. Doležel, P. Kropík, B. Ulrych // *Applied Mathematics and Computation*. – 2013. – Vol. 219. – Iss. 13. – P. 7159-7169.
7. Солодяк М. Т. Термодифузійні процеси в електропровідних тілах у зовнішньому періодичному в часі магнетному полі / М.Т. Солодяк // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2000. – №5. – С. 91-98.
8. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, В.А. Прудников. – М. : Высш. шк., 1965. – 465 с.
9. Кикоин И. К. Таблицы физических величин : справ. / И. К. Кикоин. – М. : Атомиздат, 1976. – 1008 с.
10. Кей Дж. Таблицы физических и химических постоянных / Дж. Кей, Т. Леби. – М. : Физматгиз, 1962. – 247 с.
11. Лившиц Б. Г. Физические свойства металлов и сплавов / Б.Г. Лившиц, В.С. Крапошин, Я.Л. Липецкий. – М. : Metallurgiya, 1980. – 320 с.
12. Жиганин А. Д. Техногенные физические поля / А.Д. Жиганин // *Природа*. – 1993. – №2. – С. 15-23.
13. Посудін Ю. І. Фізика і біофізика навколишнього середовища / Ю.І. Посудін. – К. : Світ, 2000. – 304 с.

REFERENCES

1. Lucia, O., Maussion, P., Dede, E.J. and Burdío, J.M. (2014), "Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 5, pp. 2509-2520.
2. Podstrigach, Ja.S., Burak, Ja.I., Gachkevich, A.R., and Chernjavskaja, L.V. (1977), *Termouprugost elektroprovodnyh tiel* [Thermoelasticity conductive of bodies], Nauk. dumka, Kyiv.
3. Kovalenko, A.D. (1975), *Termouprugost* [Thermoelasticity], Vyshcha shk., Kyiv.
4. Bay, F., Labbe, V., Favennec, Y. and Chenot, J.L. (2003), "A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, no. 6, pp. 839-867.
5. Kurose, H., Miyagi, D., Takahashi, N., Uchida, N. and Kawanaka, K. (2009), "3-D Eddy Current Analysis of Induction Heating Apparatus Considering Heat Emission, Heat Conduction, and Temperature Dependence of Magnetic Characteristics", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, iss. 3, pp. 1847-1850.

6. Doležel, I., Kropík, P. and Ulrych, B. (2013), "Induction heating of thin metal plates in time-varying external magnetic field solved as nonlinear hard-coupled problem", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, iss. 13, pp. 7159-7169.
7. Solodiak, M.T. (2000), "Thermodiffusion processes in conductive of bodies in the external periodic magnetic field in time", *Fiz.-him. mehanika materialiv*, no. 5., pp. 91-98.
8. Ditkin, V.A. and Prudnikov, V.A. (1965), *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju* [Handbook of operational calculus], Vyssh. shk., Moscow.
9. Kikoin, I.K. (1976), *Tablicy fizicheskikh velichin: Sprav.* [Tables of physical quantities: Handbook], Atomizdat, Moscow.
10. Keij, Dzh. and Lebi, T. (1962), *Tablicy fizicheskikh i himicheskikh postojannyh* [Tables of Physical and Chemical Constants], Fizmatgiz, Moscow.
11. Livshic, B.G., Kraposhin, V.S. and Lipeckij, Ja.L. (1980), *Fizicheskie svojstva metallov i splavov* [Physical properties of metals and alloys], Metallurgija, Moscow.
12. Zhiganin, A.D. (1993), "Technogenic physical fields", *Priroda*, no. 2, pp. 15-23.
13. Posudin, Ju.I. (2000), *Fizika i biofizika navkolishn'ogo seredovishha* [Physics and Biophysics of the environment], Svit, Kyiv.

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

gluchov.uriy@gmail.com

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка и метод решения пространственной установившейся задачи о возмущении двухслойного предварительно напряженного полупространства движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой. Рассмотрена трехмерная модель слоистой среды «пластина и предварительно напряженное полупространство». Уравнения движения пластины записываются с учетом сдвига и инерции вращения. Контакт между пластиной и полупространством – нежесткий. Фундаментальное решение задачи получено с помощью метода интегральных преобразований Фурье.

Ключевые слова: начальные напряжения, движущаяся с постоянной скоростью нагрузка, двухслойное полупространство, сжимаемый материал.

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СТИСЛИВОГО НАПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Глухов Ю. П., к. ф.-м. н., доцент

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

gluchov.uriy@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка та метод розв'язку просторової усталеної задачі про збудження двошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Розглянута тривимірна модель шаруватого середовища «пластина і попередньо напружений напівпростір». Рівняння руху пластины записуються з

урахуванням зсуву та інерції обертання. Контакт між пластиною і напівпростором є нежорсткий. Фундаментальний розв'язок задачі отримано з допомогою метода інтегральних перетворень Фур'є.

Ключові слова: початкові напруження, навантаження, що рухається з постійною швидкістю, двошаровий напівпростір, стисливий матеріал.

DINAMIC TASK FOR TWO-LAYERED COMPRESSIBLE HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES

Glukhov Yu. P., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

glukhov.uriy@gmail.com

Within the bounds of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses a non-planar problem and the method for solution of the perturbation of moving with a constant speed of the surface load of two-layered pre-stressed half-space is considered. The three-dimensional model of the layered medium "a plate and pre-stressed half-space" is considered. Equations of plate motion are written down taking into consideration of shift and rotary inertia. Half-space material is assumed compressible, isotropic in the natural state. The homogeneous initial state is considered in a type of $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$. The border surfaces of elements of the layered medium are flat and parallel. The contact between a plate and a half-space is non-rigid. The surface load is point and moves rectilinearly. The fundamental solution of the problem is obtained using the Fourier integral method. The solution is presented in a general view for the equal and unequal roots of characteristic equation and different speeds of superficial loading movement. The form of elastic potential The shape of the elastic potential takes the general form and should be specified only under the numerical calculations. Obtained results can be used to investigate the mode of deformation of the elements of layered structures which are exposed to the moving loads.

Key words: initial tensions, moving with permanent speed load, two-layered half-space, compressible material.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования и решение задач оптимального проектирования слоистых конструкций, подвергающихся воздействию подвижных поверхностных нагрузок, представляют большой научный и практический интерес. Слоистые конструкции технологичны и просты в изготовлении и широко используются в различных областях.

Одной из интересных и актуальных проблем, анализ которой невозможно провести в рамках классической линейной теории упругости, является изучение динамических процессов в слоистых телах с начальными напряжениями. Начальные напряжения возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания и т.д.

Действию подвижных нагрузок на слоистые тела посвящено много работ. Для классических сред такие задачи изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей многослойной среды.

В данной работе рассмотрена пространственная установившаяся задача о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой двухслойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями.

Исследования были проведены в рамках линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. В линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями и деформациями предполагается, что возмущенному состоянию тела предшествует некоторое начальное состояние с отличными от нуля напряжениями и деформациями. При этом рассматриваются только малые дополнительные напряжения (возмущения) по сравнению с напряжениями в начальном состоянии. Такая теория, в отличие от линейной классической теории упругости, более полно отражает свойства реальных деформируемых тел.

Предполагаем, что движение верхнего слоя может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига.

Подстилающее полупространство имеет начальные напряжения и состоит из сжимаемого материала с произвольным упругим потенциалом. К свободной границе слоя приложена движущаяся с постоянной скоростью нагрузка. Аналогичная плоская задача для двухслойного сжимаемого полупространства рассмотрена в работе [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слой толщиной $2h$, лежащий на полупространстве. Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным и определяется следующими компонентами вектора перемещений и тензора обобщенных напряжений

$$u_j^0 = \delta_{ij}(\lambda_i + 1)x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где λ_i – удлинения ($\lambda_i = \text{const}$) вдоль осей лагранжевой системы координат x_i , совпадающей в естественном состоянии с декартовой системой координат. Рассмотрим начальное состояние в виде:

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_0^{\{s\}11} = S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \quad (2)$$

Наряду с лагранжевими координатами введем декартовые координаты ξ_i начального деформированного состояния, связанные с координатами x_i соотношениями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоев вглубь полупространства.

Слоистое полупространство отнесено к декартовой системе координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), соответствующей начальному деформированному состоянию. Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоистого полупространства вглубь полупространства.

К свободной границе слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3 . Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся деформированное состояние. Если предположить, что нагрузка движется по прямой, расположенной под углом φ к оси ξ_1 , то координаты подвижной системы координат определяются соотношениями:

$$y_1 = \xi_1 - v \cos \varphi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2 - v \sin \varphi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3. \quad (3)$$

Также предположим, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризованную теорию упругости [1] для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

С учетом (1) и (2) в координатах подвижной системы координат (3) уравнения движения и компоненты напряженно-деформированного состояния сжимаемого полупространства можно записать в общем виде следующим образом:

– уравнения движения

$$\left(\tilde{A} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi = 0; \quad (4)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \left[\tilde{B} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + \tilde{C} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D} \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} \right\} \chi^{\{s\}} = 0;$$

– перемещения

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3}; \quad u_3 = \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi; \quad (5)$$

– напряжения

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii} &= \tilde{a}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ii}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ii}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_3}; \quad i = \overline{1, 3}; \\ \tilde{Q}_{ij} &= \left(\tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}; \quad i, j = 1, 2; \\ \tilde{Q}_{ij} &= \tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_k \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_i}; \\ &\quad i, j, k = \overline{1, 3}; \quad k \neq j; \quad k \neq i; \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \zeta_j, \tilde{\beta}_j, \tilde{a}_{ij}^{(m)}, \tilde{b}_{ij}^{(m)}$ в выражениях (4)-(6) являются функциями параметров v, φ , характеризующих нагрузку, и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды $\tilde{\omega}^{(s)}$. В случае сжимаемого материала имеем:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left(c^2 - \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{3333} \tilde{\omega}_{1331}^{-1} \tilde{\omega}_{1111}^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}; \\ 2c \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331} &= \tilde{\omega}_{1331} \tilde{\omega}_{3113} + \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{3333} - (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^2; \\ A &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; \quad B = \tilde{\rho}^{-1} D^{-1} (\tilde{\omega}_{1111} + \tilde{\omega}_{1331}); \quad C = \tilde{\rho}^{-1} D^{-1} (\tilde{\omega}_{3333} + \tilde{\omega}_{3113}); \quad D = \tilde{\rho}^2 \tilde{\omega}_{1111}^{-1} \tilde{\omega}_{1331}^{-1}; \\ \beta_1 &= \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{1111}; \quad \beta_2 = \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{3113}; \quad \beta_3 = \tilde{\rho} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \\ a_{ii}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{ii11} - \tilde{\omega}_{ii22}; \quad b_{ii}^{(k)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\omega}_{iikk}; \quad k = 1, 2; \quad b_{ii}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113}; \\ b_{ii}^{(4)} &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ii33} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \quad i = 1, 2, 3; \\ a_{ij}^{(1)} &= -\tilde{\omega}_{ij21}; \quad a_{ij}^{(2)} = \tilde{\omega}_{ij12}; \quad b_{ij}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ij12} + \tilde{\omega}_{ij21}; \quad i, j = 1, 2; \\ a_{ij}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{ij13}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113}; \\ b_{ij}^{(4)} &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij31} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \quad i, j = 1, 3; \\ a_{ij}^{(1)} &= -\tilde{\omega}_{ij23}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113} - \tilde{\omega}_{ij23}; \\ b_{ij}^{(4)} &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij23} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \quad i, j = 2, 3; \quad \tilde{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho, \end{aligned}$$

где ρ – плотность материала полупространства в естественном состоянии.

Предположим, что движение слоя может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига. Для пластины, находящейся под воздействием поперечных и тангенциальных поверхностных сил, соответствующие уравнения в системе координат (3) могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}
& \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_1 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right] + \tau_1 - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \Psi_1 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\
& \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_2 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right] + \tau_2 - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_2} + \Psi_2 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \\
& \kappa G_1 h (\nabla^2 w + \Phi) + q = 2h\rho_1 v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2).
\end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \quad \Phi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2},$$

ρ_1 – плотность материала пластины; G_1 – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; κ – коэффициент сдвига Тимошенко; Ψ_1 , Ψ_2 – повороты относительно осей y_1 и y_2 ; w – перемещение срединной плоскости пластины; τ_1 , τ_2 , q – касательные и нормальные нагрузки, действующие на поверхности раздела пластины и полупространства; P_3 – нормальная нагрузка на свободной поверхности пластины.

Рассмотрим нежесткий контакт между пластиной и полупространством при $y_3 = -h$:

$$\tilde{Q}_{31} = 0; \quad \tilde{Q}_{32} = 0; \quad \tilde{Q}_{33} = q; \quad \tau_1 = 0; \quad \tau_2 = 0; \quad u_3 = w. \quad (8)$$

При изложенных выше условиях имеем трехмерную установившуюся задачу, состоящую в совместном решении уравнений движения (4) и (7) при граничных условиях (8) и условия затухания на бесконечности.

Воспользуемся уравнениями (7) и (8) и соотношениями упругости (5) и (6) и выразим функции q , τ_1 , τ_2 и w через функции Ψ , χ , Ψ_1 и Ψ_2 :

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{a}_{31}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{31}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{31}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} = 0; \quad \left(\tilde{a}_{32}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{32}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{32}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} = 0; \\
& \theta_1 \nabla^2 \Psi_1 + \theta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \theta_3 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1} - \theta_3 \Psi_1 = \theta_5 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\
& \theta_1 \nabla^2 \Psi_2 + \theta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \theta_3 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_2} - \theta_3 \Psi_2 = \theta_5 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \\
& \theta_4 \nabla^2 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi + \theta_4 \Phi + \tilde{a}_{33}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{33}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{33}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{33}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_3} = \\
& = \theta_6 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2).
\end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\theta_1 = \frac{2}{3} G_1 h^2; \quad \theta_2 = \theta_1 \frac{1+\nu}{1-\nu}; \quad \theta_3 = \kappa G_1; \quad \theta_4 = \theta_3 h; \quad \theta_5 = \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi; \quad \theta_6 = 2h\rho_1 v^2 \cos^2 \varphi.$$

Таким образом, задача об установившемся движении двухслойного сжимаемого полупространства при воздействии подвижной нагрузки сводится к нахождению функций Ψ , χ , Ψ_1 и Ψ_2 из граничных условий (9).

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФУРЬЕ

Для решения задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье по координатам y_1 и y_2 . В пространстве изображений Фурье уравнения движения (4) можно представить в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_1^2\right)\Psi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_2^2\right)\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_3^2\right)\chi^F = 0; \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \zeta_1^{-2} (k_1^2 \tilde{A} + k_2^2); \quad \mu_{2,3}^2 = B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - B_2}; \\ 2B_1 &= \zeta_2^{-2} \zeta_3^{-2} \left[(\zeta_2^2 + \zeta_3^2)(k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 \tilde{C} \right]; \\ B_2 &= \zeta_2^{-2} \zeta_3^{-2} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + k_1^2 k_2^2 \tilde{B} + k_1^4 (\tilde{B} + \tilde{D}) \right]; \end{aligned}$$

k_1, k_2 – параметры двойного преобразования Фурье.

Преобразованная система граничных условий (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} -\left(k_1^2 \tilde{a}_{31}^{(1)} + k_2^2 \tilde{a}_{31}^{(2)}\right)\Psi^F + k_1 k_2 \tilde{b}_{31}^{(1)} \frac{d\chi^F}{dy_3} &= 0; \quad -\left(k_1^2 \tilde{a}_{32}^{(1)} + k_2^2 \tilde{a}_{32}^{(2)}\right)\Psi^F + k_1 k_2 \tilde{b}_{32}^{(1)} \frac{d\chi^F}{dy_3} = 0; \quad (11) \\ ik_1 \theta_3 \left(k_1^2 \tilde{\beta}_1 + k_2^2 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi^F - \left[k_1^2 (\theta_1 + \theta_2 - \theta_5) + k_2^2 \theta_1 + \theta_3 \right] \Psi_1^F - k_1 k_2 \theta_2 \Psi_2^F &= 0; \\ ik_2 \theta_3 \left(k_1^2 \tilde{\beta}_1 + k_2^2 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi^F - k_1 k_2 \theta_2 \Psi_1^F - \left[k_1^2 (\theta_1 - \theta_5) + k_2^2 (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 \right] \Psi_2^F &= 0; \\ -k_1 k_2 \tilde{a}_{33}^{(1)} \Psi^F + \left\{ \left(k_1^2 \tilde{\beta}_1 + k_2^2 \tilde{\beta}_2 \right) \left[k_1^2 (\theta_4 - \theta_6) + k_2^2 \theta_4 \right] - \left(k_1^2 \tilde{b}_{33}^{(1)} + k_2^2 \tilde{b}_{33}^{(2)} \right) \frac{d}{dy_3} - \right. & \\ \left. - \left[k_1^2 (\theta_4 - \theta_6) + k_2^2 \theta_4 \right] \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} + \tilde{b}_{33}^{(3)} \frac{d^3}{dy_3^3} \right\} \chi^F + ik_1 \theta_4 \Psi_1^F + ik_2 \theta_4 \Psi_2^F &= P_3^F. \end{aligned}$$

Решение преобразованных уравнений (10) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде:

$$\Psi^F = C_1 e^{\gamma_1(y_3+h)}; \quad \chi^F = C_2 e^{\gamma_2(y_3+h)} + \left[1 - \delta_{\mu_2\mu_3} + \delta_{\mu_2\mu_3}(y_3+h) \right] C_3 e^{\gamma_3(y_3+h)}. \quad (12)$$

Здесь $\delta_{\mu_2\mu_3} = \begin{cases} 1, & \mu_2^2 = \mu_3^2; \\ 0, & \mu_2^2 \neq \mu_3^2; \end{cases}$ $\gamma_j = \sigma_j \mu_j$; $\sigma_j \equiv \sigma = |\mu_j|/\mu_j$, если $\mu_j^2 > 0$, $\sigma_j = i$, если $\mu_j^2 < 0$ и

$\gamma_j = \sigma \operatorname{Re} \mu_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j$, если μ_j^2 принимает комплексные значения.

Введем замену

$$C_j = C_j, \quad j = \overline{1,3}; \quad C_{j+3} = i\Psi_j^F, \quad j = \overline{1,2}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в преобразованную систему уравнений (11), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_j , $j = \overline{1,5}$:

$$\zeta_{11} C_1 + \zeta_{21} \gamma_2 C_2 + \zeta_{21} \left[\delta_{\mu_2\mu_3} + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3}) \gamma_3 \right] C_3 = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\zeta_{12} C_1 + \zeta_{22} \gamma_2 C_2 + \zeta_{22} \left[\delta_{\mu_2 \mu_3} + (1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}) \gamma_3 \right] C_3 = 0; \\
&\zeta_{31} \zeta_{51} C_2 + \zeta_{51} \left[\delta_{\mu_2 \mu_3} \zeta_3 + (1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}) \zeta_{32} \right] C_3 + \zeta_{61} C_4 + \zeta_4 C_5 = 0; \\
&\zeta_{31} \zeta_{52} C_2 + \zeta_{52} \left[\delta_{\mu_2 \mu_3} \zeta_3 + (1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}) \zeta_{32} \right] C_3 + \zeta_4 C_4 + \zeta_{62} C_5 = 0; \\
&\zeta_9 C_1 + \zeta_{71} C_2 + \left\{ -\delta_{\mu_2 \mu_3} \zeta_{10} + (1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}) \zeta_{72} \right\} C_3 + \zeta_{81} C_4 + \zeta_{82} C_5 = P_3^F,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= k_1^2 (\theta_4 - \theta_6) + k_2^2 \theta_4; \quad \varsigma_2 = k_1^2 (\theta_1 - \theta_5) + k_2^2 \theta_1 + \theta_3; \quad \varsigma_3 = -2\gamma_3 \tilde{\beta}_3; \\
\varsigma_4 &= k_1 k_2 \theta_2; \quad \varsigma_5 = -k_1 k_2 \tilde{a}_{33}^{(1)}; \quad \varsigma_6 = \zeta_{42} - 2\gamma_3^2 \tilde{b}_{33}^{(3)} - \varsigma_1 \varsigma_3; \\
\zeta_{1j} &= -\left(k_1^2 \tilde{a}_{3j}^{(1)} + k_2^2 \tilde{a}_{3j}^{(2)} \right); \quad \zeta_{2j} = k_1 k_2 \tilde{b}_{3j}^{(1)}; \quad \zeta_{3j} = k_1^2 \tilde{\beta}_1 + k_2^2 \tilde{\beta}_2 - \gamma_{j+1}^2 \tilde{\beta}_3; \\
\zeta_{4j} &= k_1^2 \tilde{b}_{33}^{(1)} + k_2^2 \tilde{b}_{33}^{(2)} - \gamma_{j+1}^2 \tilde{b}_{33}^{(3)}; \quad \zeta_{5j} = k_j \theta_3; \\
\zeta_{6j} &= \varsigma_2 + k_j^2 \theta_2; \quad \zeta_{7j} = \zeta_{3j} \varsigma_1 - \zeta_{4j} \gamma_{1+j}; \quad \zeta_{8j} = k_j \theta_4; \quad j=1, 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (14) относительно неизвестных C_j , $j=1, 5$.

ВЫВОДЫ

В работе в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка и метод решения пространственной динамической задачи о возмущении двухслойного предварительно напряженного полупространства движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой. В пространстве изображений Фурье в общем виде получено решение задачи. Для получения оригиналов трансформант соответствующих компонентов напряженно-деформированного состояния следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании напряженно-деформированного состояния элементов слоистых конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь. – К. : «А.С.К», 2004. – 672 с.
2. Бабич С. Ю. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями / С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 2008. – 44, №3. – С. 36-54.

REFERENCES

1. Guz, A.N. (2004), *Uprugie volnyi v telah s nachalnymi (ostatochnyimi) napryazheniyami* [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses], "A.S.K", Kiev, Ukraine.
2. Babich, S.Yu., Gluhov, Yu.P. and Guz, A.N. (2008), "About one dynamic task for the stratified incompressible semispace with initial stresses", *Prikl. Mehanika*, 44, no. 3, pp. 36-54.

УДК 539.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИМЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛОМ СЛОИСТОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СЛОЕВ, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

¹Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, ²Лоза И. А., д. ф.-м. н.

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко, НАНУ,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, Украина*

²*Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, г. Киев, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

В статье проведен кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в слоистом полом цилиндра с металлическими и пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении при механическом способе возбуждения волн. Боковые поверхности цилиндра свободны от электродов. Внешняя поверхность цилиндра свободна от механических воздействий, а к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление $Pe^{i(kz-\omega t)}$. Для решения данной задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После разделения переменных и представления решения в виде волн, бегущих вдоль цилиндра, начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к неоднородной краевой задаче в обычных дифференциальных уравнениях. Полученная система решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численного анализа для трехслойного цилиндра с внешними стальными слоями и внутренним – пьезокерамическим, поляризованным в осевом направлении.

Ключевые слова: электроупругие волны, слоистые пьезокерамические цилиндры, кинематический анализ.

ПРО ПОШИРЕННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ПОРОЖНИСТОМУ ШАРУВАТОМУ ЦИЛІНДРІ З МЕТАЛЕВИХ ТА П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ШАРІВ, ПОЛЯРИЗОВАНИХ В ОСЬОВОМУ НАПРЯМІ

¹Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, ²Лоза І. А., д. ф.-м. н.

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко, НАНУ,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, Україна*

²*Національний транспортний університет,
вул. Суворова, 1, м. Київ, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

У статті проведено кінематичний аналіз поширення вісесиметричних електропружних хвиль у шаруватому порожнистому циліндрі з металевих та п'єзокерамічних шарів, поляризованих в осьовому напрямі при механічному способі збудження хвиль. Бічні поверхні циліндра вільні від електродів. Зовнішня поверхня циліндра вільна від механічних навантажень, а до внутрішньої поверхні прикладений гармонічно змінний тиск $Pe^{i(kz-\omega t)}$. Для розв'язку задачі запропонований ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних і представлення розв'язку у вигляді хвиль, біжучих вздовж циліндра, початкова задача теорії електропружності в частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі в звичайних диференціальних рівняннях. Отримана система розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведені результати чисельного аналізу для циліндра з зовнішніми сталевими та внутрішнім – п'єзокерамічним, поляризованим в осьовому напрямі.

Ключові слова: електропружні хвилі, шаруваті п'єзокерамічні циліндри, кінематичний аналіз.

ABOUT AXISYMMETRICAL ELASTOELECTRIC WAVES PROPAGATION IN HOLLOW LAYERED CYLINDER WITH METALL AND PIEZOCERAMIC LAYS, POLARIZED IN AXIAL DIRECTION

Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Loza I. A., D.Sc. in Physics and Maths

*Institute of Mechanic NANU by name Timoshenko S.P.,
Nesterova str., 3, Kyiv, Ukraine*

*National Transport University,
Suvorov str., 1, Kyiv, Ukraine*

ayagrigorenko@yandex.ua, dukeigor@mail.ru

In this article problem of kinematic analysis of axisymmetric elastoelectric wave's propagation in the hollow circular layered cylinder from metal and piezoceramic lays, polarized in axial direction is considered. The external surface of the cylinder is free of electrodes. External surface are free from any mechanical tractions and to internal surface applied harmonically changes pressure $Pe^{i(kz-\omega t)}$. Conditions of perfect contact on interfaces are applied without any discontinuities or slipping. The numerical-analytical method is offered for solving this problem. Resolving vector is suitable to choose in combined type for similar tasks. The components tensor of mechanical stress, vectors of mechanic and dielectric displacement and electrostatic potential are part of resolving vector where through formulate the boundary conditions and conditions on interfaces. The initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives after expand the stress tensor components displacement vector, electric induction components and electrostatic potential components by progressing wave in axial direction is reduced to the non-homogeneous boundary value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by stable numerical method of discrete orthogonalisation. There numerical results are presented for kinematic analyzing of the tree-layered cylinder with two steel external lays and one lay – piezoceramic from PZT4, polarized in axial direction. Behavior of wave forms depending on wave-lengths is investigated. Influence of irregularity factor also is investigated. It may be noted that inhomogeneity of material significant influence on character of displacement distribution over the thickness of the shell. Particular sweeping changes are present for second branch. Inhomogeneity give rise to displacement distribution gives into Raleigh wave propagating along external surface in short-wavelengths band. While as displacement distribution gives into Raleigh wave propagating along internal surface in short-wavelengths band for homogeneous cylinder.

Key words: elastoelectric waves, layered piezoceramic cylinders, kinematic analyses.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями. Исследованию задачи о распространении упругих волн в круговых цилиндрах посвящено значительное количество работ. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в обзорах [1, 2 и др.] и монографиях [3, 4 и др.]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время, как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Наличие поверхности раздела двух сред приводит к необходимости удовлетворять условия сопряжения разрешающих функций на границе раздела сред. Исследования, посвященные этой проблематике, можно найти в работах [5, 6].

В данной статье для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Осесимметричные продольные уравнения движения i -го слоя в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Уравнения электростатики для i -го слоя:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} &= 0; \\ E_r^i &= -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2)$$

Геометрические соотношения для i -го слоя:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r} \right), \quad (3)$$

здесь: σ_{ij}^i – компоненты тензора напряжений; ρ^i – плотность материала; ω – круговая частота; u_i^i – компоненты вектора перемещений; D_i^i – компоненты вектора электрической индукции; E_i^i – компоненты вектора напряженности электрического поля; ϕ^i – электростатический потенциал; ε_{ij}^i – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для i -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{51}^i E_z^i; \\ D_r^i &= e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{31}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{31}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \\ D_z^i &= 2e_{51}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь: c_{ij}^i – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij}^i – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij}^i – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Физические соотношения для i -го металлического слоя имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\
\sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга. В дальнейшем индекс i будем опускать.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие.

Поверхности незэлектродированы: $D_r|_{r=R_0 \pm h} = 0$. Внешняя поверхность цилиндра свободна от внешних усилий: $\sigma_{rr}|_{r=R_0+h} = \sigma_{rz}|_{r=R_0+h} = 0$, к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление: $\sigma_{rr}|_{r=R_0-h} = P e^{i(kz - \omega t)}$; $\sigma_{rz}|_{r=R_0-h} = 0$.

Тут: R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра.

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r\}^T. \tag{6}$$

Разрешая систему (1)-(4) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{r c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_7}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введены обозначения: $\Delta = c_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2$; $\Delta_1 = c_{33}e_{13} - c_{13}e_{33}$; $\Delta_2 = c_{13}\varepsilon_{33} + e_{13}e_{33}$; $\Delta_3 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{11})\Delta$; $\Delta_4 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{12})\Delta$; $\Delta_5 = c_{12}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2$; $\Delta_6 = c_{11}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2$; $\Delta_7 = c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = i\lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad u_r(r, z, t) = h u_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Используя представление (8), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных (7), можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega) \mathbf{R}. \quad (9)$$

С граничными условиями:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2. \quad (10)$$

Здесь вектор $\mathbf{C}_1^T = \{P, 0, 0, 0, 0, 0\}$, вектор $\mathbf{C}_2^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h}.$$

ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10} \frac{H}{M^2}$; $\rho_0 = 1 \frac{\hat{e} \hat{a}}{i^3}$.

Решение задачи (9), (10) было выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (9), (10). Для определения влияния неоднородности на характер распределения перемещений, для начала проведем кинематический анализ распространения акустоэлектрических волн в однородном цилиндре с такой же геометрией целиком из пьезокерамики PZT 4. На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. На рисунке используются обозначения для волн, принятые в работе [10]. Маркировка $SW(0)$ означает, что волна рождается ($k=0$) как симметричные продольные колебания (волны расширения-сжатия), $AU(0)$ – антисимметричные (изгибные) радиальные колебания. Как видно из приведенного рисунка, первые две ветки $SW(0)$ и $AU(0)$ в коротковолновом диапазоне выходят на одну скорость и распространяются практически без дисперсии. Две последующие $AW(1)$ и $SW(1)$ также выходят на одну скорость, но с большим значением. На рис. 2 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в первой волне $SW(0)$ для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений u_r , штриховой – продольных u_z . Жирными линиями выделено распределение амплитуд перемещений в

коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону.

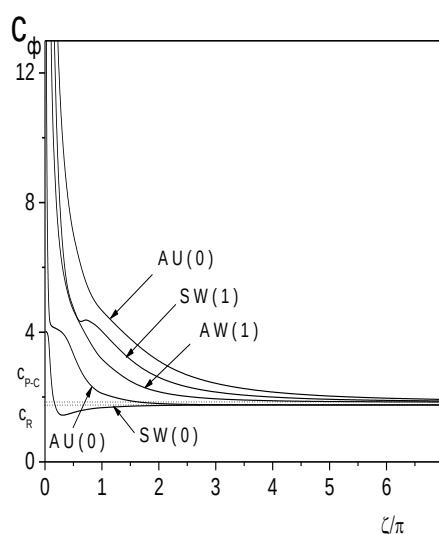


Рис. 1

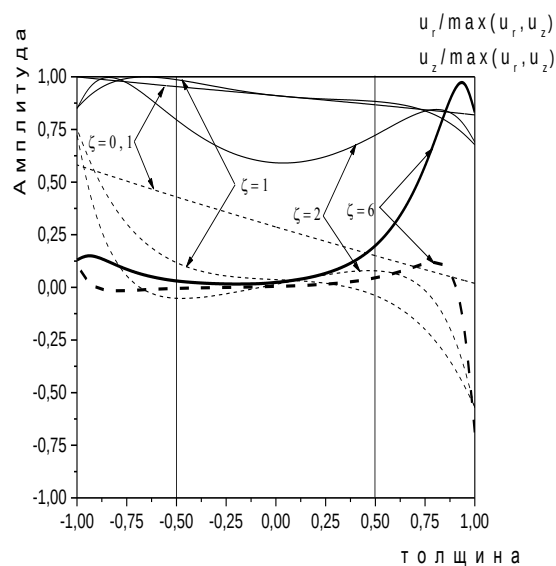


Рис. 2

С уменьшением длины волны, перемещения сосредотачиваются возле внешней боковой поверхности. Распределение перемещений в этом случае происходит по типу волн Рэлея.

На рис. 3 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне $AU(0)$. Также можно отметить, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине носит линейный характер. С уменьшением длины волны, перемещения также сосредотачиваются на боковой поверхности цилиндра, но уже на внутренней поверхности. Распределение перемещений в этом случае также происходит по типу волн Рэлея.

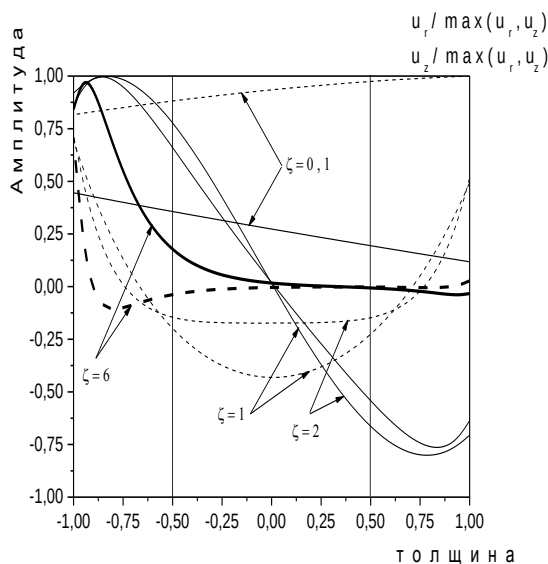


Рис. 3

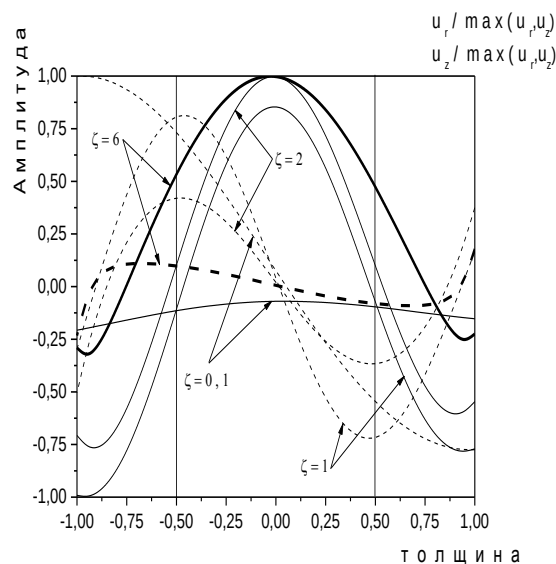


Рис. 4

На рис. 4 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне $SW(1)$. В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны, распределение продольных перемещений почти симметрично относительно срединной поверхности цилиндра, распределение продольных перемещений сдвига – антисимметрично.

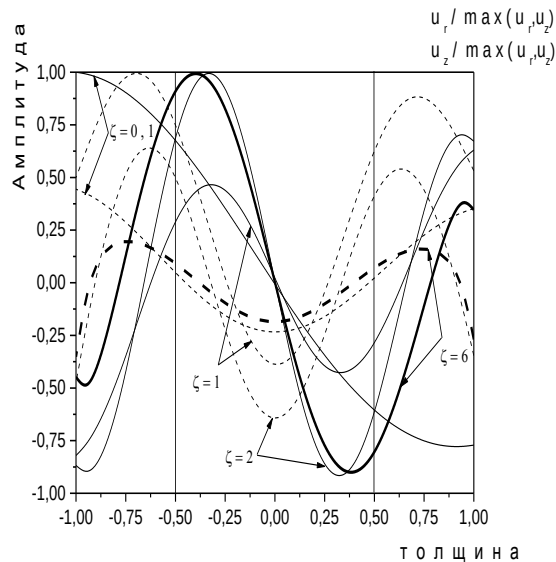


Рис. 5

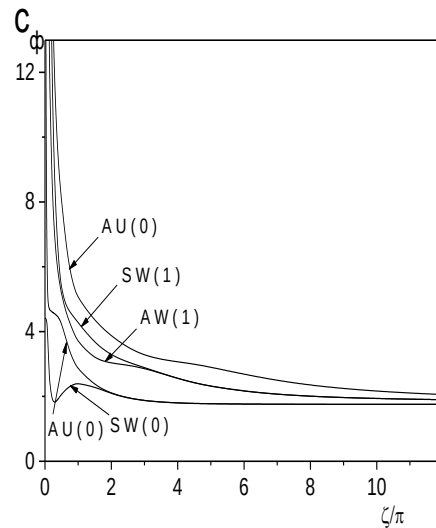


Рис. 6

На рис. 5 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в четвертой волне $SW(1)$. В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны, распределение продольных перемещений почти антисимметрично относительно срединной поверхности цилиндра, распределение продольных перемещений сдвига – симметрично. Наблюдается увеличение числа полувольт на единицу по сравнению с предыдущей ветвью.

Рассмотрим трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются пьезокерамическими из пьезокерамики PZT 4, а средний слой – стальной ($\nu = 0,28$; $E = 21$), параметр кривизны принят $\varepsilon = 0,25$. Толщина внешних слоев равна h , толщина среднего слоя равна $2h$. На рис. 6 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. Как видно из приведенного рисунка в коротко волновом диапазоне происходит попарное сближение соседних ветвей.

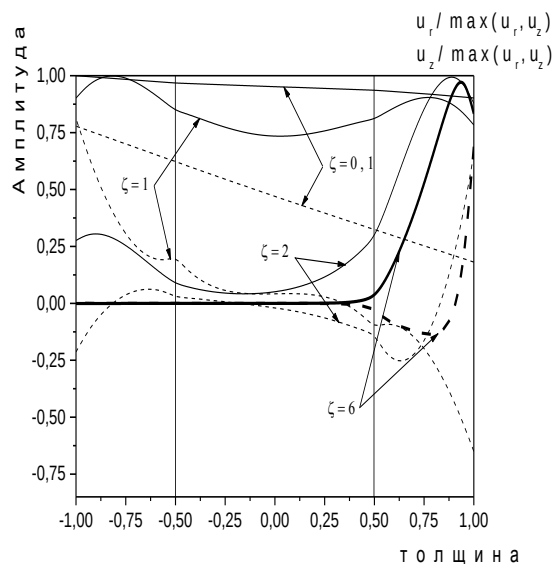


Рис. 7

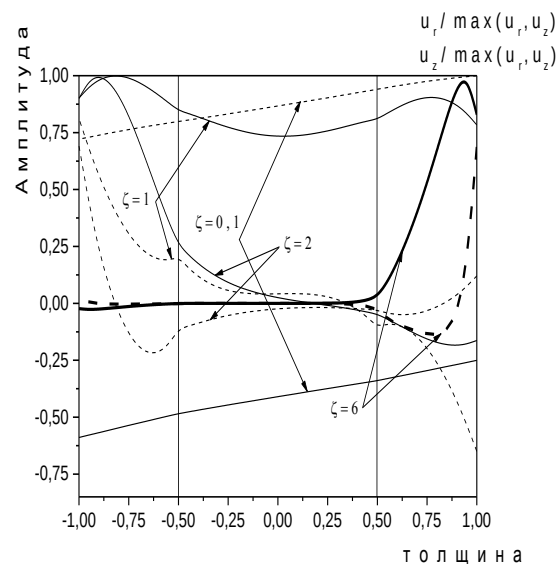


Рис. 8

Дальнейший кинематический анализ также показывает попарное подобие в характере распределения перемещений по толщине. Так на рис. 7-8 видим подобие в характере распределения перемещений. В коротко волновом диапазоне для обеих ветвей видим выход

на картину, характерную для волн рэлеевского типа, сосредоточенных вдоль внешней границы цилиндра.

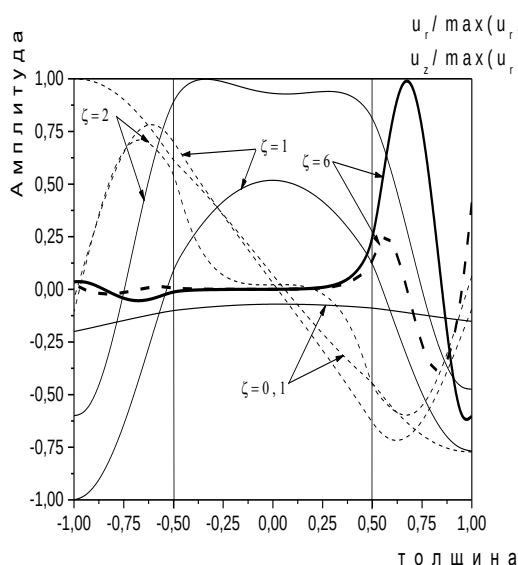


Рис. 9

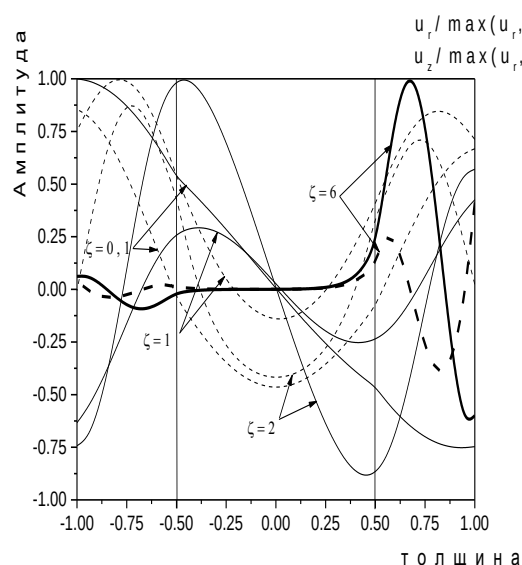


Рис. 10

На рис. 9-10 представлено распределение перемещений по толщине для ветвей $AW(1)$ и $SW(1)$. Как видно из приведенных рисунков в коротковолновой области перемещения в обоих случаях сосредотачиваются в более мягком внешнем пьезокерамическом слое. Стальной слой при этом остается практически недеформированным.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Неоднородность материала существенно влияет на характер распределения перемещений по толщине. Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая ветвь для неоднородного цилиндра в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая же ветвь для неоднородного цилиндра выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Для более высоких ветвей также наблюдаются существенные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. В случае однородного материала, с уменьшением длины волны, амплитуды перемещений распределяются либо симметрично относительно срединной поверхности цилиндра, либо антисимметрично. Для более высокой ветви наблюдается увеличение числа полуволн. В случае же неоднородного материала, с уменьшением длины волны, можно отметить попарное подобие характера распределения перемещений. Причем наблюдается нарушение симметрии в распределении перемещений. Перемещения сосредотачиваются в более мягком внешнем пьезокерамическом слое, в то время, как более жесткий стальной слой остается практически не деформированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика / Под редакцией У. Мэзона. Р. Терстона. – М. : Мир, 1966. – Т. 1-Т. 7. – 663 с.
2. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods / R.N. Thurston // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – **64**, N 1. – P. 1-37.
3. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К. : Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М. : ИЛ, 1955. – 192 с.

5. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь ; АН УССР Ин-т механики. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. Шульга Н. А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами / Н.А. Шульга // В Кн. : Успехи механики в 6-ти томах. – 2007. – С. 681-702.
7. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L.W. Byrd // ASME Appl. Mech. Rew. – 2007. – **195**. – P. 195-216.
8. Chih-Ping Wu. Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method / Chih-Ping Wu, Tsu-Chieh Tsai // Applied Mathematical Modelling, May 2012. – Volume 36, Issue 5. – P. 1910-1930.
9. Grigorenko A. Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials / A. Grigorenko, W.H. Müller, R. Wille, I. Loza // Continuum Mech. Thermodyn. – 2012. – **24**(4-6). – P. 515-524.
10. Григоренко А. Я. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями поляризованными в осевом направлении / А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // Прикл. механика. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 118-124.

REFERENCE

1. (1966), *Phisicheskaya akustika* [Physical Acoustics], Edited by W. Meson, vol. 1-7, Mir, Moskow.
2. Thurston, R.N. (1978), “Elastic waves in rods and clad rods”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**, no. 1, pp. 1-37.
3. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. (1981), *Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies], Nauk. dumka, Kiev.
4. Kolsky, G. (1955), *Volni napryazheniy v tverdkh telakh* [Waves of tensions are in solids], IL, Moskow.
5. Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., Shulga, N.A. (1989), *Mekhanika svyazannikh poley v elementakh konstrukciy. Vol. 5. Elektrouprugost* [Mechanics of the constrained fields is in the elements of constructions. T. 5. Electro-resiliency], Отв. ред. А.Н. Гуз, Nauk. Dumka, Kiev.
6. Shulga, N.A. (2007), *Rasprostraneniye garmonicheskikh voln v anisotropnikh p'ezoelektricheskikh cilindrah s uslozhnennimi svoystvami* [Distribution of harmonic waves is in anisotropic piezoelectric cylinders, waveguides with the complicated properties], *Uspekhi mekhaniki*, pp. 681-702.
7. Birman, V., and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *ASME Appl. Mech. Rew.*, **195**, pp. 195-216.
8. Chih-Ping, Wu and Tsu-Chieh, Tsai (2012), “Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method”, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, issue 5, pp. 1910-1930.
9. Grigorenko, A., Müller, W.H., Wille, R. and Loza, I. (2012), “Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials”, *Continuum Mech. Thermodyn*, **24**(4-6), pp. 515-524.
10. Grigorenko, A.Ya. and Loza, I.A. (2011), “Axisymmetrical waves in the stratified hollow cylinders with piezoceramic layers polarized in axial direction”, *Prikladn. Mekhanika*, vol. 47, no. 6, pp. 118-124.

УДК 539.3

РАСЧЕТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ И УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛЕЙ

¹Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, ²Пархоменко А. Ю., к. ф.-м. н., доцент,

³Васильева Л. Я., к. ф.-м. н.

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, Украина

^{2,3}Николаевский национальный университет им. В.О. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, Николаев, Украина

ayagrigorenko@yandex.ua, park-om@yandex.ua

Для определения влияния толщины оболочек на значения частот свободных колебаний исследовались изотропные пологие оболочки с разными геометрическими параметрами. Подход к решению поставленной задачи базировался на применении метода сплайн-аппроксимации. Расчеты проводились по двум теориям: классической (Кирхгофа-Лява) и уточненной (Тимошенко-Миндлина). Определена зависимость резонансных частот колебаний оболочек от их толщины при расчетах на основе обеих моделей при разных геометрических параметрах.

Ключевые слова: пологая оболочка, метод сплайн-аппроксимации, теория Кирхгофа-Лява, теория типа Тимошенко, уточненная постановка, точки коллокации.

РОЗРАХУНОК ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ІЗОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ КЛАСИЧНОЇ ТА УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛЕЙ

¹Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, ²Пархоменко О. Ю., к. ф.-м. н., доцент,

³Васильєва Л. Я., к. ф.-м. н.

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, Україна

^{2,3}Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,
вул. Нікольська, 24, м. Миколаїв, Україна

ayagrigorenko@yandex.ua, park-om@yandex.ua

Для визначення впливу товщини оболонок на значення частот вільних коливань досліджувалися ізотропні пологі оболонки з різними геометричними параметрами. Підхід до розв'язання поставленої задачі базувався на використанні метода сплайн-апроксимації. Розрахунки проводилися за двома теоріями: класичною (Кірхгофа-Лява) та уточненою (Тимошенка-Міндіна). Визначена залежність резонансних частот коливань оболонок від їх товщини при розрахунках на основі обох моделей при різних геометричних параметрах.

Ключові слова: полого оболонка, метод сплайн-апроксимації, теорія Кірхгофа-Лява, теорія типу Тимошенка-Міндіна, уточнена постановка, точки колокації.

CALCULATION OF FREE VIBRATIONS OF ISOTROPIC SHALLOW SHELLS BASED ON CLASSICAL AND REFINED THEORIES

¹Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

²Parkhomenko A. Yu., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,

³Vasilieva L. Ya., Ph.D. in Physics and Maths

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kiev, Ukraine

^{2,3}Sukhomlinskii Nikolaev State University,
Nicholas str., 24, Nikolaev, Ukraine

ayagrigorenko@yandex.ua, park-om@yandex.ua

A research objective was to determine the dependence of the values of the natural frequencies of vibrations of isotropic shallow shells on their thickness in the calculations on the basis of classical and refined models. The classical theory is based on the Kirchhoff-Love hypotheses: straight, normal to the middle surface of the shell element is straightforward

and normal after deformation, keeping the length; normal stresses on planes parallel to the coordinate surface can be neglected. The refined theory is based on the Timoshenko-Mindlin hypotheses: initially rectilinear element of a normal after deformation keeps the length and straightforwardness, but doesn't remain perpendicular to a median surface; normal stresses on planes parallel to the coordinate surface can be neglected. Numerical solution of the problem based on the method of spline approximation to one of the coordinate directions for the reduction of the original two-dimensional problem to a boundary eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients, with a further solution of the received system with a numerical method of discrete orthogonalization. As the object of study isotropic rectangular shallow shells of constant thickness were considered. The numerical data suggest a pattern: at the small thickness of the shells frequency values obtained by both theories are almost identical, but with an increase in the relative thickness the difference between the corresponding frequencies increases. For higher frequencies it becomes essential. Thus, it can be argued that the thin shell should be calculated using the classical theory, which simplifies the initial relations and increase the speed of calculation. Determination of frequencies of vibrations of thick shallow shells should be carried out in a refined approach, which in this case gives more accurate results for all considered types of geometrical parameters.

Key words: shallow shell, method of spline-approximation, theory of Kirchhoff-Love, theory of Tymoshenko, refined approach, points of collocation.

ВВЕДЕНИЕ

При создании современных деталей и конструкций в различных областях техники, строительства, промышленности часто используются конструктивные элементы в виде пологих оболочек с разными механическими и геометрическими характеристиками. Для обеспечения прочности и надежности указанных конструкций крайне важна информация о динамических характеристиках таких элементов, в том числе и их резонансных частотах и формах колебаний, что гарантирует безопасность и долговечность эксплуатации. Важным параметром является толщина пологих оболочек, значение которой может варьироваться в широком диапазоне. При расчете тонких оболочек часто используется классическая теория Кирхгоффа-Лява, в исходных уравнениях которой не учитывается ряд параметров, отсутствие которых незначительно влияет на конечный результат в силу их практической маловажности. Среди прочего, в классической постановке не учитываются поперечные сдвиги, влияние которых возрастает с увеличением толщины оболочки [1]. Поэтому при расчетах частот колебаний нетонких оболочек целесообразно использовать уточненные теории, в уравнения которых входят поперечные сдвиги, одна из которых – теория типа Тимошенко-Миндлина [2, 3].

Целью исследования было определение зависимости значений собственных частот колебаний изотропных пологих оболочек от их толщины при расчетах на основе классической и уточненной моделей. Численное решение поставленной задачи базировалось на использовании метода сплайн-аппроксимации по одному из координатных направлений для сведения исходной двумерной задачи к краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, с дальнейшим решением полученной системы численным методом дискретной ортогонализации [2-5].

ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается задача о колебаниях изотропной полой оболочке в декартовой системе координат на основе применения классической и уточненной теорий. Геометрия оболочки отождествляется с геометрией ее срединной поверхности.

Классическая теория основывается на гипотезах Кирхгоффа-Лява [2, 3, 6]: прямолинейный, нормальный к срединной поверхности элемент оболочки остается прямолинейным и нормальным после деформации, сохраняя длину; нормальными напряжениями на площадках, параллельных к координатной поверхности, можно пренебречь.

В уточненной теории за исходные принимаются гипотезы Тимошенко-Миндлина [2, 3]: изначально прямолинейный элемент нормали после деформации сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается перпендикулярным к срединной поверхности; нормальными напряжениями на площадках, параллельных к координатной поверхности, можно пренебречь.

Согласно принятым гипотезам прямолинейного элемента, перемещения оболочки представим в виде [2, 3, 6-8]:

Классическая теория	Уточненная теория
$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\vartheta_x(x, y, t);$	$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t);$
$u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\vartheta_y(x, y, t);$	$u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t);$
$u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t)$	$u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t)$

(1)

где x, y, z – координаты точек оболочки; u_x, u_y, u_z – соответствующие перемещения; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности в направлениях x, y, z ; ϑ_x, ϑ_y – углы поворота нормального элемента относительно координатных осей без учета поперечных сдвигов; ψ_x, ψ_y – полные углы поворота прямолинейного элемента.

В соответствии с (1), выражения для деформаций записываем в виде:

Классическая теория	Уточненная теория
$e_x(x, y, z, t) = \varepsilon_x(x, y, t) + z\kappa_x(x, y, t);$	$e_x(x, y, z, t) = \varepsilon_x(x, y, t) + z\chi_x(x, y, t);$
$e_y(x, y, z, t) = \varepsilon_y(x, y, t) + z\kappa_y(x, y, t);$	$e_y(x, y, z, t) = \varepsilon_y(x, y, t) + z\chi_y(x, y, t);$
$e_{xy}(x, y, z, t) = \varepsilon_{xy}(x, y, t) + z2\kappa_{xy}(x, y, t);$	$e_{xy}(x, y, z, t) = \varepsilon_{xy}(x, y, t) + z2\chi_{xy}(x, y, t);$
$e_{xz}(x, y, z, t) = 0; e_{yz}(x, y, z, t) = 0;$	$e_{xz}(x, y, z, t) \cong \gamma_x(x, y, t);$
	$e_{yz}(x, y, z, t) \cong \gamma_y(x, y, t),$

(2)

где γ_x, γ_y – углы поворота, вызванные поперечными сдвигами; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тангенциальной деформации, определяющие внутреннюю геометрию координатной поверхности; $\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}$ – компоненты изгибной деформации в классической теории; $\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$ – компоненты изгибной деформации в уточненной теории, характеризующие изгибание и скручивание координатной поверхности.

Соотношения, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями в обеих теориях принимают вид [2, 3, 6-8]:

Классическая теория	Уточненная теория
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w;$	$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$
$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$	;
$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$	$\chi_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w; \quad \chi_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w;$
$\vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u; \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v;$	$2\chi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x};$
	$\vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u; \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v;$
	$\psi_x = \gamma_x + \vartheta_x; \quad \psi_y = \gamma_y + \vartheta_y,$

(3)

где k_1, k_2 – кривизны.

Уравнения, описывающие свободные поперечные колебания пологих оболочек в теориях Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Миндлина, имеют вид [2, 3, 6-8]:

Классическая теория	Уточненная теория
$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$ $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x;$ $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y;$	$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0;$ $\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0;$ $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$ $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0;$ $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0.$

Для нормальных и сдвигающих усилий N_x, N_y и N_{xy}, N_{yx} , изгибающих и крутящих моментов M_x, M_y и M_{xy}, M_{yx} , перерезывающих усилий Q_x, Q_y справедливы следующие соотношения упругости [2, 3]:

Классическая теория	Уточненная теория
$N_{xy} = N_{yx} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$ $M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$ $M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$ $M_{xy} = M_{yx} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$	$N_{xy} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_2 D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right);$ $N_{yx} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_1 D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right);$ $M_x = D_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w \right) + D_{12} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w \right);$ $M_y = D_{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w \right);$ $M_{xy} = M_{yx} = D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right);$ $Q_x = K_1 \gamma_x = K_1 \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u \right);$ $Q_y = K_2 \gamma_y = K_2 \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} - k_2 v \right);$
$N_x = C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \right); \quad N_y = C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \right).$	

Жесткостные коэффициенты для изотропного материала задаются следующим образом [2,3]:

Классическая теория	Уточненная теория
$C_{ij} = B_{ij} h(x, y); D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3(x, y)}{12}; B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; B_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}; B_{66} = G_{12};$	
	$K_1 = \frac{5}{6} h(x, y) G_{13}; K_2 = \frac{5}{6} h(x, y) G_{23}.$

(6)

Для классической теории из системы уравнений (4) – (6) получим три эквивалентных дифференциальных уравнения относительно трех перемещений u, v и w точек срединной поверхности, а в случае уточненной теории – пять эквивалентных дифференциальных уравнений относительно трех перемещений u, v и w точек срединной поверхности и двух полных углов поворота прямолинейного элемента ψ_x, ψ_y .

На контурах оболочки $x=0, a$ и $y=0, b$ задаются граничные условия, которые определяются через перемещения и углы поворота. Ниже приводятся выражения для граничных условий при $x = \text{const}$:

Классическая теория	Уточненная теория	
1) шарнирно закрепленный контур		
$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0$	при $x = 0, x = a$;

(7)

2) жестко закрепленный контур		
$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$	при $x = 0, x = a$;

(8)

Аналогичные условия задаются на контурах $y = \text{const}$, производя следующие замены в уравнениях (7)-(8): $x \rightarrow y, u \rightarrow v, \psi_x \rightarrow \psi_y$.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Решение систем дифференциальных уравнений ищем в виде:

Классическая теория	Уточненная теория
$u(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \chi_i(y);$ $v(x, y) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \chi_i(y);$ $w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \chi_i(y);$	$u(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \phi_{1,i}(y); v(x, y) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \phi_{2,i}(y);$ $w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \phi_{3,i}(y);$ $\psi_x(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(x) \phi_{4,i}(y); \psi_y(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(x) \phi_{5,i}(y),$

(9)

где $u_i(x), v_i(x), w_i(x), \psi_{xi}(x), \psi_{yi}(x)$ ($i=0, \dots, N$) – искомые функции; $\chi_i(y)$ – функции, построенные с помощью В-сплайнов третьей степени $N \geq 4$, $\phi_{ji}(y)$ ($j=1 \dots 5$) – функции, построенные с помощью В-сплайнов пятой степени $N \geq 6$, удовлетворяющие граничным условиям на контурах $y=0$ и $y=b$.

Подставив (9) в исходные уравнения, будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, b]$, $k=0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки

($N = 2n + 1, n \geq 3$) и при условии, что $\xi_{2i} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, ($i = 0, \dots, n$), на отрезке $[y_{2i}, y_{2i+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[y_{2i+1}, y_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. После всех преобразований получаем систему $N + 1$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i, w_i в классической теории и $u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}$ – в уточненной [2, 3, 6-8].

Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений при классической постановке можно привести к нормальному виду:

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega)\bar{Y} \quad (0 \leq x \leq a), \quad (10)$$

где

$$\bar{Y} = [\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_x, \bar{\psi}'_x, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}'_y]^T = [u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, w''_0, \dots, w''_N, w'''_0, \dots, w'''_N]^T$$

– вектор-столбец искомых функций и их производных размерностью $8(N + 1)$; $A(x, \omega)$ – квадратная матрица порядка $8(N + 1) \times 8(N + 1)$. Аналогично формулируются граничные условия (7)-(8) для системы уравнений:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{0}. \quad (11)$$

В случае уточненной теории, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений приводится к нормальному виду

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega)\bar{Y} \quad (0 \leq x \leq a), \quad (12)$$

где

$$\bar{Y} = [\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_x, \bar{\psi}'_x, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}'_y]^T = [u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \psi_{x0}, \dots, \psi_{xN}, \psi'_{x0}, \dots, \psi'_{xN}, \psi_{y0}, \dots, \psi_{yN}, \psi'_{y0}, \dots, \psi'_{yN}]^T$$

– вектор-столбец искомых функций и их производных размерностью $10(N + 1)$; $A(x, \omega)$ – квадратная матрица порядка $10(N + 1) \times 10(N + 1)$. Аналогично формулируются граничные условия (7)-(8) для системы уравнений:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{0}. \quad (13)$$

Задача на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (7) и (8) решалась устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [2-5].

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве объекта исследования рассмотрены изотропные прямоугольные пологие оболочки постоянной толщины. Характеристики материала оболочек следующие: $E = 2,016 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Были исследованы оболочки: нулевой кривизны ($l_x/a = l_y/a = 0$), цилиндрические ($l_x/a = 0,2$, $l_y/a = 0$) и двоякой кривизны ($l_x/a = l_y/a = 0,2$), которые соответствовали условию пологости: $l \leq \frac{\min(a,b)}{5}$, где l – стрела подъема, a и b – линейные размеры. Рассмотрены квадратные ($a/b = 1$) и прямоугольные ($b/a = 2$) в плане оболочки. Толщина

каждой из рассматриваемых оболочек менялась дискретно, соотношение толщины оболочки к наименьшему размеру в плане варьировалось от $h/a = 0,01$ (тонкие оболочки), до $h/a = 0,11$ (нетонкие оболочки).

Расчеты проводились при шарнирном закреплении всех сторон оболочки.

Для определения влияния количества точек коллокации N на результат вычислений, были проведены расчеты первых четырех частот свободных колебаний оболочки $\bar{\omega}_i$ при разном количестве точек коллокации. Результаты расчетов приведены в таблице 1. Для исследования была выбрана изотропная оболочка нулевой кривизны (пластина) с квадратным планом и соотношением $h/a = 0,03$.

Классическая теория	Уточненная теория
$u = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$ $v = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$ $w = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	$u = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$ $v = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$ $w = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (14)$ $\psi_x = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} d_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$ $\psi_y = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} e_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$

Таблица 1 – Определение влияния количества точек коллокации N на результат вычислений

Теория	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$							
	i	N						
		10	12	14	16	18	20	22
Кирхгофа-Лява	1	0,1710	0,1710	0,1710	0,1710	0,1710	0,1709	0,1709
	2	0,4274	0,4274	0,0427	0,4274	0,4274	0,4274	0,4274
	3	0,4277	0,4275	0,4274	0,4274	0,4274	0,4274	0,4274
	4	0,6840	0,6839	0,6838	0,6838	0,6838	0,6838	0,6838
Тимошенко-Миндлина	1	0,1885	0,1817	0,1779	0,1756	0,1741	0,1731	0,1724
	2	0,4314	0,4285	0,4270	0,4260	0,4254	0,4250	0,4247
	3	0,5518	0,5038	0,4769	0,4604	0,4499	0,4429	0,4380
	4	0,7610	0,7273	0,7091	0,6982	0,6914	0,6869	0,6839

Все расчеты в статье проводились при $N=18$ точках коллокации, так как такое их количество является оптимальным относительно точности вычислений и затраченного для расчетов машинного времени.

Таблица 2 – Частоты свободных колебаний оболочек, рассчитанные аналитически (А) и с применением метода сплайн-аппроксимации (В) для случая классической (Кирхгофа-Лява) теории

План оболочки	Тип оболочки	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$						
		i	h / a					
			0,03		0,07		0,11	
			А	В	А	В	А	В
Квадратный план (a / b = 1)	Пластина (l _x / a = l _y / a = 0)	1	0,1709	0,1710	0,3989	0,3989	0,6268	0,6268
		2	0,4274	0,4274	0,9972	0,9972	1,5670	1,5670
		3	0,4274	0,4274	0,9972	0,9973	1,5670	1,5671
		4	0,6838	0,6838	1,5955	1,5956	2,5072	2,5073
	Цилиндрическая оболочка (l _x / a = 0,2 ; l _y / a = 0)	1	0,5019	0,5019	0,7694	0,7694	0,9087	0,9087
		2	0,6797	0,6797	1,0313	1,0313	1,5890	1,5890
		3	0,8648	0,8648	1,4500	1,4500	1,8877	1,8878
		4	0,9489	0,9489	1,7258	1,7259	2,5921	2,5922
	Оболочка двоякой кривизны (l _x / a = l _y / a = 0,2)	1	1,3268	1,3268	1,3749	1,3749	1,4574	1,4575
		2	1,3834	1,3834	1,6509	1,6509	2,0462	2,0462
		3	1,3834	1,3837	1,6509	1,6505	2,0462	2,0463
		4	1,4828	1,4829	2,0681	2,0681	2,8315	2,8316
Прямоугольный план (b / a = 2)	Пластина (l _x / a = l _y / a = 0)	1	0,1068	0,1068	0,2493	0,2493	0,3918	0,3918
		2	0,1709	0,1709	0,3989	0,3989	0,6268	0,6268
		3	0,2778	0,2779	0,6482	0,6483	1,0186	1,0188
		4	0,3633	0,3633	0,8476	0,8476	1,3320	1,3320
	Цилиндрическая оболочка (l _x / a = 0,2 ; l _y / a = 0)	1	0,2840	0,2840	0,3625	0,3625	0,4719	0,4720
		2	0,3714	0,3714	0,7694	0,7694	0,9087	0,9088
		3	0,5019	0,5019	0,8511	0,8511	1,3342	1,3342
		4	0,6797	0,6797	1,0313	1,0314	1,3665	1,3667
	Оболочка двоякой кривизны (l _x / a = l _y / a = 0,2)	1	0,5574	0,5574	0,6099	0,6099	0,6807	0,6807
		2	0,5668	0,5668	0,9311	0,9311	1,0492	1,0492
		3	0,7018	0,7018	0,9472	0,9472	1,3974	1,3974
		4	0,8585	0,8585	1,1420	1,1421	1,4442	1,4444

В таблице 2 приведены первые четыре обезразмеренные частоты свободных колебаний оболочек $\bar{\omega}_i$ с разными геометрическими параметрами, рассчитанные аналитически с

использованием разложения неизвестных функций в ряды Фурье (14) (столбцы А), а также результаты расчетов исследуемых оболочек с применением предложенного метода сплайн-аппроксимации при шарнирном закреплении всех сторон оболочки (столбцы В) для случая классической (Кирхгоффа-Лява) теории. Аналогичные данные результатов расчетов частот свободных колебаний для случая уточненной (Тимошенко-Миндлина) теории представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Частоты свободных колебаний оболочек, рассчитанные аналитически (А) и с применением метода сплайн-аппроксимации (В) для случая уточненной (Тимошенко-Миндлина) теории

План оболочки	Тип оболочки	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$						
		i	h / a					
			0,03		0,07		0,11	
			А	В	А	В	А	В
Квадратный план (a / b = 1)	Пластина (l _x / a = l _y / a = 0)	1	0,1704	0,1741	0,3920	0,3926	0,6012	0,6015
		2	0,4239	0,4254	0,9560	0,9563	1,4226	1,4226
		3	0,4239	0,4499	0,9560	0,9622	1,4226	1,4255
		4	0,6750	0,6914	1,4945	1,4983	2,1689	2,1706
	Цилиндрическая оболочка (l _x / a = 0,2 ; l _y / a = 0)	1	0,4846	0,4859	0,7468	0,7471	0,8526	0,8527
		2	0,6756	0,6765	0,9549	0,9552	1,3913	1,3914
		3	0,8350	0,8357	1,4019	1,4062	1,7348	1,7372
		4	0,9310	0,9431	1,6004	1,6040	2,2176	2,2194
	Оболочка двоякой кривизны (l _x / a = l _y / a = 0,2)	1	1,3228	1,3233	1,3527	1,3529	1,4014	1,4015
		2	1,3730	1,3735	1,5862	1,5864	1,8640	1,8641
		3	1,3731	1,3818	1,5866	1,5908	1,8651	1,8678
		4	1,4643	1,4722	1,9392	1,9423	2,4528	2,4545
Прямоугольный план (b / a = 2)	Пластина (l _x / a = l _y / a = 0)	1	0,1066	0,1087	0,2466	0,2471	0,3815	0,3817
		2	0,1704	0,1911	0,3920	0,3984	0,6012	0,6041
		3	0,2763	0,3428	0,6303	0,6545	0,9539	0,9666
		4	0,3608	0,3614	0,8175	0,8177	1,2251	1,2251
	Цилиндрическая оболочка (l _x / a = 0,2 ; l _y / a = 0)	1	0,2776	0,2784	0,3333	0,3337	0,4116	0,4118
		2	0,3525	0,3531	0,7468	0,7503	0,8526	0,8547
		3	0,4846	0,4923	0,7833	0,7835	1,1710	1,1710
		4	0,6756	0,6812	0,9549	0,9574	1,2827	1,2924
	Оболочка двоякой кривизны (l _x / a = l _y / a = 0,2)	1	0,5440	0,5444	0,5920	0,5922	0,6380	0,6382
		2	0,5634	0,5638	0,8840	0,8842	0,9986	1,0004
		3	0,6888	0,6942	0,9114	0,9142	1,2383	1,2383
		4	0,8550	0,8566	1,0712	1,0734	1,3622	1,3714

На рис. 1-6 представлены графики зависимости первых четырех безразмерных частот свободных колебаний исследуемых оболочек $\bar{\omega}_i$ от соотношения толщины оболочки к минимальному размеру в плане h / a. Сплошным линиям соответствуют графики зависимости при расчетах по классической теории, пунктирным – при уточненной теории.

ВЫВОДЫ

Как видно из таблицы 1, результаты расчета частот по классической теории имеют маленькую зависимость от количества точек коллокации и уже при N=12 дают приемлемый результат. При расчетах по уточненной теории наблюдается значительная зависимость значения частоты от количества точек коллокации.

Анализируя данные таблиц 2 и 3, а также графиков 1-6, можно сделать вывод, что частоты, рассчитанные по уточненной теории, при сравнительно больших толщинах оболочки меньше, чем аналогичные частоты, рассчитанные по классической теории.

Полученные численные данные позволяют сделать вывод о такой закономерности: при малой толщине оболочек значения частот, полученных по обеим теориям, почти совпадают, но с увеличением относительной толщины разница между соответствующими частотами увеличивается. Для высших частот она становится существенной. Так, при $h/a = 0,11$, разница между первыми частотами составляет не более 1%, в то время, как между четвертыми – уже около 10%. При разных геометрических параметрах сохраняется подобная картина зависимостей.

Оболочка нулевой кривизны ($l_x/a = l_y/a = 0$):

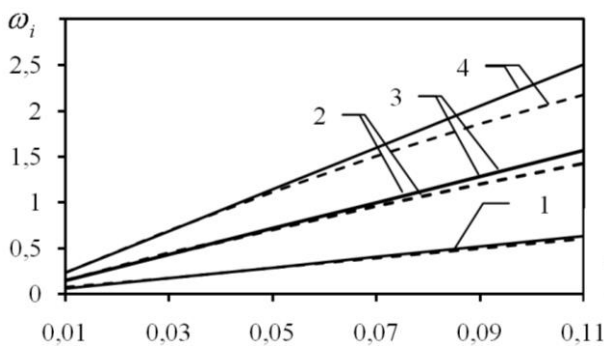


Рис. 1. $a/b = 1$

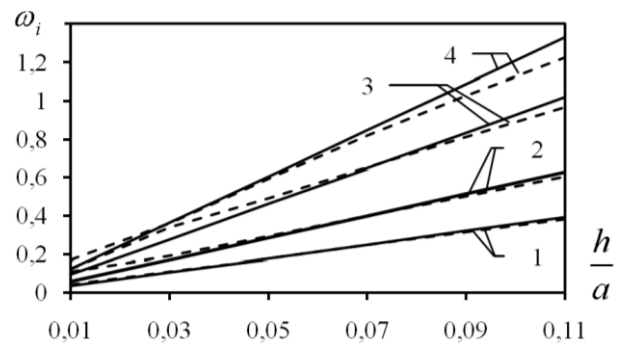


Рис. 2. $b/a = 2$

Цилиндрическая оболочка ($l_x/a = 0,2$, $l_y/a = 0$):

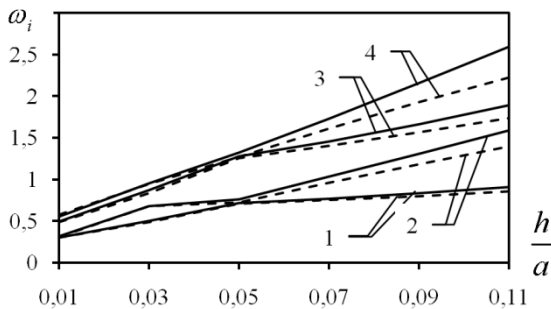


Рис. 3. $a/b = 1$

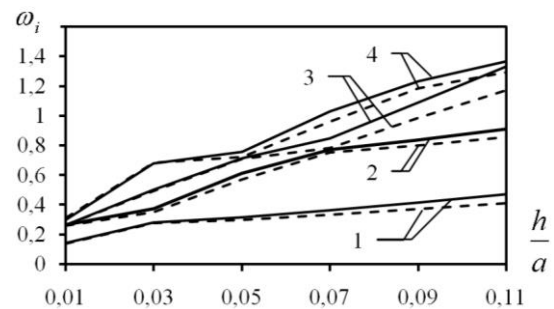


Рис. 4. $b/a = 2$

Оболочка двоякой кривизны ($l_x/a = l_y/a = 0,2$):

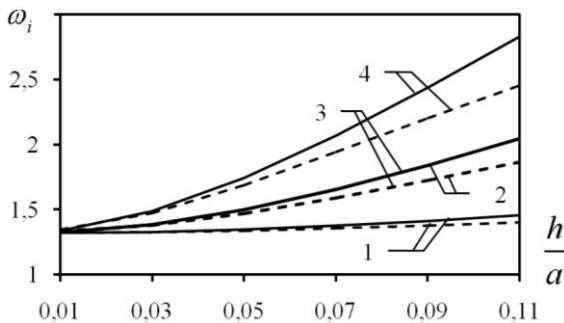


Рис. 5. $a/b = 1$

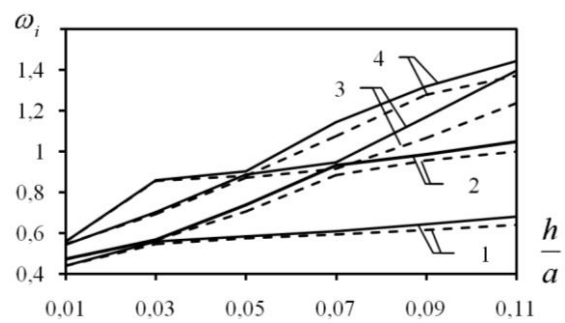


Рис. 6. $b/a = 2$

Таким образом, можно утверждать, что тонкие оболочки целесообразнее рассчитывать с использованием классической теории, которая позволяет упростить исходные соотношения и

увеличить скорость расчетов. Определение частот колебаний нетонких пологих оболочек ($h/a \geq 0,07$, где a – минимальный размер в плане) следует проводить в уточненной постановке, которая в этом случае дает более точные результаты при всех рассмотренных типах геометрических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.
2. Григоренко Я. М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. – К. : Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Григоренко Я. М. Методы расчета оболочек : в 5 т. / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – К. : Наук. думка, 1981. – Т. 4 : Теория оболочек переменной жесткости. – 544 с.
4. Григоренко А. Я. Применение сплайн-аппроксимации для решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины / А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова // Прикл. механика. – 2005. – 41, №10. – С. 90-99.
5. Григоренко Я. М. Численные методы / Я.М. Григоренко, Ю.Н. Шевченко, А.Т. Василенко и др. – К. : «А.С.К.», 2002. – 448 с.
6. Будак В. Д. О свободных колебаниях прямоугольных в плане ортотропных пологих оболочек переменной толщины / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, №6. – С. 102-115.
7. Григоренко А. Я. Свободные колебания пологих прямоугольных в плане ортотропных нетонких оболочек переменной толщины / А.Я. Григоренко, А.Ю. Пархоменко // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, №8. – С. 29-41.
8. Григоренко А. Я. О влиянии поперечных сдвигов на расчет собственных частот колебаний оболочек средней толщины / А.Я. Григоренко, А.Ю. Пархоменко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 73-79.

REFERENCE

1. Ambartsumyan, S.A. (1974), *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells], Nauka, Moscow.
2. Grigorenko, Ya.M., Bepalova, E.I., Kitaigorodskii, A.B. and Shinkar', A.I. (1986), *Svobodnye kolebaniya elementov obolocheknykh konstrukttsii* [Free vibrations of elements of оболочечных constructions], Nauk. dumka, Kiev.
3. Grigorenko, Ya.M. and Vasilenko, A.T. (1981), *Teoriya obolochek peremennoi zhestkosti* [Theory of shells of variable inflexibility], Nauk. dumka, Kiev (Metody rascheta obolochek: in 5 vol.; vol. 4).
4. Grigorenko, A.Ya. and Efimova, T.L. (2005), Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural-Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness, *Int. Appl. Mech.*, 41, no. 10, pp. 1161-1169.
5. Grigorenko, Ya.M., Shevchenko, Yu.N., Vasilenko, A.T. i dr. (2002), *Chislennyye metody* [Numeral methods], «A.S.K.», Kiev.
6. Budak, V.D., Grigorenko, A.Ya. and Puzyrev, S.V. (2007), Free vibrations of rectangular orthotropic shallow shells with varying thickness, *Int. Appl. Mech.*, 43, no. 6, pp. 670-682.
7. Grigorenko, A.Ya. and Parkhomenko, A.Yu. (2010), Free vibrations of shallow nonthin shells with variable thickness and rectangular planform, *Int. Appl. Mech.*, 46, no. 8, pp. 776-789.

8. Grigorenko, A.Ya. and Parkhomenko, A.Yu. (2012), O vliyanii poperechnykh sdvigov na raschet sobstvennykh chastot kolebani obolochek srednei tolshchiny, *Problemi obchislyuval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruktсии*, issue 19, pp. 73-79.

УДК 519.83

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ І НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ ВІДСІКАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ольховський Д. М., к. ф.-м. н.

*Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Ковалю, 3, Полтава, 36014, Україна*

yemetsli@ukr.net, dmitriy@olhovsky.name

В публікації міститься опис програмної реалізації точних і наближених методів відсікання для розв'язування лінійних оптимізаційних задач на перестановках, яка була розроблена з метою проведення чисельних експериментів для виявлення ефективності роботи даних методів. Програмна реалізація розроблена мовою програмування *Object Pascal* середовища програмування *Delphi*.

Ключові слова: програмна реалізація, точні та наближені методи, лінійні оптимізаційні задачі на перестановках.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОТСЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Ольховский Д. Н., к. ф.-м. н.

*Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Ковалю, 3, Полтава, 36014, Украина*

yemetsli@ukr.net, dmitriy@olhovsky.name

В публикации содержится описание программной реализации точных и приближенных методов отсечения для решения линейных оптимизационных задач на перестановках, которая была разработана с целью проведения многочисленных экспериментов для выявления эффективности работы данных методов. Программная реализация разработана на языке программирования *Object Pascal* среды программирования *Delphi*.

Ключевые слова: программная реализация, точные и приближенные методы, линейные оптимизационные задачи на перестановках.

SOFTWARE IMPLEMENTATION EXACT AND APPROXIMATE METHODS CLIPPING FOR SOLVING LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS ON PERMUTATIONS

Iemets O. O., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Olhovskiy D. M., Ph.D. in Physics and Maths

*Poltava University of Economics and Trade,
Kovalya str., 3, Poltava, 36014, Ukraine*

yemetsli@ukr.net, dmitriy@olhovsky.name

Topical issues is to develop and research new methods to general linear combinatorial optimization problem on permutations, is essential for the development of combinatorial optimization. This publication describes the software implementation exact and approximate methods clipping for solving linear optimization problems on permutations that was developed to conduct numerical experiments to identify the effectiveness of these methods. Software implementation developed using programming language *Object Pascal* in the programming environment *Delphi*. In developing the program belonged task to create a universal software package for solving linear combinatorial optimization on permutations known methods, and new methods. In the software implemented method of combinatorial

second clipping, clipping method based on combinatorial algorithm Karmarkar for conventional linear combinatorial optimization problems on permutations, graph analysis method permutation polyhedron, modification of the second method of combinatorial clipping with the exception of degeneracy in the auxiliary linear programming problem and the method of clipping vertices Shelves polyhedron conditioned for solving linear optimization problems on permutations. Practical numerical experiments have shown that using real numbers in the program can achieve greater performance and resource savings of RAM otherwise - of using fractions - possible to eliminate possible errors in the calculation rounding numbers due to higher cost of computing resources computer system.

Key words: software implementation, the exact and approximate methods, linear optimization problems on permutations.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість останніх наукових публікацій свідчить, що евклідова комбінаторна оптимізація є прогресивним та перспективним напрямком досліджень в області математичного програмування. Серед задач, дослідження яких стає все більш важливим, є задачі евклідової комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах, зокрема на перестановках. Інтерес до дослідження даних задач викликаний великим практичним значенням у зв'язку з необхідністю їхнього розв'язування у різних сферах економічної, соціальної діяльності.

Актуальним є питання, що полягає в розробці та дослідженні нових методів для загальної лінійної задачі комбінаторної оптимізації на перестановках, має суттєве значення для розвитку комбінаторної оптимізації.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Методи розв'язування лінійних оптимізаційних задач ґрунтуються на відомих елементах теорії та методах евклідової комбінаторної оптимізації, а також інших відомих методах, зокрема поліноміальних алгоритмах.

Так в [1, 2] запропоновано та обґрунтовано другий методу комбінаторного відсікання; в [3] – запропоновано метод комбінаторного відсікання на основі алгоритму Кармаркара для умовних лінійних задач комбінаторної оптимізації на перестановках; запропонований в [4] метод аналізу графа переставного многогранника; в [5, 6] розроблено і викладено модифікація другого методу комбінаторного відсікання з виключенням виродженості в допоміжних задачах лінійного програмування; обґрунтовано метод відсікання вершин графа переставного многогранника для розв'язування лінійних умовних оптимізаційних задач на перестановках [7]. Для підтвердження ефективності роботи даних методів проведено ряд числових експериментів [8, 9].

Метою даної публікації є опис програмної реалізації всіх розроблених методів та алгоритмів [1-7], а також характеристика структури створеної програми та її детальний аналіз.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розробки програми було обрано мову програмування високого рівня *Object Pascal* середовища програмування *Delphi* [10, 11]. Вибір даної мови програмування та середовища спирається на наступні її особливості:

- потужне середовище програмування, яке дозволяє створювати програми будь-якої складності;
- наявність необхідного інструментарію для налагодження програм, в тому числі з реалізацією для багатопроцесорних систем;
- висока швидкість створених програм, яка не поступається іншим мовам високого рівня.

Створене програмне забезпечення призначене для функціонування в операційній системі *MS Windows*, тестування та чисельні експерименти проводились в *MS Windows 7*.

При розробці програми ставилася задача створити універсальний програмний комплекс для розв'язування задач лінійної комбінаторної оптимізації на перестановках відомими методами, а також новими методами, запропонованими в [1-7].

Для можливості проведення тестування розроблених та існуючих методів в різних умовах було реалізовано механізм роботи програми з раціональними дробами. Така реалізація дозволяє легко проводити переключення між апаратом дійсних чисел та роботою з використанням дробів, не змінюючи алгоритми самих методів. Для цього використано відповідні директиви компілятора:

- `{ $Define REAL }` – для використання дійсних чисел;
- `{ $Define FRACT }` – для застосування механізму роботи з раціональними дробами.

З метою ефективного процесу розробки програми було введено уніфікований тип *TNumber*, який використовується для проведення всіх обчислень і в залежності від директиви компілятора є або дійсним типом, або раціональним дробом.

Практичні чисельні експерименти показали, що використання дійсних чисел в роботі програми дозволяє досягти більшої швидкодії та економії ресурсів оперативної пам'яті, в іншому випадку – використання апарату дробів – дозволило повністю усунути можливі похибки округлення чисел при обчисленнях за рахунок більших витрат обчислювальних ресурсів комп'ютерної системи.

Програмна реалізація створена в рамках єдиного проекту, з розділенням на окремі модулі та класи.

Загальну архітектуру створеної програми можна представити у вигляді трьох основних функціональних блоків:

- блоку взаємодії з користувачем та даними;
- блоку реалізації допоміжного функціоналу та оголошень змінних та типів;
- обчислювальний блок.

Для наочного зображення загальної архітектури наведемо її схематичне представлення на рис. 1.

Наведена програмна архітектура дозволила виокремити функціональні частини програми у окремі модулі та класи програми для забезпечення їхньої ефективної взаємодії та керування роботою програми.

Даний програмний комплекс є багатопроекторною реалізацією, що виконана з застосуванням механізму паралельних обчислень за принципом «ведучий – ведений», відповідно до якого один основний потік виконує розподіл робіт між декількома робочими потоками в багатопроекторній системі.

Розглянемо, для прикладу, алгоритм роботи створеної програмної реалізації другого методу комбінаторного відсікання:

1. Ініціалізація та обробка початкових даних.
2. Розв'язування допоміжної задачі лінійного програмування відповідним методом для розв'язування задачі лінійного програмування (або симплекс-методом, або з використанням алгоритму Кармаркара).
3. Перевірка отриманого розв'язку на оптимальність, або встановлення нерозв'язності задачі. У разі знаходження оптимального розв'язку – вихід з алгоритму, інакше – перехід на пункт 4.

4. Побудова відсікання для переходу до наступної точки розв'язку шляхом виконання наступних етапів:
 - а) знаходження всіх систем рівнянь, розв'язком яких є поточний розв'язок ДЗЛП;
 - б) для кожної зі знайдених систем відбувається пошук сусідніх для поточної точок шляхом почергової заміни рівнянь системи на рівняння з системи переставного многогранника та доданих відсікань на попередньому етапі.
5. Через знайдені сусідні точки будується відсікання, яке забезпечує відсікання поточного розв'язку ДЗЛП та не відсікає жодної іншої точки. У разі, якщо по знайденим точкам відсікання побудувати неможливо, виконуються наступні дії:
 - а) змінюється порядок координат при побудові відсікання, що дозволяє уникнути побудови відсікання, яке лежить на одній грані з поточною точкою-розв'язком;
 - б) якщо перестановка координат не забезпечує побудову відсікання, проводиться зменшення вимірності простору.
6. Побудоване відсікання додається до поточної системи, перехід на пункт 2.

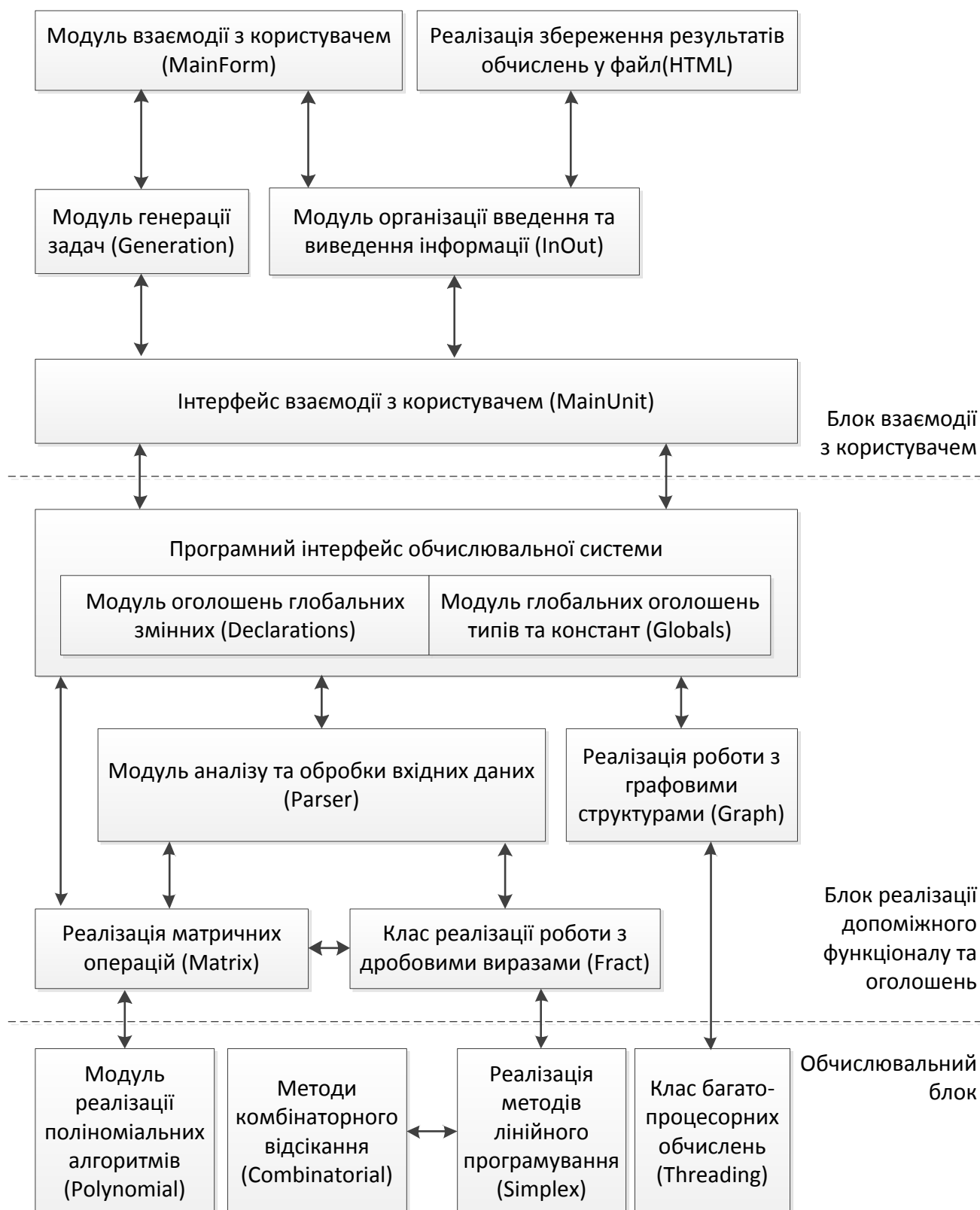


Рис. 1. Архітектура програмної реалізації

ВИСНОВКИ

Публікація містить опис створеної програмної реалізації розроблених методів [1-7]. Програмна реалізація дозволила провести серію чисельних експериментів, дослідити ефективність розроблених методів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ємець О. О. Другий метод комбінаторного відсікання та розв'язування комбінаторних транспортних задач на переставленнях / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський, Т.О. Парфьонова // Штучний інтелект. – 2011. – № 1. – С. 161-167.
2. Ємець О. О. Транспортні задачі на переставленнях та їх розв'язування другим методом комбінаторного відсікання / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Т.О. Парфьонова, Д.М. Ольховський // Економіка : проблеми теорії та практики: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2010. – Т. VI, № 264. – С. 1449-1457.
3. Ємець О. О. Оптимізаційні задачі на переставленнях: метод комбінаторного відсікання з використанням алгоритму Кармаркара / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський // Наукові записки НАУКМА. – 2011. – Т. 125. – С. 61-63.
4. Емец О. А. Метод анализа графа перестановочного многогранника для линейных условных оптимизационных задач с реализацией для многопроцессорной системы / О.А. Емец, Е.М. Емец, Д.Н. Ольховский // «Проблемы управления и информатики». – 2012. – № 3. – С. 46-55.
5. Ємець О. О. Другий метод комбінаторного відсікання в задачах на вершинно розташованих множинах з виключенням виродженості в допоміжних задачах лінійного програмування / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: матеріали дев'ятого Міжвузівського науково-практичного семінару 16-17 квітня 2010 р. – Кіровоград, 2010. – С. 44-48.
6. Ємець О. О. Модифікація другого методу комбінаторного відсікання / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII) : праці міжнародної молодіжної математичної школи. – К. : Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 60-61.
7. Ємець О. О. Розв'язування оптимізаційних задач методом відсікання вершин графа переставного многогранника / О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський // Інтелектуальні системи в промисловості і освіті (ІСПО-2011) : Тези доповідей Третьої міжнародної науково-практичної конференції 2-4 листопада 2011 року. – Суми : Видавництво СумДУ, 2011. – Т. II. – С. 106-108.
8. Ємець Є. М. Програмна реалізація методу комбінаторного відсікання з використанням раціональних дробів / Є.М. Ємець, Д.М. Ольховський // Двадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : матеріали конференції 15-17 травня 2008 р. – К. : ТОВ «Задруга», 2008. – С. 610.
9. Ольховський Д. М. Числові експерименти з застосуванням методу комбінаторного відсікання до транспортної задачі на переставленнях / Д. М. Ольховський, Т. О. Парфьонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції 18-20 березня 2010 р. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 149-151.
10. Осипов Д. Л. Delphi. Профессиональное программирование / Д.Л. Осипов. – СПб. : Символ Плюс, 2006. – 1056 с.
11. Teixeira S. Borland Delphi 6 Developer's Guide / S. Teixeira, X. Pacheco. – Sams Publishing, 2001. – 1200 p.

REFERENCES

1. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky D.M. (2011), "The second method of combinatorial clipping and solving combinatorial transport problems on permutations", *Shtuchnyi intelekt*, no. 1, pp. 161-167.
2. Yemets, O.O., Yemets, E.M., Parfionova T.O. and Olhovsky D.M. (2010), "Transport problem on permutations and their solving with second combinatorial clipping method", *Ekonomika: problemy teorii ta praktyky: zbirnyk naukovykh prats*, no. 264, vol. VI, pp. 1449-1457.
3. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2011), "Optimization problem on permutations: clipping method using Karmarkar combinatorial algorithm", *Naukovi zapysky NAUKMA*, vol. 125, pp. 61-63.
4. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2012), "The method of analysis of the graph for linear permutation polyhedron conditional optimization problems with the implementation of a multiprocessor system", *Problemy upravleniya i informatiki*, no. 3, pp. 46-55.
5. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2010), "The second method of cutting off a combinatorial problems on vertex located sets with the exception of degeneracy in the auxiliary linear programming problem", *Kombinatorni konfigurationsi ta yikh zastosuvannia: materialy deviatoho Mizhvuzivskoho naukovo-praktychnoho seminaru*, pp. 44-48.
6. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2011), "Modification of the second method of combinatorial clipping", *Pytannia optymizatsii obchyslen (POO-XXXVII): pratsi mizhnarodnoi molodizhnoi matematychnoi shkoly*, pp. 60-61.
7. Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2011), "Solving optimization problems by clipping vertices adjustable polyhedron", *Intelektualni systemy v promyslovosti i osviti (ISPO-2011)*, Sumy, Ukraine, vol. II, pp. 106-108.
8. Yemets, E.M. and Olhovsky, D.M. (2008), "Software implementation combinatorial clipping method using rational fractions", *Dvadtsiata mizhnarodna naukova konferentsiia imeni akademika M. Kravchuka*, Kyiv, Ukraine, p. 610.
9. Olhovsky, D.M. and Parfionova, T.O. (2010), "Numerical experiments using combinatorial methods clipping to the transportation problem on permutations", *Informatyka ta systemni nauky (ISN-2010): materialy Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii*, Poltava, Ukraine, pp. 149-151.
10. Osipov, D.L. (2006), *Deplhi. Profesionalnoe programmirovaniye* [Deplhi. Professional programming], Simvol Plus.
11. Teixeira, S. and Pacheco, X. (2001), *Borland Delphi 6 Developer's Guide*, Sams Publishing.

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ЗГИНУ ВАРІАНТА МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН

Зеленський А. Г., к. ф.-м. н., доцент

*ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»,
вул. Чернишевського, 24 а, Дніпропетровськ, 49600, Україна*

a.zelensky@mail.ru

Запропонований раніше автором метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними застосовується до неоднорідних диференціальних рівнянь восьмого порядку варіанта математичної теорії пластин. Метод дає можливість звести розв'язування початкового рівняння до розв'язування двох рівнянь Пуассона і двох неоднорідних рівнянь Гельмгольца.

Ключові слова: метод зниження порядку, неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними, згин, варіант математичної теорії не тонких пластин.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СГИБА ВАРИАНТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН

Зеленский А. Г., к. ф.-м. н., доцент

*ГВУЗ «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры»,
ул. Чернышевского, 24 а, Днепропетровск, 49600, Украина*

a.zelensky@mail.ru

Предложенный ранее автором метод понижения порядка неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных используется применительно к неоднородным дифференциальным уравнениям восьмого порядка варианта математической теории пластин. Метод позволяет свести решение исходного уравнения к решению двух уравнений Пуассона и двух неоднородных уравнений Гельмгольца.

Ключевые слова: метод понижения порядка, неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, изгиб, вариант математической теории не тонких пластин.

ABOUT THE SOLUTION FOR GOVERNING BENDING EQUATIONS IN A VERSION OF THIN PLATE THEORY

Zelenskiy A. G., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*Department of Structural Engineering and Strength of Materials,
Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture
Chernyshevsky Street, and 24, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

In this article, the author suggested an approach to solving finite bending equations derived from the mathematical theory version of transverse bending of plates of arbitrary constant thickness. This theory is based on the approach when a three-dimensional problem of the theory of elasticity can be reduced to a two-dimensional one using Reissner variational principle. With this approach, the components of stress-strain state can be represented as Legendre polynomials which are along transverse axis. Boundary conditions in frontal planes can be proximately satisfied in a spatial version of the theory of transverse bending of plates, hence increasing accuracy of a problem solution in contrast to other non-classical theories. The resulting finite equations of the mathematical theory version are interrelated, thus increasing the accuracy order of partial differential equations as the number of terms in series in the approximation of stress-strain state increases.

The proposed version made it possible to find arbitrary precision solutions to boundary problems related to thin/ non-thin plates subjected to arbitrary transverse loading.

In his research, the author used finite equations obtained from taking the first two terms in the expansion of the displacement components. The system of non-homogeneous partial differential equations is of the twelfth order. The author used a system of independent homogeneous equations of fourth order to describe a rotational boundary effect.

The internal stress state and potential boundary effect were determined through a system of non-homogeneous partial differential equations of eighth order. This approach made it possible to reduce the effort in finding the solutions in the system to the general solution of the corresponding homogeneous equation of eighth order of the form

$\nabla^4(\nabla^4 + a_2\nabla^2 + a_0)\Phi_0(x, y) = 0$ with respect to function $\Phi_0(x, y)$, where ∇^2 is the Laplace operator, and to finding

a particular solution of two non-homogeneous differential equations of eighth order of the form $\nabla^4(\nabla^4 + a_2\nabla^2 + a_0)\Phi_{ir}(x, y) = \Pi_{iq}(x, y)$ ($i = 1, 3$) with respect to function $\Phi_{ir}(x, y)$.

Using this approach, it became possible to find a particular solution to a non-homogeneous partial differential equation of eighth order by reducing it to particular solutions of two Poisson equations and two non-homogeneous Helmholtz equations the right side of which could be represented as particular solutions of specific equations of second order. A particular solution for the above non-homogeneous equation of eighth order could be represented as a sum of particular solutions for corresponding (Poisson and Helmholtz) equations.

Key words: reduction of order, non-homogeneous partial differential equation, bending, version of thin plate theory.

ВСТУП

Розв'язування граничних задач на основі класичних теорій пластин та оболонок, які зазнають дії локальних навантажень, мають отвори, різке змінювання механіко-геометричних параметрів, а також при невеликій товщині та в інших випадках, що призводять до великого градієнта змінювання напружено-деформованого стану (НДС), як відомо, дають незадовільні результати. Некласичні уточнені теорії пластин та оболонок, які ґрунтовані на різних гіпотезах, для широкого класу граничних задач також не можуть з високою точністю описувати НДС пластин та оболонок, оскільки знаходження компонент НДС з високою довільною точністю в принципі неможливо, що обумовлено зображенням компонент НДС у вигляді, який не враховує всі якісні характеристики змінення НДС по товщині [1]. Отримувані при цьому системи основних диференціальних рівнянь, як правило, мають невисокий порядок. З іншого боку, розв'язування граничних задач у тривимірній постановці пов'язано з великими і, як правило, нездоланими труднощами. Звідси і випливає актуальність дослідження, яка полягає в необхідності розвинення і побудови нових варіантів математичної теорії пластин та оболонок довільної сталої товщини, які б ураховували всі компоненти НДС з високою точністю, і розробці ефективних математичних методів розв'язування систем диференціальних рівнянь високого порядку з частинними похідними, які при цьому виникають.

Перші варіанти математичної теорії пластин та оболонок було запропоновано в [2-4]. Надалі математичний підхід в апроксимації компонент НДС у вигляді рядів по товщинній координаті розвивався в [5-8]. У [9] варіант математичної теорії [8] узагальнено для високих наближень при довільному поперечному навантаженні (як при симетричному, так і при кососиметричному) трансверсально-ізотропних пластин довільної сталої товщини. У [8, 9] ураховуються усі компоненти НДС, причому, граничні умови на лицевих площинах задовольняються точно, на відміну від інших теорій. Це суттєво підвищує їх точність. Розв'язування граничних задач за варіантом теорії [9] суттєво уточнює НДС не тільки товстих пластин, а і тонких, які мають високий градієнт змінювання НДС.

Розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними високого порядку пов'язано з великими математичними труднощами. Складність розв'язування вказаних рівнянь викликана, зокрема, знаходженням їх частинних розв'язків.

У нашій роботі метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними [10-12] використовується для неоднорідних диференціальних рівнянь парного порядку з частинними похідними, які описують деформований стан трансверсально-ізотропних не тонких пластин. Варіант математичної теорії пластин [9] ґрунтується на методі розкладання усіх компонент напружено деформованого стану в ряди за поліномами Лежандра по товщинній координаті. Тривимірна задача теорії пружності зводиться до двовимірної при допомозі варіаційного принципу Рейснера. Граничні задачі згідно з цим варіантом теорії можуть бути розв'язані з будь-якою точністю, яка зростає зі збільшенням кількості членів у рядах розкладання НДС, що в свою чергу призводить до підвищення порядку диференціальних рівнянь.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Варіант математичної теорії не тонких трансверсально-ізотропних пластин [9] зводиться до розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними $2n$ -го порядку ($n = 3, 4, \dots$) вигляду:

$$(\nabla^{2n} + A_1 \nabla^{2(n-1)} A_2 \nabla^{2(n-2)} + \dots + A_n) \Phi(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

де A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – відомі числа; ∇^2 – оператор Лапласа; $f(x, y)$ і $\Phi(x, y)$ – відома та шукана функція двох змінних відповідно.

Оператор лівої частини рівняння (1), згідно з основною теоремою алгебри можна розкласти на множники вигляду $(\nabla^2 - k_i)$ і тоді рівняння матиме вигляд:

$$(\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2) \dots (\nabla^2 - k_i) \dots (\nabla^2 - k_n) \Phi(x, y) = f(x, y), \quad (2)$$

де k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – корені відповідного характеристичного рівняння.

Завдання полягає в тому, щоб спростити методику знаходження частинного, а отже, і загального розв'язку рівняння (2).

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЗГИНУ НЕТОНИХ ПЛАСТИН У ПЕРЕМІЩЕННЯХ. ФОРМИ ЗАГАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

У [9] наведені основні диференціальні рівняння згину пластин довільної сталої товщини. Система основних диференціальних рівнянь теорії має 12-ий порядок, якщо в рядах розкладання компонент переміщень утримувати перші два члени. Система зводиться до однорідної системи 4-го порядку, яка описує вихровий крайовий ефект:

$$\begin{aligned} \beta_{112} \nabla^2 \psi_1 + \beta_{111} \psi_1 + \beta_{133} \psi_3 &= 0; \\ \beta_{133} \psi_1 + \beta_{332} \nabla^2 \psi_3 + \beta_{333} \psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

і неоднорідної системи 8-го порядку, яка описує внутрішній напружено-деформований стан і потенціальний крайовий ефект типу пограничного шару:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} w_1 + \Pi_{13} w_3 &= \Pi_{1q} q; \\ \Pi_{31} w_1 + \Pi_{33} w_3 &= \Pi_{3q} q, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{3q}$ – диференціальні оператори:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \mu_{114} \nabla^4; \quad \Pi_{13} = \mu_{114} \nabla^4 + \mu_{132} \nabla^2; \quad \Pi_{1q} = \mu_{12} \nabla^2 - \mu_{10}; \\ \Pi_{31} &= \mu_{314} \nabla^4 + \mu_{312} \nabla^2; \quad \Pi_{33} = \mu_{334} \nabla^4 + \mu_{332} \nabla^2 + \mu_{330}; \quad \Pi_{3q} = \mu_{32} \nabla^2 - \mu_{30}; \end{aligned} \quad (5)$$

$\beta_{112}, \dots, \beta_{333}, \dots, \mu_{114}, \dots, \mu_{30}$ – сталі, які залежать від механіко-геометричних параметрів пластини; $q(x, y)$ – довільне зовнішнє поперечне навантаження, $\psi_1(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ – шукані вихрові функції, $w_1(x, y)$, $w_3(x, y)$ – шукані складові поперечного переміщення $W(x, y, z)$, яке апроксимується по товщині пластини h у вигляді:

$$W(x, y, z) = P_0(2z/h) w_1(x, y) + P_2(2z/h) w_3(x, y). \quad (6)$$

Тут P_0, P_2 – поліноми Лежандра.

Розв'язування системи (4) зведено до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння 8-го порядку відносно деякої функції $\Phi_0(x, y)$:

$$\nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2) \Phi_0(x, y) = 0 \quad (7)$$

і до визначення частинних розв'язків $\Phi_{kr}(x, y)$ ($k=1, 3$) двох неоднорідних диференціальних рівнянь 8-го порядку:

$$\nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2) \Phi_k(x, y) = \Pi_{kq} q(x, y). \quad (8)$$

Загальні розв'язки $w_1(x, y)$, $w_3(x, y)$ системи (4) набудуть вигляду:

$$w_1(x, y) = \Pi_{33}(\Phi_0 + \Phi_{1r}) - \Pi_{13}\Phi_{3r}, \quad w_3(x, y) = -\Pi_{31}(\Phi_0 + \Phi_{1r}) + \Pi_{11}\Phi_{3r}. \quad (9)$$

Якщо для деякої граничної задачі згину функції $w_1(x, y)$ і $w_3(x, y)$ визначені, то, згідно з (6), стане відомою і функція прогину пластини $W(x, y, z)$ (поперечні переміщення) у будь-якій її точці з координатами (x, y, z) .

Інші (тангенціальні) компоненти переміщень $U(x, y, z)$ і $V(x, y, z)$ визначаються так:

$$U(x, y, z) = P_1(2z/h)u_1(x, y) + P_3(2z/h)u_3(x, y);$$

$$V(x, y, z) = P_1(2z/h)v_1(x, y) + P_3(2z/h)v_3(x, y).$$

Тут $u_1(x, y), \dots, v_3(x, y)$ – складові компонент переміщень, вони виражаються через похідні функцій $w_1(x, y)$, $w_3(x, y)$, $q(x, y)$, $\psi_1(x, y)$, $\psi_3(x, y)$, де $\psi_k(x, y)$ – загальні розв'язки однорідної системи (3), яка зводиться до розв'язування двох рівнянь Гельмгольца відносно деякої функції $\psi(x, y)$, через яку виражаються $\psi_1(x, y)$ і $\psi_3(x, y)$:

$$\psi_1(x, y) = (\beta_{332} \nabla^2 + \beta_{333})\psi(x, y); \quad \psi_3(x, y) = -\beta_{133}\psi(x, y).$$

Компоненти напружень виражаються відповідними формулами із [9].

Загальний розв'язок рівняння (7) зображується як сума загальних розв'язків бігармонічного рівняння і двох рівнянь Гельмгольца:

$$\nabla^4 \Phi_{00}(x, y) = 0; (\nabla^2 - k_1)\Phi_{01}(x, y) = 0; (\nabla^2 - k_2)\Phi_{02}(x, y) = 0. \quad (10)$$

Знаходження загальних розв'язків бігармонічного рівняння і рівнянь Гельмгольца дається у відомій літературі і не пов'язане з особливими труднощами. Знаходження частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними високого порядку, зокрема 8-го порядку вигляду (8), може бути доволі складним, особливо, якщо праві частини будуть непростими.

І тому надалі зупинимося на методі зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь 8-го порядку (8) варіанта математичної теорії згину не тонких пластин, який дасть можливість звести знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (8) до знаходження частинних розв'язків неоднорідних рівнянь 2-го порядку.

МЕТОД ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 8-ГО ПОРЯДКУ

Розглянемо перше рівняння (8). Запишемо його у вигляді:

$$\nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2) \Phi_1(x, y) = f_1(x, y), \quad (11)$$

де

$$f_1(x, y) = (\mu_{12} \nabla^2 - \mu_{10}) q(x, y), \quad (12)$$

а функція $\Phi_1(x, y)$ – шукана функція двох змінних, як частинний розв’язок (11).

Зобразимо частинний розв’язок $\Phi_{1r}(x, y)$ рівняння (11) та відому функцію $f_1(x, y)$ у вигляді:

$$\Phi_{1r}(x, y) = \Phi_{11}(x, y) + \Phi_{12}(x, y); \quad (13)$$

$$f_1(x, y) = f_{11}(x, y) + f_{12}(x, y), \quad (14)$$

де невідомі функції $\Phi_{11}(x, y)$, $\Phi_{12}(x, y)$ – частинні розв’язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\nabla^2 (\nabla^2 - k_1) \Phi_{11}(x, y) = f_{11}(x, y); \quad (15)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 - k_2) \Phi_{12}(x, y) = f_{12}(x, y), \quad (16)$$

у яких праві частини – функції $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$ – підлягають визначенню.

Підставляючи (13) в (11) і ураховуючи (14)-(16), та вважаючи справедливою перестановочну властивість операторів лівої частини рівняння (11), дістанемо диференціальне рівняння Пуассона для визначення функції $f_{11}(x, y)$:

$$\nabla^2 f_{11} = \frac{1}{k_2 - k_1} (\nabla^4 - k_1 \nabla^2 - 1) f_{11}, \quad (17)$$

де як функцію $f_{11}(x, y)$ можна взяти частинний розв’язок рівняння (17). Тоді функція $f_{12}(x, y)$ визначиться із (14).

Отже, праві частини диференціальних рівнянь 4-го порядку (15) і (16) стають відомими функціями і задача знаходження частинного розв’язку неоднорідного диференціального рівняння 8-го порядку (11) таким чином звелась до визначення частинних розв’язків 2-х неоднорідних диференціальних рівнянь 4-го порядку із частинними похідними (15) і (16). Знайшовши з цих рівнянь їх частинні розв’язки – функції $\Phi_{11}(x, y)$ і $\Phi_{12}(x, y)$, частинний розв’язок $\Phi_{1r}(x, y)$ неоднорідного рівняння (11) визначиться як сума $\Phi_{11}(x, y)$ і $\Phi_{12}(x, y)$ згідно з (13).

Спростимо знаходження частинного розв’язку рівняння (17), урахувавши (12). Матимемо:

$$\nabla^2 f_{11} = (a_6 \nabla^6 + a_4 \nabla^4 + a_2 \nabla^2 + a_0) q(x, y), \quad (18)$$

де

$$a_6 = \mu_{12}/k_{21}, \quad a_4 = (-\mu_{10} - k_1 \mu_{12})/k_{21},$$

$$a_2 = (k_1 \mu_{10} - \mu_{12})/k_{21}, \quad a_0 = \mu_{10}/k_{21}, \quad k_{21} = k_2 - k_1.$$

Розглянемо два неоднорідних рівняння:

$$\nabla^2 \varphi_{11} = (a_6 \nabla^6 + a_4 \nabla^4 + a_2 \nabla^2) q(x, y); \quad (19)$$

$$\nabla^2 \varphi_{12} = a_0 q(x, y). \quad (20)$$

Частинний розв’язок рівняння (19): $\varphi_{11} = (a_6 \nabla^4 + a_4 \nabla^2 + a_2) q(x, y)$.

Тоді частинний розв’язок $f_{11}(x, y)$ рівняння (18) буде:

$$f_{11}(x, y) = (a_6 \nabla^4 + a_4 \nabla^2 + a_2) q(x, y) + \varphi_{12}(x, y), \quad (21)$$

де $\varphi_{12}(x, y)$ – частинний розв’язок рівняння Пуассона (20).

Функція $f_{12}(x, y)$ знайдеться з урахуванням (12), (14) і (21):

$$f_{12}(x, y) = (-a_6 \nabla^4 + (\mu_{12} - a_4) \nabla^2 - (\mu_{10} + a_2)) q(x, y) - \varphi_{12}(x, y). \quad (22)$$

НЕОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ

На основі викладеної вище методики неоднорідне рівняння (15) розділяється на два неоднорідних рівняння 2-го порядку відносно шуканих функцій $\Phi_{111}(x, y)$ і $\Phi_{112}(x, y)$:

$$\nabla^2 \Phi_{111} = f_{111}, \quad (\nabla^2 - k_1) \Phi_{112} = f_{112}, \quad (23)$$

де

$$f_{111}(x, y) = \frac{(\nabla^2 - 1)}{k_1} f_{11}(x, y), \quad f_{112}(x, y) = \frac{(1 + k_1 - \nabla^2)}{k_1} f_{11}(x, y). \quad (24)$$

Частинний розв’язок $\Phi_{11}(x, y)$ рівняння (15) матиме вигляд суми частинних розв’язків $\Phi_{111}(x, y)$ і $\Phi_{112}(x, y)$ рівнянь (23):

$$\Phi_{11}(x, y) = \Phi_{111}(x, y) + \Phi_{112}(x, y). \quad (25)$$

Перше рівняння (23) з урахуванням (24), (21) і (20) набуде вигляду:

$$\nabla^2 \Phi_{111} = (b_6 \nabla^6 + b_4 \nabla^4 + b_2 \nabla^2) q(x, y) + (b_0 + a_0/k_1) q(x, y) - \varphi_{12}(xy)/k_1, \quad (26)$$

де $b_0 = -a_2/k_1$, $b_2 = (a_2 - a_4)/k_1$, $b_4 = (a_4 - a_6)/k_1$, $b_6 = a_6/k_1$.

Частинний розв’язок рівняння (26) (тобто першого рівняння (23)) виглядатиме як:

$$\Phi_{111}(x, y) = (b_6 \nabla^4 + b_4 \nabla^2 + b_2) q(x, y) + \varphi_{112}(x, y), \quad (27)$$

де $\varphi_{112}(x, y)$ – частинний розв’язок рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_{112} = (b_0 + a_0/k_1) q(x, y) - \varphi_{12}(xy)/k_1. \quad (28)$$

Друге рівняння (23) (неоднорідне рівняння Гельмгольца), враховуючи (24), (21) і (20), набуде вигляду:

$$(\nabla^2 - k_1) \Phi_{112} = (c_6 \nabla^6 + c_4 \nabla^4 + c_2 \nabla^2 + (c_0 - a_0/k_1)) q(x, y) + (1 + k_1) \varphi_{12}(xy)/k_1, \quad (29)$$

де

$$c_0 = \frac{a_2(1 + k_1)}{k_1}, \quad c_2 = \frac{a_4(1 + k_1) - a_2}{k_1}, \quad c_4 = \frac{a_6(1 + k_1) - a_4}{k_1}, \quad c_6 = -\frac{a_6}{k_1}.$$

Отже, після знаходження частинних розв’язків $\varphi_{12}(x, y)$ і $\varphi_{112}(x, y)$ рівнянь Пуассона (20) і (28) відповідно, визначається частинний розв’язок $\Phi_{111}(x, y)$ першого рівняння (23) згідно з (27). а з неоднорідного рівняння Гельмгольца (29) знаходиться частинний розв’язок $\Phi_{112}(x, y)$. Після цього визначається частинний розв’язок $\Phi_{11}(x, y)$ рівняння (15) як сума $\Phi_{111}(x, y)$ і $\Phi_{112}(x, y)$ згідно з (25).

Аналогічно знаходиться частинний розв'язок $\Phi_{12}(x, y)$ неоднорідного рівняння (16). Частинний розв'язок $\Phi_1(x, y)$ початкового рівняння (11) визначиться як сума $\Phi_{11}(x, y)$ і $\Phi_{12}(x, y)$ згідно з (13).

Частинний розв'язок другого неоднорідного рівняння (8) отримаємо заміною в попередніх викладках у коефіцієнтах μ першого індекса з 1 на 3.

Після знаходження загального і частинних розв'язків рівнянь (7) і (8) визначаються складові компоненти $w_1(x, y)$ і $w_3(x, y)$ поперечного переміщення згідно з (9). Компоненти переміщень, деформацій і напруженого стану знаходяться за відповідними формулами розробленого варіанта математичної теорії [9]. При цьому сталі інтегрування, які входять у вирази для компонент НДС, визначаються з урахуванням крайових умов.

ВИСНОВКИ

1. Запропонований метод розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними високого парного порядку дає можливість звести визначення загального розв'язку неоднорідного рівняння до знаходження загальних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку (Пуассона і Гельмгольца), що може значно спростити процедуру визначення загальних розв'язків, а отже і спростити розв'язування граничних задач для не тонких пластин на основі використовуваного варіанта математичної теорії.
2. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь може використовуватися також при розв'язуванні граничних задач для пластин та оболонок сталої товщини за класичною, некласичною та на основі інших варіантів математичних теорій. Неоднорідні рівняння можуть бути зі сталими або ж зі змінними коефіцієнтами. Достатньо тільки, щоб оператор лівої частини диференціального рівняння можна було зобразити у вигляді добутку операторів нижчого порядку.
3. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь дає можливість значно спростити якісне дослідження таких рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Немиш Ю. Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор / Ю.Н. Немиш, И.Ю. Хома // Прикл. механика. – 1991. – 29, №11. – С. 3-27.
2. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек / И.Н. Векуа // Тр. Тбилисского матем. ин-та. – 1955. – Т. 21. – С. 191-293.
3. Cicala P. Sulla teoria elastica della plate sottile / P. Cicala // Giorn genio Civile. – 1959. – 97, №4. – P. 238-256.
4. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. – К. : Изд-во АН УССР, 1963. – 354 с.
5. Понятовский В. В. Уравнения теории анизотропных пластинок / В.В. Понятовский // Исследование по упругости и пластичности. – Л. : ЛГУ, 1965. – №4. – С. 3-28.
6. Хома І. Ю. Загальний розв'язок системи рівнянь рівноваги згину пластин теорії І.Н. Векуа в третьому наближенні / І.Ю. Хома // Доповіді АН УССР. Сер. А. – 1972. – №1. – С. 83-86.
7. Плеханов А. В. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины / А.В. Плеханов, А.П. Прусаков // Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С. 84-90.

8. Прусаков А. П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины / А.П. Прусаков // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, №12. – С. 51-58.
9. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – Т. 17, №5. – 2009. – Механіка. В. 13, т. 2. – С. 54-62.
10. Зеленський А. Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь / А.Г. Зеленський // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 2011. – Vol. 19. – P. 263-266.
11. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – Т. 20, №5. – 2012. – Механіка. В. 16, т. 2/1. – С. 60-66.
12. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними / А.Г. Зеленський // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Зб. наук. праць. – В. 13.– 2012. – С. 188-196.

REFERENCES

1. Nemish, Yu.N. and Homa, I.Yu. (1991), "Stress-state non-thin shells and plates. Generalized theory. Review", *Prikl. mehanika*, 29, no. 11, pp. 3-27.
2. Vekua, I.N. (1995), "A method for calculating prismatic shells", *Tr. Tbilisskogo matem. in-ta*, vol. 21, pp. 191-293.
3. Cicala, P. (1959), "Sulla teoria elastica della plate sottile", *Giorn genio Civile*, 97, no. 4, pp. 238-256.
4. Kilchevskiy, N.A. (1963), *Osnovy analiticheskoy mehaniki obolochek* [Fundamentals of Analytical Mechanics shells], Izd-vo AN USSR, Kiev.
5. Ponyatovskiy, V.V. (1965), "The equations of the theory of anisotropic plates", *Issledovanie po uprugosti i plastichnosti*, no. 4, pp. 3-28.
6. Homa, I.Yu. (1972), "The general solution of system equilibrium equations of the theory of plate bending I.N. Vekua the third approach", *DopovIdI AN USSR, Ser. A*, no.1, pp. 83-86.
7. Plehanov, A.V. and Prusakov, A.P. (1976), "An asymptotic method for constructing a theory of bending of plates of medium thickness", *Mekhanika tverdogo tela*, no. 3, pp. 84-90.
8. Prusakov, A.P. (1993), "On the construction of equations of the bending of the twelfth order for transversely isotropic plate", *Prikl. Mekhanika*, vol. 29, no. 12, pp. 51-58.
9. Zelenskiy, A.G. (2009), "Models of the analytic theory of transversely isotropic plates", *Visnik Dnipropetr. un-tu*, vol. 17, no. 5, *Mekhanika*, issue 13, vol. 2, pp. 54-62.
10. Zelenskiy, A.G. (2011), "On the solution of the inhomogeneous differential equations", *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, vol 19, pp. 263-266.
11. Zelenskiy, A.G. (2012), "Method reduction procedure inhomogeneous differential equations with partial derivatives theory plates medium thickness", *Visnik Dnipropetr. un-tu*, vol. 20, no. 5, *Mekhanika*, issue 16, vol. 2/1, pp. 60-66.
12. Zelenskiy, A.G. (2012), "Method reduction procedure inhomogeneous differential equations with partial derivatives", *Metodi rozv'yazuvannya prikladnih zadach mehaniki deformivnogo tverdogo tila, Zb. nauk. prats*, issue 13, pp. 188-196.

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ДО ДВОМІРНИХ ЗАДАЧ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

¹Кагадій Т. С., д. ф.-м. н., професор, ²Білова О. В., к. ф.-м. н., доцент

¹Національний гірничий університет,
просп. Карла Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

²Національна металургійна академія України,
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

okbelova@rambler.ru

У роботі показано, як застосування методу збурення дозволяє отримати асимптотичні розв'язки двомірних задач нелінійної теорії пружності. Наведені основи методу та приклади. Проведено порівняння результатів з відомими для аналогічних лінійних випадків.

Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропний матеріал, нелінійна теорія пружності.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ К ДВУХМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

¹Кагадий Т. С., д. ф.-м. н., профессор, ²Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент

¹Национальный горный университет,
просп. Карла Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49600, Украина

²Национальная металлургическая академия Украины,
просп. Гагарина, 4, г. Днепропетровск, 49600, Украина

okbelova@rambler.ru

В данной работе показано, как применение метода возмущения позволяет получить асимптотические решения двухмерных задач нелинейной теории упругости. Приведены основы метода и примеры. Проведено сравнение результатов с известными для аналогичных линейных случаев.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропный материал, нелинейная теория упругости.

APPLICATION OF THE METHOD OF PERTURBATIONS TO TWO-DIMENSIONAL TASKS OF PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF THE ELASTICITY

Kagadiy T. S., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Belova O. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

¹National mountain university,
Karl Marx Avenue, 19, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

²National metallurgical academy of Ukraine,
Gagarin Avenue, 4, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

okbelova@rambler.ru

In the given work it is shown, how application of a method of perturbations allows to receive asymptotic solutions of two-dimensional tasks of the nonlinear theory of elasticity. Bases of a method and examples are reduced. Comparison of outcomes with known for similar linear cases is lead. Two-dimensional tasks for orthotropic skew fields with rectilinear anisotropy were researched in many works. Thus numerical methods were applied both analytical, and. The packages of computer programs developed for such tasks such, as ADINA, NASTRAN are known. Also programs are widely used the ABAQUS, ANSYS. Account of nonlinearity, anisotropy of modern materials for which the deviation from the law of Hooke takes place, considerably hampers searching the basic performances of the is intense-deformed condition. The meeting tasks of mechanics connected with nonlinearity, lead to significant mathematical difficulties. Application asymptotic methods enable to solve the given problem. As a result of a solution of some tasks of physically nonlinear theory of elasticity it is shown, that in a zero approximation it is possible to receive analytical solutions of the complicated mixed tasks. It is shown, that it is possible to reduce a nonlinear boundary value problem to a sequential solution of tasks of a potential theory. As is known, physical nonlinearity of a material can be mapped differently in expressions of connection of strains and voltages. In work the classical case when the nonlinear part is noted in an explicit aspect in shearing stresses is considered. Comparison of outcomes of similar tasks for linear and nonlinear cases is lead.

Key words: asymptotic method, anisotropic material, the nonlinear theory of elasticity.

ВСТУП

Двовірні задачі для ортотропних тіл з прямолінійною анізотропією досліджувались у багатьох роботах достатньо ретельно та всебічно, як за допомогою аналітичних, так і чисельних методів. Відомі розроблені для таких задач пакети комп'ютерних програм. Наприклад, у скінченно-елементних комплексах програм, таких, як ADINA, NASTRAN, використовуються різноманітні методи розв'язання великих систем рівнянь. Ефективним є фронтальний метод, реалізований у програмах ABAQUS, ANSYS та ітераційні методи [1]. Урахування нелінійності, анізотропії сучасних матеріалів, для яких має місце відхилення від закону Гука, суттєво ускладнює пошук основних характеристик напружено-деформованого стану. Відповідні задачі механіки, пов'язані з нелінійністю, приводять до нездоланих математичних труднощів. Застосування асимптотичних методів, наприклад, методу збурення, надає можливість вирішити це питання [2].

Мета статті – розв'язання деяких задач фізично нелінійної теорії пружності за допомогою запропонованого авторами методу збурення. Показати, що в нульовому наближенні вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач [3]. Провести порівняння розв'язків нелінійних задач з їх лінійними аналогами [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай напруження та деформації пов'язані такими аналітичними залежностями:

$$\sigma_{11} = A_1 (u_x)^k, \quad \sigma_{22} = A_2 (y_y)^k, \quad \delta_{12} = A_{12} (u_y + y_x)^k, \quad (1)$$

де A_1 , A_2 , (A_{12}) – сталі матеріалу, аналоги модулів пружності (зсуву) в лінійному ортотропному пружному матеріалі вздовж головних напрямків анізотропії, які співпадають з декартовими координатами x , y ; k – стала.

Після підстановки в рівняння рівноваги виразів (1) маємо:

$$(u_x)_x^k + \varepsilon (u_y + y_x)_y^k = 0, \quad \varepsilon (u_y + y_x)_x^k + q (y_y)_y^k = 0, \quad (\varepsilon = A_{12}/A_1, q = A_2/A_1). \quad (2)$$

Тепер питання про визначення напружено-деформованого стану пружного фізично нелінійного ортотропного тіла зведено до інтегрування рівнянь (2) при відповідних крайових умовах.

Для реальних ортотропних матеріалів $\varepsilon < 1$ і цей параметр можна розглядати як малий. Тому, як і раніше, вводяться перетворення:

$$\xi_i = \gamma_i^{(i)} \varepsilon^{\alpha_i^{(i)}} x, \quad \eta_i = \gamma_2^{(i)} \varepsilon^{\alpha_2^{(i)}} y, \quad u^{(i)} = \varepsilon^{\beta_1^{(i)}} U^{(i)}, \quad v^{(i)} = \varepsilon^{\beta_2^{(i)}} V^{(i)}$$

($i = 1, 2$, $\gamma_i = 1$), які визначають два типи напружено-деформованого стану.

У нульовому наближенні по ε маємо ($q = 1$):

$$(U_{\xi_1}^{1,0})_{\xi_1}^k + (U_{\eta_1}^{1,0})_{\eta_1}^k = 0, \quad (V_{\eta_1}^{1,0})_{\eta_1}^k + (U_{\eta_1}^{1,0})_{\xi_1}^k = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{11,0}^{(1)} = A_1 \varepsilon^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} (U_{\xi_1}^{1,0})^k, \quad \sigma_{22,0}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12,0}^{(1)} = A_{12} (U_{\eta_1}^{1,0})^k,$$

$$(U_{\xi_2}^{2,0})_{\xi_2}^k + (V_{\xi_2}^{2,0})_{\eta_2}^k = 0, \quad (V_{\xi_2}^{2,0})_{\xi_2}^k + (V_{\eta_2}^{2,0})_{\eta_2}^k = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{11,0}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = A_2 \varepsilon^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} (V_{\eta_2}^{2,0})^k, \quad \sigma_{12,0}^{(2)} = A_{12} (V_{\xi_2}^{2,0})^k.$$

Повне дотичне напруження $\sigma_{12,0} = \sigma_{12,0}^{(1)} + \sigma_{12,0}^{(2)}$.

Якщо буде знайдена функція $U^{1,0}$ з першого рівняння в (3), то $V^{1,0}$ з другого рівняння визначається простим інтегруванням. Аналогічно для функцій $V^{2,0}$ і $U^{2,0}$ з рівнянь (4). Але виникає питання: як розв'язувати перше рівняння в (3), або друге в (4). Для цього запропоновано метод збурення. Вважаючи $k=1-\varepsilon_1$, де ε_1 – деякий «малий» параметр, введемо нові незалежні змінні:

$$\xi_1^* = \xi_1 + \varphi_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1^* = \eta_1 + \Psi_1(\xi_1, \eta_1), \quad (5)$$

і представимо функції $U^{1,0}$, $V^{1,0}$, φ_1 , ψ_1 у вигляді рядів по параметру ε_1 :

$$U^{1,0}(V^{1,0}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_1^j u_1^{(j)}(v_1^{(j)}), \quad \varphi_1(\psi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_1^j \varphi_1^{(j)}(\psi_1^{(j)}). \quad (6)$$

Тоді з першого рівняння в (3) для нульового та першого наближень по ε_1 матимемо, що основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial \xi_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial \eta_1^{*2}} = 0 \quad (i=0,1), \quad (7)$$

якщо функції φ_1^1 , ψ_1^1 задовольняють співвідношенням:

$$\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi_1^*} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1^*} \right|, \quad \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \eta_1^*} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial u_1^0}{\partial \eta_1^*} \right|, \quad \frac{\partial \Psi_1^1}{\partial \xi_1^*} = -\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \eta_1^*}, \quad (8)$$

а допоміжні функції визначаються через основні таким способом:

$$\frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \eta_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial \eta_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} \ln \left| \frac{\partial u_1^0 / \partial \xi_1^*}{\partial u_1^0 / \partial \eta_1^*} \right| = 0. \quad (10)$$

Для другого напружено-деформованого стану маємо аналогічні результати. Показана можливість сформулювати крайові умови для основних функцій, зв'язок між двома типами напружено-деформованого стану відбувається через межові умови по дотичних напруженнях. Оскільки в нульовому наближенні по параметру ε вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач, то основною проблемою є знаходження функцій φ_1^1 , ψ_1^1 (та аналогічних з індексом два), які залежать від розв'язку тієї чи іншої задачі в нульовому наближенні. Але й ця проблема зведена до простого інтегрування. Отже, нелінійна крайова задача знову зводиться до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу. Розв'язано задачу про фізично нелінійну напівплощину під впливом нормального навантаження виду $\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$. Знайдені значення переміщень та напружень. Наприклад, нормальні напруження при $t_2 = 0$, ($\eta_1 = \eta_1^* = y = 0$) мають вигляд:

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi \alpha} \left(\frac{1}{1+t} + \varepsilon_1 \left[B \frac{t_1 - t_1^*}{(1+t_1)(1+t_1^*)} + \frac{\ln(1+t_1)}{2(1+t_1)} \right] \right),$$

$$t_1^* = t_1 + \varepsilon_1 \left[t_1 \left(B - \frac{1}{4} \ln \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (1+t_1) \ln(1+t_1) \right], \quad (11)$$

$$t_1 = \xi/\alpha, \quad t_2 = \eta/\alpha, \quad B = \ln(A_1^{-1}P_0/\pi\alpha)/2.$$

На рис. 1 залежно від координати t_1 проведено порівняння результатів для лінійного та нелінійного випадків. Представлені напруження $\sigma_1 = -(\pi\alpha/P_0) \cdot \sigma_{11}(t_1, 0)$, де $\sigma_{11}(t_1, 0)$ визначається з формули (11) ($B = 0$, $\varepsilon_1 = 2/3$, крива 1 відповідає лінійному матеріалу).

Коли B збільшується, σ_1 зменшується при малих значеннях t_1 . Якщо B зменшується, то напруження веде себе навпаки. Коли параметр ε_1 збільшується (зменшується), σ_1 збільшується (зменшується).

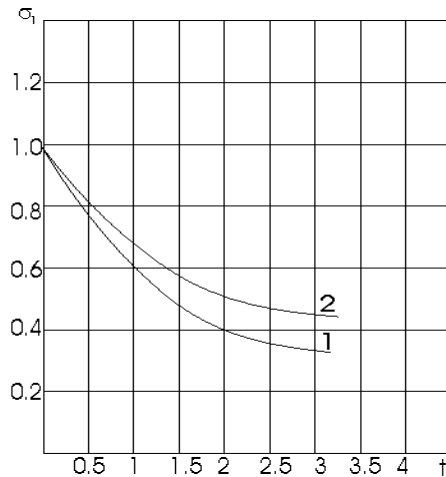


Рис. 1

При розв'язанні деяких задач розглядається напружено-деформований стан пластинок з криволінійною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з криволінійними ізометричними координатами ξ , η , такими, що:

$$x = \operatorname{Re}[\omega(\zeta)] = x(\xi, \eta), \quad y = \operatorname{Im}[\omega(\zeta)] = y(\xi, \eta), \quad z = \omega(\zeta),$$

$$(z = x + iy, \zeta = e^{\xi + i\eta}, i = \sqrt{-1}). \quad (12)$$

Питання про напружено-деформований стан пружної анізотропної пластинки зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги і сумісності деформацій:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\Gamma_{22}^2 \tau = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 2\Gamma_{11}^1 \tau = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 (H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - 3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{22})}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \xi} + 2H^2 \left[(\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0,$$

при відповідних крайових умовах (H – параметр Ламе).

Для випадку полярних координат (циліндрична анізотропія) маємо:

$$\omega(\zeta) = R\zeta, \quad x = \operatorname{Re}^\xi \cos \eta, \quad y = \operatorname{Re}^\xi \sin \eta; \quad H = \operatorname{Re}^\xi,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \xi} = 1, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad R = \operatorname{const}. \quad (14)$$

Враховуючи залежності (1) та рівняння

$$e_{11} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad e_{22} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right), \quad e_{12} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)$$

одержимо

$$\sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa, \quad \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa, \quad \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa, \quad (15)$$

і рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \right)^\kappa - q \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa + (1 - \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa &= 0, \\ q \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa - \varepsilon (2 - \kappa) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Після розщеплення напружено-деформованого стану на дві складові з різними властивостями, в нульовому наближенні по ε матимемо

$$\begin{aligned} \left(U_{\xi_1}^{1,0} \right)_{\xi_1}^\kappa + \left(U_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa - q \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa &= 0, \quad q \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa = 0, \\ \sigma_{11}^{1,0} = \varepsilon^{-\frac{\kappa^2}{1+\kappa}} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(U_{\xi_1}^{1,0} \right)_{\xi_1}^\kappa, \quad \sigma_{22}^{1,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa, \\ \sigma_{12}^{1,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(U_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa, \\ \left(U_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa = 0, q \left(V_{\eta_2}^{2,0} \right)_{\eta_2}^\kappa + \left(V_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa &= 0, \\ \sigma_{11}^{2,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(U_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa, \quad \sigma_{22}^{2,0} = \varepsilon^{-\frac{\kappa^2}{1+\kappa}} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(V_{\eta_2}^{2,0} \right)_{\eta_2}^\kappa, \\ \sigma_{12}^{2,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(V_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa. \end{aligned}$$

Після введення нових змінних (5) та знаходження функцій U , V , φ , ψ у вигляді рядів (6) в нульовому та першому наближеннях, як і в попередніх випадках, приходимо до інтегрування рівнянь Лапласа відносно основних функцій. Функції φ_1^1 , ψ_1^1 задовольняють співвідношенням (8). Показано можливість постановки граничних задач для основних функцій.

Якщо напружено-деформований стан не залежить від координати η , тоді рівняння (16) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa - q(u)^\kappa + (1 - \kappa) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa + (2 - \kappa) \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При цьому

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa, \quad \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} u, \\ \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо дотичні напруження дорівнюють нулю, тоді система (17) переходить в одне рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa - q(u)^\kappa + (1-\kappa) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa = 0. \quad (19)$$

Розшукуючи u у вигляді рядів по параметру ε_1 (якщо $k=1-\varepsilon_1$), одержимо, що в кожному наближенні треба розв'язувати звичайне лінійне диференціальне рівняння, у правій частині якого містяться відомі функції, знайдені в попередніх наближеннях.

Якщо переміщення $u=0$, тоді система (7) переходить в рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa + (2-\kappa) \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa = 0, \quad (20)$$

а співвідношення (18) мають вигляд:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa. \quad (21)$$

Загальний розв'язок рівняння (20) легко знаходиться і матиме вигляд:

$$v = -C \frac{1}{\kappa} e^{-\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\xi} + C_1 e^\xi, \quad (22)$$

де C , C_1 – довільні сталі, що знаходяться з крайових умов.

Треба зауважити, що фізична нелінійність матеріалу може по-різному відображатися у виразах зв'язку деформацій та напружень [5]. Розглянуто, зокрема, класичний випадок, коли нелінійна частина записана в явному вигляді в дотичних напруженнях:

$$\sigma_{11} = A_1 e_{11}, \quad \sigma_{22} = A_2 e_{22}, \quad \sigma_{12} = A_{12} (e_{12} + C_2 e_{12}^\kappa), \quad (\kappa > 1), \quad (23)$$

де C_2 – деяка стала. Якщо напружений стан не залежить від координати η , тоді рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\xi^2} - qu &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dv}{d\xi} - v + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa \right] + \left[\frac{dv}{d\xi} - v + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa \right] &= 0, \\ q &= A_2 / A_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Після введення функції $\frac{dv}{d\xi} - v = f(\xi, \kappa)$ друге рівняння з (24) буде мати вигляд:

$$f(\xi, \kappa) + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} f^\kappa(\xi, \kappa) = D_0 e^{-\xi}, \quad (25)$$

де D_0 – довільна стала.

Якщо припустити, що $k=3$, тоді

$$f^3(\xi) + C_2^{-1} R^2 e^{2\xi} f(\xi) - D_0 C_2^{-1} R^2 e^\xi = 0. \quad (26)$$

Якщо $k=1-\varepsilon_1$, тоді маємо

$$f(\xi) + C_2 R^{-\varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1 \xi} f^{1+\varepsilon_1}(\xi) = D_0 e^{-\xi}. \quad (27)$$

Розкладаючи $f(\xi)$ в ряд за степенями ε_1 , для нульового та першого наближень одержимо:

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= \frac{D_0}{1+C_2} e^{-\xi}, \quad f_1(\xi) = -(D_0^1 - D_0^{11}\xi) e^{-\xi}, \\ D_0^1 &= \frac{C_2 D_0}{(1+C_2)^2} \ln \left| \frac{D_0 R^{-1}}{1+C_2} \right|, \quad D_0^{11} = \frac{2C_2 D_0}{(1+C_2)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Відповідні цим наближенням зміщення мають вигляд:

$$v^0 = -\frac{D_0}{2(1+C_2)} e^{-\xi} + D_1 e^{\xi}, \quad v^1 = \left(\frac{D_0^1}{2} - \frac{D_0^{11}}{4} - \frac{D_0^{11}}{2} \xi \right) e^{-\xi} + D_1^1 e^{\xi},$$

а повне переміщення можна записати так:

$$\begin{aligned} v &= v^0 + \varepsilon_1 v^1 + \dots = (A_1 + A_1^1 \xi) e^{-\xi} + B e^{\xi} + \dots, \\ A_1 &= -\frac{D_0}{2(1+C_2)} + \varepsilon_1 \left(\frac{D_0^1}{2} - \frac{D_0^{11}}{4} \right), \quad A_1^1 = -\varepsilon_1 \frac{D_0^{11}}{2}, \quad B = D_1 + \varepsilon_1 D_1^1. \end{aligned}$$

Аналогічно одержуються і більш високі наближення для $f(\xi)$ та v , у кожному з яких множителем при $e^{-\xi}$ буде многочлен, порядок якого на одиницю вище, ніж у попередньому наближенні.

ВИСНОВКИ

Застосування асимптотичних методів, наприклад, запропонованого авторами методу збурення, надає можливість вирішити питання щодо розв'язання деяких задач фізично нелінійної теорії пружності. Показано, що в нульовому наближенні вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач. Проведено порівняння розв'язків нелінійних задач з їх лінійними аналогами. Показано, як за допомогою методу збурення можна звести нелінійну крайову задачу до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Gavrilyachenko T. M. "Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple" (Разработка интерфейса для решателя нелинейных краевых задач с использованием Maple) / T.M. Gavrilyachenko, M.I. Karyakin, D.Y. Sukhov ; IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008) ISBN 978-0-7695-3423-1. – P. 284-291.
2. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик. – К. : Вища школа, 1982. – 152 с.
3. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих анизотропных и композиционных материалов / Т.С. Кагадий. – Днепропетровск : РИК НГА України, 1998. – 260 с.
4. Павленко А. В. Применение асимптотического метода к решению плоских задач теории упругости / А.В. Павленко, Т.С. Кагадий, О.В. Белова // «Theoretical foundation of civil engineering – XX» Polish–Ukrainian–Transaction, September, 2012. – Warsaw, 2012. – P. 251-257.
5. Александров В. М. Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы / В.М. Александров // Прикл. механ. матем. – 2006. – Т. 70, №1. – С. 139-149.

REFERENCES

1. Gavrilyachenko, T.M., Karyakin, M.I. and Sukhov D.Y. (2008), "Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple", *IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008)* ISBN 978-0-7695-3423-1, pp. 284-291.
2. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. and Koblik, S.G. (1982), *Asimptoticheskiy metod v teorii uprugosti ortotropnogo tela* [Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field], Vusha shkola, Kiev.
3. Kagadiy, T.S. (1998), *Metod vozmuscheniy v mekhanike uprugikh anizotropnykh i kompozicionnykh materialov* [Method of perturbations in the mechanics of elastic anisotropic and composite materials], RIK NGA Ukraina, Dnepropetrovsk.
4. Pavlenko, A.V., Kagadiy, T.S. and Belova, O.V. (2012), "Application of an asymptotic method to a solution of flat problems{tasks} of the theory of an elasticity", "Theoretical foundation of civil engineering – XX" Polish-Ukrainian-Transaction, September, 2012, Warsaw, pp. 251-257.
5. Alexandrov, V.M. (2006), "Two tasks with the mixed boundary conditions for an elastic orthotropic band", *Prikl. mech. mathem.* vol. 70, no. 1, pp. 139-149.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ОСНОВАНИЮ УСИЛИЙ

Калоеров С. А., д. ф.-м. н., профессор, Занько А. И., аспирант, Кошкин А. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина*

kaloerov@mail.ru

С использованием комплексных потенциалов решена задача об изгибе конечной плиты с произвольными эллиптическими отверстиями под действием усилий, приложенных к основанию. Для круговой кольцевой плиты проведены численные исследования с анализом влияния анизотропии и способа загрузки и подкрепления контуров на значения изгибающих моментов.

Ключевые слова: комплексные потенциалы теории изгиба плит, полиномы Фабера, ряды Лорана, обобщенный метод наименьших квадратов.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВИГІН БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ПЛИТ ПІД ДІЄЮ РОЗПОДІЛЕНИХ ПО ОСНОВІ ЗУСИЛЬ

Калоєров С. О., д. ф.-м. н., професор, Занько А. І., аспірант, Кошкін А. О., аспірант

*Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна*

kaloerov@mail.ru

З використанням комплексних потенціалів розв'язана задача про вигин кінцевої плити з довільними еліптичними отворами під дією зусиль, прикладених до основи. Для кругової кільцевої плити проведені чисельні дослідження з аналізом впливу анізотропії і способу завантаження і підкріплення контурів на значення згинальних моментів.

Ключові слова: комплексні потенціали теорії згину плит, поліноми Фабера, ряди Лорана, узагальнений метод найменших квадратів.

SOLUTION BENDING PROBLEM FOR A MULTIPLY CONNECTED PLATES UNDER ACTION DISTRIBUTED ON THE BASE FORCES

Kaloerov S. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Zanko A. I., Graduate Student, Koshkin A. A., Graduate Student

*Donetsk national university,
Universitetskaia str., 24, Donetsk, 83001, Ukraine*

kaloerov@mail.ru

The problem of the theory of bending of thin multiply connected plates subjected to a distributed normal loading on the foundation was solved. Both cases of anisotropic and isotropic plates are considered. The theory of complex potentials of bending plates has been used to solve this problem.

General representations of complex potentials are constructed using conformal transformations, Laurent series expansions and Faber polynomials. Determination of the unknown coefficients of the expansions is carried out from the boundary conditions at the edges using the generalized least squares method.

A number of problems for an annular plate and a square plate with a circular hole were solved for the first time. Different boundary conditions for these cases were considered. Numerical investigations revealed patterns of bending moment's variation depending on the type of boundary conditions, material properties and the shape of the plate boundary.

Numerical results indicate that the highest moments concentrations are observed near the hole, and this concentration increases with decreasing radius of the hole. The highest level of concentration is observed in the case of clamped edge of the hole. Type of boundary conditions at the non-clamped edge has little effect on the moment's concentrations. The degree of anisotropy of the material significantly affect to the value of the moments. Moments concentrations at planes, which is normal to more rigid elasticity directions (corresponding to smaller values of the coefficient of deformation a_{ii}), are substantially higher than that of the isotropic material.

Key words: complex potentials theory of bending plates, Faber polynomials, Laurent series, generalized least squares method.

Несмотря на практическую важность решений задач по изгибу тонких многосвязных плит, до сих пор многие классы задач по этому направлению не рассматривались. Как известно, наиболее широкие классы задач в этом направлении были решены с использованием функций обобщенных комплексных переменных, введенных в работах С.Г. Лехницкого [1]. В работах [2-4] были получены общие представления этих функций для многосвязных областей. Однако в них неверно учтено действие усилий по основанию плиты, не рассмотрены случаи наличия отверстий вблизи внешнего края, не предложены оптимальные решения для случаев произвольных криволинейных отверстий. В работах [5, 6] исправлены недочеты и получены новые общие представления комплексных потенциалов, решен ряд задач.

В данном сообщении с использованием последних представлений комплексных потенциалов решен ряд задач для случая действия на многосвязную плиту распределенных по основанию нормальных усилий. Проведены численные исследования, установлены закономерности распределения изгибающих моментов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкую плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l и центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) . Эллипсы L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга и внешнего контура, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации. Плита находится под действием нормальных усилий $q(x, y)$, распределенных по верхнему основанию. Один из контуров жестко зашпелен, остальные контуры свободны от усилий или жестко подкреплены. Для решения задачи будем использовать комплексные потенциалы теории изгиба плит [5, 6].

Если материал плиты является анизотропным, имеющим в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, то решение рассматриваемой задачи при

использовании комплексных потенциалов теории изгиба плит [5] сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ из граничных условий:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kl} W_k'(z_k) = f_{li}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (20)$$

где для неподкрепленного контура

$$\begin{aligned} g_{kl1} &= p_k / \mu_k, \quad g_{kl2} = q_k, \quad f_{l1} = J_{01} - c_l x, \quad f_{l2} = -J_{02} + c_l y, \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ J_{01} &= \int_0^s (N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy, \quad J_{02} = -\int_0^s M_{y0} dx - (N_{xy0} + H_{xy0}) dy, \\ N_{xy0} &= -\int_0^s N_{y0} dx - N_{x0} dy; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_{x0} &= -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= -\left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N_{x0} &= -\left(D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{y0} &= -\left(D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \end{aligned} \quad (23)$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$ – жесткости материала плиты, в которых:

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \quad B_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta, \quad B_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \\ B_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, \quad B_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, \quad B_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \quad (24)$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала плиты; $D_0 = 2h^3/3$; h – полутолщина плиты; μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (25)$$

c_l – вещественные постоянные, или

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{l1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1l}, \quad f_{l2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2l}, \quad (26)$$

если контур жестко подкреплён; $w_0(x, y)$ – частное решение уравнения:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (27)$$

В случае жесткого защемления контура в условиях (26) нужно принять $c_{il} = 0$.

Функции $W'_k(z_k)$ являются голоморфными в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (28)$$

и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими L_l при аффинных преобразованиях (28). Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана (для контуров отверстий) и по полиномам Фабера (для внешних контуров), для комплексных потенциалов получаем выражения вида [7, 10]:

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kl n} a_{kl n}, \quad (29)$$

в котором A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые из решения систем уравнений [5]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (30)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{x0l}}{4\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{y0l}}{4\pi D_{11}} \right); \quad (31)$$

P_l и M_{xl} , M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних сил, приложенных к контуру L_l ;

$$P_{0l} = - \int_{L_l} N_{y0} dx - N_{x0} dy,$$

$$M_{x0l} = \int_{L_l} (y N_{x0} - H_{xy0}) dy - (y N_{y0} - M_{y0}) dx,$$

$$M_{y0l} = \int_{L_l} (x N_{y0} - H_{xy0}) dx - (x N_{x0} - M_{x0}) dy; \quad (32)$$

$$\varphi_{k0n} = (z_k / R_{k0})^n, \quad \varphi_{kl n} = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l \geq 1); \quad (33)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}) \quad (34)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2,$$

$$m_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}, \quad (35)$$

где φ_l – угол между направлениями осей координат Ox и $O_l x_l$ основной системы и локальной системы с началом в центре эллипса L_l и осью $O_l x_l$ вдоль полуоси a_l , отсчитываемый от Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала системы координат $O_l x_l y_l$; a_{kln} – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для определения неизвестных постоянных a_{kln} функций (29) удовлетворим граничным условиям (20). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получим:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \left[A_{kl} \ln(t_k - t_{kl}) + \frac{A_{kl} t_k + B_{kl}}{t_k - t_{kl}} + \phi'_{kln}(t_k) a_{kln} \right] = \frac{df_{li}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (36)$$

где

$$\delta_k = dt_k / ds; \quad \phi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad \phi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l \geq 1).$$

Условиям (36) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [8, 9]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и удовлетворив в них условиям (36), получим:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \phi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = \frac{df_{li}(t_{lm})}{ds} -$$

$$- 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} g_{kli} \delta_k \left(A_{kl} \ln(t_{klm} - t_{kl}) + \frac{A_{kl} t_{klm} + B_{kl}}{t_{klm} - t_{kl}} \right) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (37)$$

где $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$. Систему (37) дополним уравнениями однозначности прогиба [5] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{kln} R_{kl} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (38)$$

После нахождения псевдорешений системы уравнений (37) и (38) с использованием сингулярных разложений постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты в любой точке плиты

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \quad (39)$$

где $r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$.

В случае изотропии решение задачи строится аналогичным образом с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [6].

Исходя из приведенного решения, представим решения ряда новых задач для плиты с одним центральным эллиптическим (в частном случае круговым) отверстием с контуром L_1 (рис. 1). Внешний контур L_0 является эллиптическим или прямоугольным. Плита находится под действием равномерно распределенных по верхнему основанию усилий $q(x, y) = q_0$, где q_0 – интенсивность этих усилий.

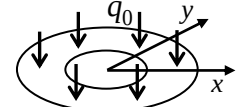


Рис. 1

Для рассматриваемой задачи в вышеприведенном решении нужно принять $\mathcal{L} = 1$, $B_{kl} = 0$, кроме того, учитывать способ загрузки плиты. Для заданного нагружения частное решение $w_0(x, y)$ неоднородного дифференциального уравнения (27) можно принять в виде:

$$w_0(x, y) = q^* (x^2 + y^2)^2, \quad (40)$$

где q^* – постоянная. Подставляя функцию (40) в уравнение (27), получаем:

$$q^* = \frac{q_0}{8[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66})]}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 4q^* (3x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 4q^* (3y^2 + x^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 8q^* xy; \quad (41)$$

$$\begin{aligned} M_{x0} &= -4q^* [D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy], \\ M_{y0} &= -4q^* [D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy], \\ H_{xy0} &= -4q^* [D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy]; \\ N_{x0} &= -8q^* [(3D_{11} + D_{12} + 2D_{66})x + 3(D_{16} + D_{26})y], \\ N_{y0} &= -8q^* [3(D_{16} + D_{26})x + (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22})y]; \\ N_{xy0} &= 4q^* [3\cos^2(\vartheta)a_1^2D_{16} + 3\cos^2(\vartheta)a_1^2D_{26} - 2a_1b_1D_{12}\vartheta + \\ &+ 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)a_1b_1D_{22} - 3a_1b_1D_{22}\vartheta - 4a_1b_1D_{66}\vartheta - 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \times \\ &\times a_1b_1D_{11} - 3a_1b_1D_{11}\vartheta + 3\cos^2(\vartheta)b_1^2D_{16} + 3\cos^2(\vartheta)b_1^2D_{26}]. \end{aligned} \quad (42)$$

$$P_{01} = - \int_{L_1} N_{y0} dx - N_{x0} dy = - \int_0^{2\pi} N_{y0} dx - N_{x0} dy = -\pi q_0 a_1 b_1. \quad (43)$$

В случае кругового отверстия радиуса R_1 ($a_1 = b_1 = R_1$)

$$P_{01} = -\pi q_0 R_1^2. \quad (44)$$

Рассмотрим частные случаи граничных условий (граничных задач).

1⁰. Пусть внешний контур плиты жестко зашпелен, а внутренний свободен. В этом случае в приведенном решении нужно принять:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0, \quad P_{01} = -\pi q_0 a_1 b_1, \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad g_{k11} = p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \\
\frac{df_{01}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}, \\
\frac{df_{11}}{ds} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{dJ_{02}(s)}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \quad (45)$$

Для случая изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси Ox (при $y = 0$) получены формулы:

$$\begin{aligned}
M_x &= -4q^* D(3+\nu)x^2 - 2D(1+\nu)[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1] - D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right), \\
M_y &= -4q^* D(3\nu+1)x^2 - 2D(1+\nu)[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1] + D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right),
\end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}
q^* &= \frac{q_0}{64D}, \quad A_1 = -\frac{q_0 \pi R_1^2}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \\
a_1 &= -\frac{A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 ((\varepsilon - 1) \ln R_1 - 1) + 4q^* R_0^4}{(\varepsilon - 1) R_1^2 + 2R_0^2} + \frac{4q^* (5-\nu) R_1^4}{(1-\nu)((\varepsilon - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}, \\
b_{-1} &= -\{(1-\nu)[A_1 (\varepsilon - 1)(2 \ln R_0 + 1) - 2A_1 ((\varepsilon - 1) \ln R_1 - 1)] + \\
&\quad + 4q^* [2(1+\nu) R_0^2 + (5-\nu) R_1^2]\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\varepsilon - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}.
\end{aligned}$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

2⁰. Пусть внешний контур плиты жестко защемлен, а внутренний жестко подкреплён. Для этого случая в приведенном решении нужно принять:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0, \quad P_{01} = -\pi q_0 a_1 b_1, \quad g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \\
\frac{df_{l1}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{l2}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \quad (47)$$

Для изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси Ox (при $y = 0$) получены формулы (46), в которых нужно принять

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{P_{01}}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \quad a_1 = \frac{\gamma_{10} R_0 - \gamma_{11} R_1}{2(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{-1} = \frac{(\gamma_{11} R_0 R_1 - \gamma_{10} R_1^2) R_0}{R_0^2 - R_1^2}, \\
\gamma_{kl} &= -\left[A_1 R_l^k (\ln R_l^k + 1) + 4q^* R_l^3\right].
\end{aligned} \quad (48)$$

3⁰. Пусть внешний контур плиты свободен от воздействий, а внутренний жестко зашлемлен. В этом случае главный вектор действующих на эллиптическое кольцо с внешним контуром с полуосями a_0, b_0 и внутренним контуром с полуосями a_1, b_1 , загруженное усилиями q_0 равен $\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0$. Следовательно, главный вектор усилий, приложенных к внутреннему контуру (действие опоры) равно $-\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0$. С учетом этого для данного случая получаем:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0, \quad P_{01} = -q_0\pi a_1b_1, \\ g_{k01} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\ \frac{df_{01}}{ds} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{dJ_{02}(s)}{ds}, \\ \frac{df_{11}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (49)$$

Для изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z), \psi(z)$ методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси Ox (при $y = 0$) получены формулы (46), в которых нужно принять:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{32R_0^2 q^*}{(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{R_0^2 q_0}{8D} = -\frac{\pi R_0^2 q_0}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \\ a_1 &= -\frac{A_1 R_1^2 (2 \ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha-1) \ln R_0 - 1) + 4q^* R_1^4}{(\alpha-1) R_0^2 + 2R_1^2} + \frac{4q^* (5-\nu) R_0^4}{(1-\nu)((\alpha-1) R_0^2 + 2R_1^2)}, \\ b_{-1} &= -\{(1-\nu)[A_1(\alpha-1)(2 \ln R_1 + 1) - 2A_1((\alpha-1) \ln R_0 - 1)] + \\ &\quad + 8(1+\nu)q^* R_1^2 + 4(5-\nu)q^* R_0^2\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\alpha-1) R_0^2 + 2R_1^2)}. \end{aligned} \quad (50)$$

4⁰. Пусть внешний контур плиты подкреплен, а внутренний жестко зашлемлен. Как и в предыдущем случае определяем главный вектор усилий, действующих на внутренний контур кольца. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= -\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0, \quad P_{01} = -q_0\pi a_1b_1, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\ \frac{df_{11}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (51)$$

Для случая изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z), \psi(z)$ методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси Ox (при $y = 0$) получены формулы (46), в которых нужно принять:

$$A_1 = \frac{P_1 + P_{01}}{8\pi D} = \left(-\pi(R_0^2 - R_1^2)q_0 - \pi q_0 R_1^2 \right) / 8\pi D = \frac{-R_0^2 q_0}{8D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0,$$

а для коэффициентов a_1 и b_{-1} справедливы формулы (48).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Были проведены численные исследования значений изгибающих моментов для плиты из материалов [10]: КАСТ-В изотропный (материал М1), стеклопластик косоугольной намотки (М3). Коэффициенты деформаций a_{ij} для этих материалов приведены в таблице. Ниже описаны полученные результаты для кругового кольца с радиусами $R_0 = a_0$, $R_1 = a_1$ и квадрата со стороной $2R_0 = 2a_0$ с круговым отверстием радиуса $R_1 = a_1$. При этом значения моментов приведены с точностью до q_0/D_0 как множителя. Для изотропной плиты, которая также рассчитывалась как анизотропная, в качестве «анизотропного» материала принимался изотропный КАСТ-В, для которого параметр $a_{12} = -8,605 \cdot 10^{-4}$, т.е. незначительно отличается от известного. В противном случае при решении задачи будет деление на ноль, т.к. корни характеристического уравнения (25) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$. Кроме того, для изотропной плиты использовались приведенные выше точные формулы. Получаемые при использовании этих двух подходов значения моментов оказались практически совпадающими, с точностью до 5–6 значащих цифр.

Таблица

Материал	Постоянные материала				
	$a_{11} \cdot 10^{-4},$ $МПа^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571

На рис. 2 для кругового кольца при $a_1/a_0 = 0,5$ приведены графики распределения моментов M_x вдоль оси Ox в точках с координатами x/a_0 . Кривые 1^0 , 2^0 , 3^0 , 4^0 соответствуют приведенным выше задачам с этими же обозначениями. Сплошные линии относятся к материалу М3, штриховые – к изотропному М1. Аналогичные графики распределения моментов M_y представлены на рис. 3. На рис. 4, 5 приведены графики распределения моментов, аналогичные данным рис. 2, 3 для случая квадратной плиты со стороной $2a_0$ с круговым отверстием радиуса a_1 , когда $a_1/a_0 = 0,5$.

Как видно из приведенных рисунков, во всех задачах (т.е. независимо от граничных условий) наибольшая концентрация (рост максимальных значений по модулю) моментов наблюдается вблизи внутреннего контура L_1 , причем, как показывают расчеты, эта концентрация увеличивается с уменьшением радиуса этого контура. Наиболее высокий уровень концентрации моментов наблюдается в случае жесткого защемления контура L_1 . Влияние вида граничного условия на незащемленном контуре (в задачах 1^0 , 2^0 на внутреннем контуре, в задачах 3^0 , 4^0 на внешнем контуре) на уровень концентрации моментов незначительно. Концентрация моментов для анизотропного материала на площадках, перпендикулярных более жестким направлениям упругости (соответствующих меньшим значениям коэффициента деформации a_{ii}), выше, чем для изотропного.

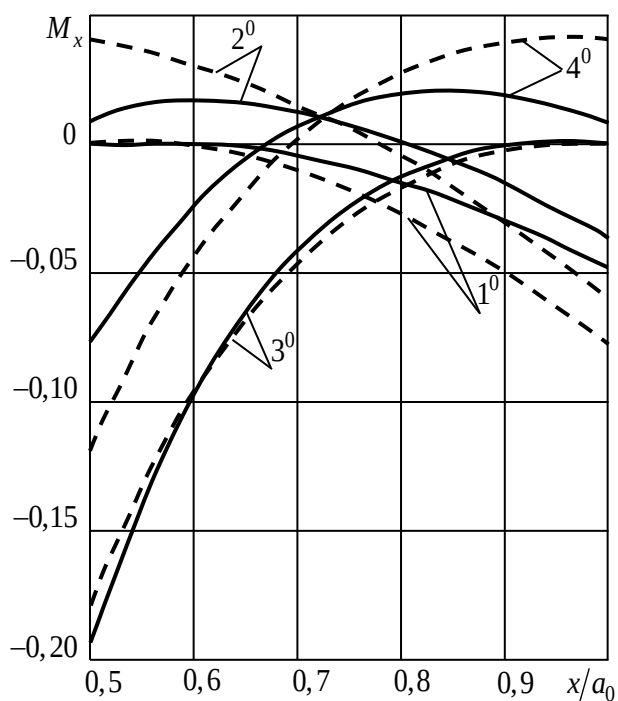


Рис. 2

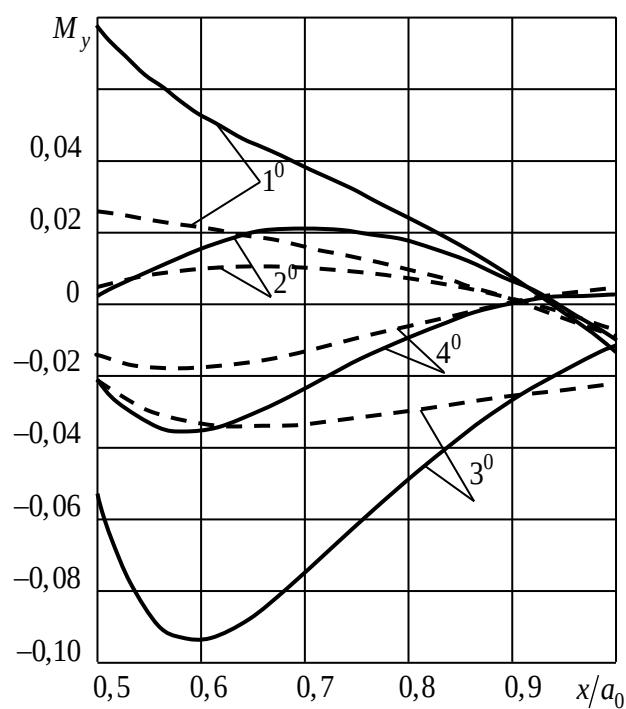


Рис. 3

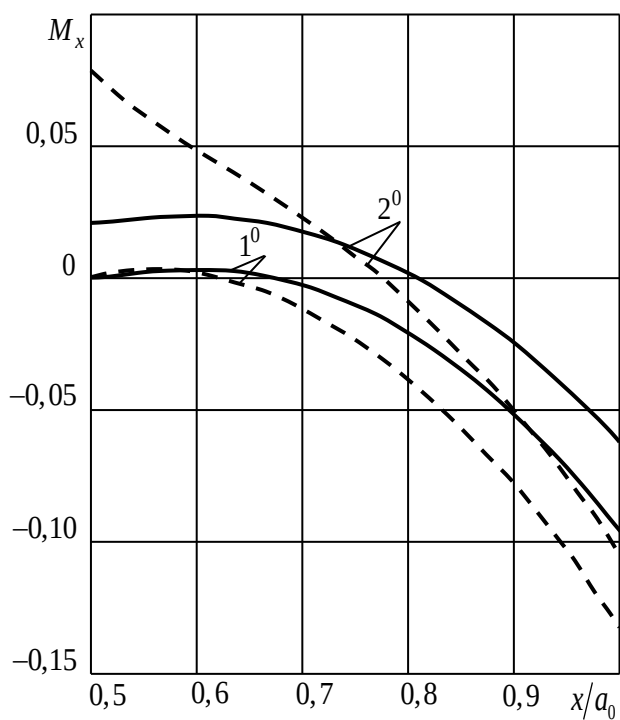


Рис. 4

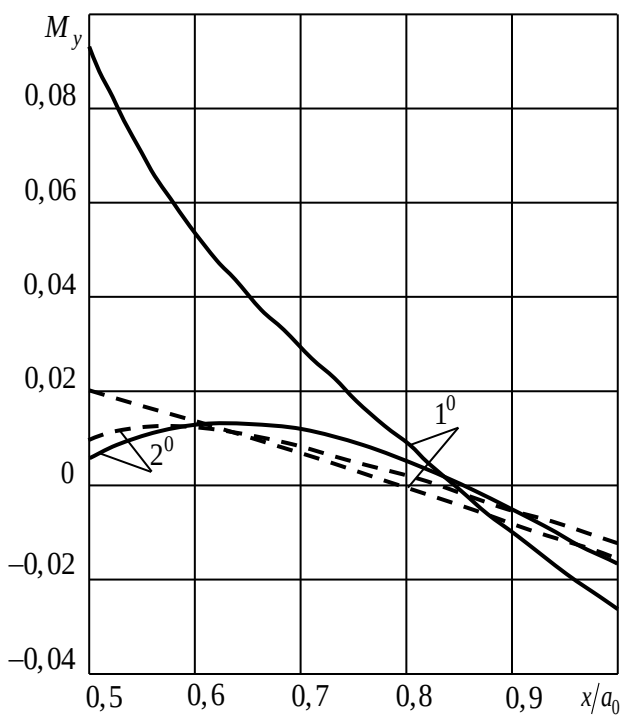


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М. : Гостехиздат, 1957. – 463 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К., Донецк : Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Космодамианский А. С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк, 1973. – 256 с.

4. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – № 3. – С. 97-127.
5. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4(50). – С. 115-136.
6. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – № 7(53). – С. 83-100.
7. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К. : А. С. К., 1998. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
8. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М. : Наука, 1977. – 304 с.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1969. – 280 с.
10. Космодамианский А. С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К., Донецк : Вища шк., 1983. – 160 с.

REFERENCES

1. Lekhnitskii, S.G. (1957), *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates], Gostekhizdat, Moscow.
2. Kosmodamianskiy, A.S. (1976), *Napryazhennoe sostoyanie anizotropnykh sred s otverstiyami ili polostyami* [Stress state anisotropic mediums with holes or cavities], Vyshcha shk., Kyiv, Donetsk.
3. Kosmodamianskii, A.S. and Ivanov, G.M. (1973), *Izgib tonkikh mnogosvyaznykh plit* [Bending of thin multiply connected plates], Donetsk.
4. Meglinskiy, V.V. (1967), "Some problems of bending of thin anisotropic multiply connected plates", *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napryazheniy i deformatsii uprugikh tel*, no. 3, pp. 97-127.
5. Kaloerov, S.A. (2012), "Complex potentials theory of bending of anisotropic multiply connected plates", *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, no. 4(50), pp. 115-136.
6. Kaloerov, S.A. (2013), "Complex potentials bending theory of isotropic multiply connected plates", *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, no. 7(53), pp. 83-100.
7. Kaloerov, S.A, and Goryanskaya, E.S. (1998), "The two-dimensional stress-strain state of a multiply anisotropic body", *Kontsentratsiya napryazheniy*, [Vols. 1-12; Vol. 7], pp. 10-26, A. S. K, Kyiv.
8. Voevodin, V.V. (1977), *Vychislitelnye osnovy lineynoy algebry* [Numerical linear algebra basics], Nauka, Moscow.
9. Forsayt, Dzh., Malkolm, M., and Mouler, K. (1969), *Mashinnye metody matematicheskikh vychisleniy* [Machine methods of mathematical calculations], Mir, Moscow.
10. Kosmodamianskiy, A.S., and Kaloerov, S.A. (1983), *Temperaturnye napryazheniya v mnogosvyaznykh plastinkakh* [Thermal stresses in multiply plates], Vishcha shk., Kyiv, Donetsk.

УДК 533.6.013.42

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., профессор,
Джуха Ю. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Получено частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний упругих оснований в виде пластин и тяжелой идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные предельные случаи: вырождение пластин в мембраны, в абсолютно жесткие пластины, отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Проведены численные исследования для случая жидкости со свободной поверхностью.

Ключевые слова: гидроупругость, осесимметричные колебания, идеальная жидкость, упругие пластинки.

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОСНОВ ТА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., професор,
Джуха Ю. О., аспірант

*Донецький національний університет,
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Отримано частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ у вигляді пластин та важкої ідеальної рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі. Розглянуто різні межові випадки: виродження пластин у мембрани, в абсолютно жорсткі пластины, відсутності верхньої пластини (випадок рідини з вільною поверхнею). Проведені чисельні дослідження на випадок рідини з вільною поверхнею.

Ключові слова: гідропружність, осесиметричні коливання, ідеальна рідина, пружна пластина.

AXIAL-SYMMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC BASES AND IDEAL LIQUID IN A RIGID CYLINDRICAL TANK

Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, Rusakov V. F., D.Sc. in Physics and Maths,
Dzhukha Yu. O., postgraduate

*Donetsk National University,
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Interest to the axisymmetric vibrations of elastic base and a liquid in a cylindrical tank is connected with the fact that in this case consideration must be given to the vibrations of the liquid column between elastic bases of a tank. It is not necessary in the case of the asymmetric vibrations in an axisymmetric tank.

A rigid straight circular cylinder with elastic base contains a liquid. Elastic bases are modeled by isotropic elastic circular plates. The plates are rigidly fixed on a contour and are subjected to tensile forces in a middle surface. It is considered that the liquid is ideal, homogeneous and incompressible. The motion of the liquid is potential. The problem is considered in linear formulation. Deflections of the plates are represented as the sum of the static and dynamic deflections. System of two inhomogeneous biharmonic equations govern coupled vibrations of plates and liquid and represent the spectral problem. The general solution of each equation is sought as the sum of the general solution of the homogeneous equation and the particular solution of the inhomogeneous equation. The general solution of the homogeneous equation is determined by the mechanical parameters of the plate and the density of the liquid. This solution contains unknown frequency. The particular solution of the inhomogeneous equation is represented as a series expansion in terms of eigenfunctions of the vibrations of the ideal liquid in a cylindrical tank.

The frequency equation of the natural coupled axisymmetric vibrations of elastic base of cylinder and the ideal liquid is derived from the conditions of rigid plates, coupled vibrations and the liquid incompressibility conditions. Determinant

of the fifth order represents this transcendental equation. The frequency spectrum of the equation consists of two sets of frequencies corresponding to the vibrations of elastic top and bottom bases. The frequency equation is symmetrical relative to upper and lower bases in the absence of gravity. Obtained frequency equation is sufficiently general and includes a number of special cases.

Numerical investigations of the axisymmetric vibrations of elastic bottom and the liquid with a free surface are performed. On the basis of numerical investigations it may be concluded that:

1. Series of the frequency equation converges rapidly.
2. The frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to the vibrations of the free surface and elastic bottom of cylindrical tank. In a wide range of parameters of the mechanical system the first set of frequency varies only slightly, and the second set varies substantially.
3. The dependence of the first frequency of the second set on dimensionless rigidity in most cases is almost linear.
4. The significant increase of frequencies of the second set takes a place as the mass of the base is reduced. The largest increase takes place for the massless plate.

Key words: hydroelasticity, axial-symmetric vibrations, ideal liquid, elastic plate.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об осесимметричных колебаниях упругого дна кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была рассмотрена в работах [1-3]. В статье [4] эта задача была обобщена на случай коаксиального цилиндрического сосуда, а в статье [5] – на несимметричные колебания. В работе [6] было сделано обобщение указанной выше задачи для цилиндрического сосуда произвольного сечения. Экспериментальные исследования представлены в статье [7]. В статьях [8, 9] исследована в линейной постановке динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью. Наиболее полная постановка задачи о колебаниях упругих оснований и идеальной жидкости дана в работе [10], а в статьях [11-12] она обобщена на случай двухсвязного цилиндрического сосуда и двухслойной жидкости. В указанных выше статьях осесимметричные собственные частоты совместных колебаний упругих оснований и тяжелой идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре не были исследованы в общей постановке. В данной статье выведено и исследовано частотное уравнение совместных осесимметричных собственных колебаний круговых упругих оснований цилиндрического сосуда и идеальной жидкости. Рассмотрен ряд частных случаев: верхнее или нижнее основание становится абсолютно жестким; верхнее основание отсутствует; упругие пластинки превращаются в мембраны. Проведены численные исследования для различных глубин заполнения резервуара, инерционных и неинерционных пластин, изменяющихся упругих характеристик пластин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим совместные колебания упругих оснований и тяжелой идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ , находящейся в прямом круговом цилиндре радиуса a . Основания цилиндра представляют собой круглые изотропные пластинки, жестко защемленные по контуру с изгибной жесткостью D_i и подверженные растягивающим усилиям T_i в срединной плоскости ($i=1,2$). Индекс $i=1$ соответствует верхнему основанию, а $i=2$ – нижнему. Цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ расположим так, чтобы плоскость $Or\theta$ находилась на одинаковом расстоянии от оснований, а ось Oz была направлена по оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания пластин и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [1, 2, 4]:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta^2 W_1 - T_1 \Delta W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=h/2} - g \frac{h}{2} \right), \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-h/2} + g \frac{h}{2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS, \quad (4)$$

$$W_i \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (i=1,2) \quad (5)$$

Здесь $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$; W_i , ρ_{0i} и δ_{0i} – соответственно прогиб, плотность и толщина i -ой пластинки; Φ – потенциал скоростей жидкости; h – глубина заполнения; Q – произвольная функция времени; $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ и $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая; S – сечение кругового цилиндра.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Вследствие осевой симметрии функции Φ и W_i представим в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(r)$ следующим образом [1, 2, 4, 6]:

$$\Phi(r, t) = a_0(t) + a_1(t)z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(t) e^{k_n z} + B_n(t) e^{-k_n z} \right] \psi_n(r), \quad (6)$$

$$W_i(r, t) = W_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(t) \psi_n(r), \quad (7)$$

где

$$W_{i0} = \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \quad W_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 d\Omega.$$

Собственные функции $\psi_n(r)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения краевой задачи [13]:

$$\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

и вместе с произвольной константой образуют на S полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид $\psi_n(r) = J_0(k_n r)$, а собственные числа k_n находятся из уравнения $J_1(k_n a) = 0$ (J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода).

Подставив выражения (6)-(7) функций Φ и W_i в граничные условия (3)-(4), получим:

$$A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{-\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad (\kappa_n = k_n h),$$

и уравнения (1)-(2) примут вид:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left(Q - \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{1n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (8)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left(Q - \dot{a}_0 + (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{2n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right). \quad (9)$$

ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о собственных совместных колебаниях упругих пластин и жидкости. Для этого положим $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$, $\rho(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q} e^{i\omega t}$, $\rho \dot{a}_1 \frac{h}{2} = \tilde{w} e^{i\omega t}$. Здесь W_i^{st} – статический прогиб пластин. В этом случае уравнения (8) – (9) примут вид:

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - \left[k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g \right] w_i = (-1)^{i+1} \tilde{Q} - \tilde{w} + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n \quad (i=1, 2), \quad (10)$$

где

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n} \cosh \kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n} \cosh \kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho \omega^2 \frac{h}{2} w, \quad (11)$$

$$w_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_i \psi_n dS, \quad w = \frac{1}{S} \int_S w_1 dS = \frac{1}{S} \int_S w_2 dS. \quad (12)$$

Решение каждого уравнения (10) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [10-14]:

$$w_i = \sum_{k=1}^2 w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{k_n \sinh \kappa_n d_{in}} \psi_n + \tilde{k}_{0i} \left[\tilde{Q} + (-1)^i \tilde{w} \right] \quad (i=1, 2). \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2}, \quad d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i \right) k_n^2 - \left[k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g \right],$$

A_{ik}^0 ($i, k=1, 2$), w_{in} , $\tilde{Q}$ и $\tilde{w}$ – неизвестные константы.

Исключим неизвестную константу $\tilde{w}$. Для этого подставим (13) во второе условие (12) и воспользуемся условием ортогональности собственных функций ψ_n константе:

$$\tilde{w} = \frac{1}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}} \sum_{k=1}^2 \left(\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right) + \tilde{Q} (\tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}),$$

$$\text{где } \tilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{S} \int_S w_{ik}^0 dS.$$

Из второго условия (12) также следует следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\left(\rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2 \right) \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \left(\rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2 \right) \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right] + 2 \left(\rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02} \right) \tilde{Q} = 0. \quad (14)$$

Подставив (13) в первое условие (12) и, разрешив систему двух линейных уравнений относительно w_{1n} и w_{2n} , окончательно получим:

$$w_i = \sum_{k=1}^2 \left(w_{i1k} A_{1k}^0 + w_{i2k} A_{2k}^0 \right) + k \tilde{Q}. \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{11k} &= w_{1k}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n, \quad w_{12k} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ w_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n, \quad w_{22k} = w_{2k}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ a_{11n} &= D_{1n} D_{2n}^*, \quad a_{12n} = -d_{1n}^*, \quad a_{21n} = -d_{2n}^*, \quad a_{22n} = D_{2n} D_{1n}^*, \end{aligned} \quad (16)$$

$$k_1 = \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, \quad k_2 = \frac{\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, \quad k = \frac{2\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, \quad \tilde{d}_{in} = \frac{\rho\omega^2}{d_{in}k_n \sinh \kappa_n}, \quad d_{in}^* = \frac{d_{in}}{\Delta_n},$$

$$D_{in} = \tilde{d}_{in} \sinh \kappa_n, \quad D_{in}^* = \frac{\coth \kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = 1 - (D_{1n} + D_{2n}) \coth \kappa_n + D_{1n} D_{2n},$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ik}^0 \psi_n dS.$$

Из условий жесткого защемления пластин (5) и уравнения (14) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих оснований и жидкости:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{112} & \tilde{w}_{121} & \tilde{w}_{122} & k \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{212} & \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_2 \tilde{w}_{12}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{11k} &= B_{1k} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 B_n^*, \quad \tilde{w}_{12k} = k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 B_n^*, \\ \tilde{w}_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 B_n^*, \quad \tilde{w}_{22k} = B_{2k} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 B_n^*, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{k}_2 = \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2, \quad \tilde{k}_1 = \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2, \quad \tilde{k} = 2 \left(\rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02} \right),$$

$$B_{ik} = w_{ik}^0 \Big|_{r=a}, \quad C_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^0}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad B_n^* = J_0(\xi_n), \quad (i=1,2; k=\overline{1,2}).$$

Частотный спектр уравнения (17) состоит из двух наборов частот, характеризующих колебания верхнего и нижнего упругих оснований и возможно ожидать, что при достаточно малых глубинах заполнения будет наблюдаться довольно сильное взаимовлияние этих колебаний.

Следует отметить, что частотное уравнение (17) имеет особенности при $\Delta_n = 0$,

$\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0 \left(\omega^2 = \frac{2\rho g}{k_{02} - k_{01}} \right)$ и $\rho g - \omega^2 k_{02} = 0 \left(\omega^2 = \frac{\rho g}{k_{02}} \right)$, которые необходимо учитывать при проведении численных расчетов.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ЖИДКОСТИ

Полученное уравнение (17) является довольно общим и включает в себя ряд частых случаев, которые представляют самостоятельный интерес.

Случай невесомости. В этом случае $g = 0$ и частотное уравнение (17) будет симметрично относительно индексов 1 и 2, что имеет физическое обоснование и подтверждает правильность выведенного уравнения. Если $k_{01} = k_{02}$, то $\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0$ и, как было отмечено выше, уравнение (17) имеет особенность. При $k_{01} = 0$ и $k_{02} \neq 0$ будем иметь $k_1 = 1, k_2 = 0$, а пятый столбец определителя уравнения (17) можно записать следующим образом $(1, 0, 1, 0, k_{02}(\rho h + k_{02}))^{-1}$. Если $k_{02} = 0$ и $k_{01} \neq 0$, то $k_1 = 0, k_2 = 1$, а пятый столбец определителя уравнения (17) запишется так: $(-1, 0, -1, 0, k_{01}(\rho h + k_{01}))^{-1}$.

Верхняя пластина вырождается в мембрану. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую строку и второй столбец, а в соотношениях (16) положить $D_1 = 0$. Частотное уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{121} & \tilde{w}_{222} & k \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ 0 & C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Нижняя пластина вырождается в мембрану. Как и в предыдущем случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть четвертую строку и четвертый столбец, а в соотношениях (16) считать $D_2 = 0$. Частотное уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{112} & \tilde{w}_{121} & k \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{212} & \tilde{w}_{221} & k \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_2 \tilde{w}_{12}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Нижняя и верхняя пластины вырождаются в мембраны. В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую и четвертую строки и второй и четвертый столбец, а в соотношениях (16) положить $D_1 = D_2 = 0$. Частотное уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{121} & k \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{221} & k \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Случай наличия свободной поверхности у жидкости. Этот случай реализуется при отсутствии верхней пластинки. В определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть первую и вторую строки и первый и второй столбец, а в соотношениях (16) считать $k_{01} = 0, T_1 = 0, D_1 = 0$. Частотное уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

При вырождении нижней пластинки в мембрану ($D_2 = 0$) уравнение (22) запишется следующим образом:

$$\tilde{k} \left(B_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 B_n^* \right) - (k_2 \tilde{k} + k \tilde{k}_1) \tilde{w}_{21}^0 = 0. \quad (23)$$

Нижняя или верхняя пластинки абсолютно жесткие. Если верхняя или нижняя пластинка становится абсолютно жесткой, то в этом случае $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$) или $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$). Переходя к пределу в уравнение (17) соответственно при $T_1 \rightarrow \infty$ ($D_{1n} \rightarrow 0$) или при $T_2 \rightarrow \infty$ ($D_{2n} \rightarrow 0$), получим частотные уравнения:

в первом случае ($T_1 \rightarrow \infty$)

$$C_{22}B_{21} - C_{21}B_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} (C_{22}E_{21n}^0 - C_{21}E_{22n}^0) B_n^* = 0, \quad (24)$$

а во втором

$$C_{11}B_{12} - C_{12}B_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} (C_{11}E_{12n}^0 - C_{12}E_{11n}^0) B_n^* = 0. \quad (25)$$

Следует отметить, что для несимметричных колебаний уравнение (25) было подробно исследовано в [13].

ЧИСЛЕННЫЕ ИСЛЕДОВАНИЯ

В виду сложности рассматриваемой задачи проведем численные исследования для наиболее интересного и сложного случая наличия у жидкости свободной поверхности. Несмотря на достаточное количество публикаций [4, 6, 11, 12], этот случай до конца не исследован.

Введем безразмерные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{D_2}{\rho g a^4}, \quad \tilde{T}_2 = \frac{T_2}{\rho g a^2}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_{02}}{\rho a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}.$$

В обозначениях (16) получим:

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[(\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_2 \Omega^2 \right]}, \quad \tilde{k}_{01} = 1, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + \tilde{k}_2 \Omega^2}.$$

Пусть дно является абсолютно упругим ($T_2 = 0$). Этот случай был рассмотрен в статье [14]. Согласно ему, имеем:

$$w_{21}^0 = J_0 \left(\mu_2 \frac{r}{a} \right), \quad w_{22}^0 = I_0 \left(\mu_2 \frac{r}{a} \right), \quad \mu_2^4 = \frac{\tilde{k}_2 \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2},$$

$$E_{21n}^0 = \frac{2\mu_2 J_1(\mu_2)}{(\mu_2^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad E_{22n}^0 = \frac{2\mu_2 I_1(\mu_2)}{(\mu_2^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}.$$

Численные исследования частотного уравнения (22) были проведены для следующих значений безразмерных параметров: $\tilde{h} = 0.1..4$, $\tilde{k}_2 = 0..10$, $\tilde{D}_2 = 0.1..10$. На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ($n = \overline{1,2}$) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора Ω_{21}^2 от безразмерной жесткости $\tilde{D}_2$ для различных глубин заполнения $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$ (рис.1) и массовой характеристики пластины $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует $\tilde{h} = 0.5$, средний $\tilde{h} = 1.0$, а верхний $\tilde{h} = 1.5$. На рис. 2 аналогично $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$.

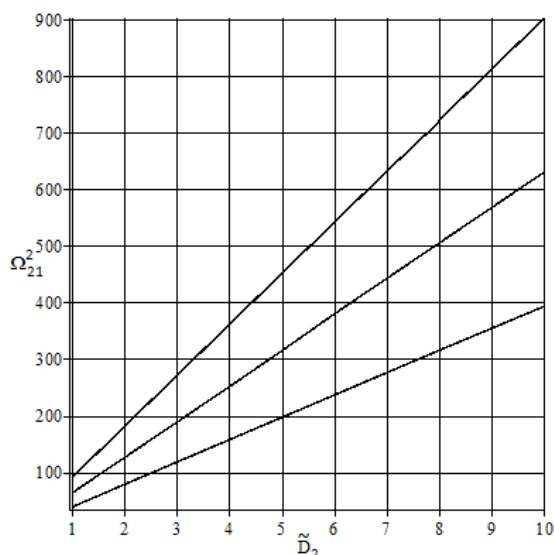


Рис. 1. Графики зависимости Ω_{21}^2 от $\tilde{D}_2$ для различных $\tilde{h}$

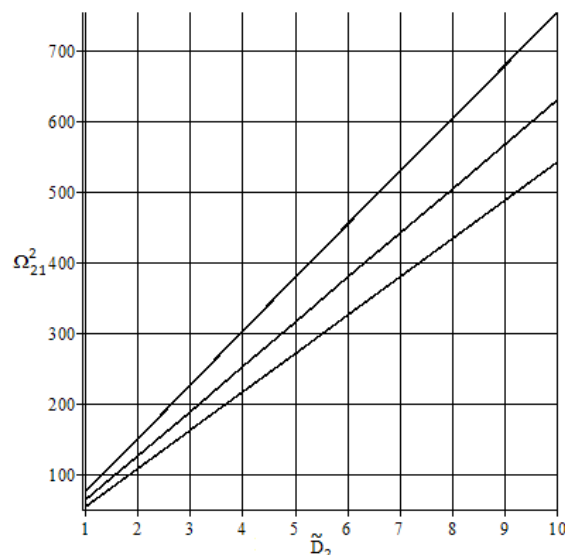


Рис. 2. Графики зависимости Ω_{21}^2 от $\tilde{D}_2$ для различных $\tilde{k}_2$

В табл. 1 приведены для параметров $\tilde{h}=1$, $\tilde{k}_2=1$, $\tilde{D}_2=1$ значения Ω_{1n}^2 (левый столбец) и Ω_{2n}^2 (правый столбец) в зависимости от числа членов ряда ($n=\overline{1,3}$). Из этой таблицы видна хорошая сходимость рядов уравнения (22), а также то, что с увеличением членов ряда добавляются новые и уточняются предыдущие частоты.

Таблица 1 – Зависимость квадрата частот первого и второго наборов от числа членов в рядах

$n=1$		$n=\overline{1,2}$		$n=\overline{1,3}$	
3.828	62.772	3.828	62.764	3.828	62.764
	1313.866	7.016	1230.289	7.016	1230.289
				10.173	6789.014

На основании проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Частотный спектр состоит из двух наборов частот, соответствующих колебаниям свободной поверхности и упругого дна. В достаточно широком диапазоне изменений параметров механической системы наблюдается слабое изменение частот первого набора Ω_{1n}^2 и существенное изменение частот второго набора Ω_{2n}^2 .
2. Зависимость первой частоты второго набора Ω_{2n}^2 от безразмерной жесткости $\tilde{D}_2$ в большинстве случаев почти линейная.
3. С увеличением глубины заполнения $\tilde{h}$ происходит незначительное увеличение частот первого набора и существенное второго набора.
4. С уменьшением массовой характеристики $\tilde{k}_2$ происходит значительное увеличение частот второго набора. Наибольшее увеличение происходит для безмассовой пластины ($\tilde{k}_2=0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петренко М. П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, №6. – С. 44-50.
2. Петренко М. П. Вынужденные колебания жидкости и упругого днища цилиндрического бака / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, №6. – С. 127-131.
3. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном / А.А. Пожалостин // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. – 1963. – №4. – С. 25-32.
4. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2008. – Вип. 1. – С. 202-206.
5. Карнаух А. Ю. Собственные формы совместных колебаний упругого дна и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н. К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 78-84.
6. Карнаух А. Ю. Собственные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 102-108.
7. Лакиза В. Д. Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим днищем, частично заполненном жидкостью / В.Д. Лакиза // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, №11. – С. 114-120.
8. Дидок Н. К. Поперечные колебания цилиндра с упругим дном, содержащего жидкость со свободной поверхностью / Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 71-108.
9. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013, №5. – С. 30-34.
10. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102-108.
11. Карнаух А. Ю. Свободные колебания упругих оснований двусвязного цилиндрического сосуда с жидкостью / А.Ю. Карнаух // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : матер. VI Междунар. науч. конф. – Донецк : Юго-Восток, 2010. – С. 164-168.
12. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – №2. – С. 33-36.
13. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л.В. Докучаев. – М. : Машиностроение, 1987. – 232с.
14. Кононов Ю. Н. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости / Ю.Н. Кононов, Н.К. Дидок, Ю.А. Джуха // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2014. – Вип. 1. – С. 64-69.

REFERENCES

1. Petrenko, M.P. (1969), "Natural vibrations of the liquid with a free surface and elastic bottom of the cylindrical cavity", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 5, no. 6, pp. 44-50.
2. Petrenko, M.P. (1970), "Forced vibrations of the liquid and the elastic bottom of the cylindrical tank", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 6, no. 6, pp. 127-131.
3. Pozhalostin, A.A. (1963), "Natural vibrations of a liquid in a rigid circular cylindrical vessel with elastic flat bottom", *Izv. vuzov. Ser. Aviatsionnaya tekhnika – Aviation equipment Series*, 4, USSR, pp. 25-32.
4. Karnaukh, A.Yu. (2008), "Natural vibrations of flat elastic bottom of coaxial cylindrical vessel and ideal liquid with a free surface", *Visn. Donetskogo un-ta. Ser. A – Bulletin of the Donetsk university. Ser. A*, issue 1, pp. 202-206.
5. Karnaukh, A.Yu. and Didok, N.K. (2009), "Eigenforms of joint vibrations of elastic bottom and liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 18, pp. 78-84.
6. Karnaukh, A.Yu. and Didok, N.K. (2010), "Natural vibrations of elastic bottom of cylindrical vessel and a liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 20, pp. 102-108.
7. Lakiza, V.D. (2006), "Investigation of dynamic processes in cylindrical tank with elastic bottom, partially filled with liquid", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 42, no. 11, pp. 114-120.
8. Didok, N.K. (2011), "Transverse vibrations of cylinder with elastic bottom, containing a liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 22, pp. 71-108.
9. Didok, N.K. and Kononov, Yu.N. (2013), "Dynamics and stability of vibrations of a cylindrical tank with elastic bottom and liquid with a free surface", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki – Proceedings of the universities of the North Caucasus region. Natural sciences*, 5, Russia, pp. 30-34.
10. Didok, N.K. and Kononov, Yu.N. (2013), "Dynamics and stability of vibration of a cylindrical tank with perfect liquid and elastic foundation". *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 27, pp. 102-108.
11. Karnaukh, A.Yu. (2010), "Natural vibrations of elastic foundation of a doubly connected cylindrical vessel with liquid", *Actual problems of solid mechanics: VI Mezhdunar. nauch. konf. (2010) – The Sixth International Conference*, Yugo-Vostok, Donetsk, pp. 164-168.
12. Karnaukh, A.Yu. (2013), "Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki – Proceedings of the universities of the North Caucasus region. Natural sciences*, 2, Russia, pp. 33-36.
13. Dokuchaev, L.V. (1987), *Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemyimi elementami* [Nonlinear dynamics of flight vehicles with deformable elements], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
14. Kononov, Yu.N., Didok, N.K. and Dzhukha, Yu.A. (2014), "About solution of generalized inhomogeneous biharmonic equation in problems of hydroelasticity". *Visn. Donetskogo un-tu. Ser. A – Bulletin of the Donetsk university. Serie A*, issue 1, pp. 64-69.

УДК 624.078.4

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Куреннов С. С., к. т. н., доцент

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина*

ss_kurennov@mail.ru

Решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения прямоугольных пластин в упрощенной двумерной постановке. Решение учитывает изгиб несущих слоев в плоскости соединения. Напряжения полагаются равномерными по толщине элементов соединения. Для построения решения использована гипотеза об абсолютной жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Поперечные перемещения несущих слоев находятся согласно балочной теории. Продольные перемещения – согласно уточненной теории, которая учитывает взаимный сдвиг элементов слоя в продольном направлении. Решена модельная задача.

Ключевые слова: клеевое соединение, двумерная модель, модель Фолькерсена, разделение переменных.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

Куреннов С. С., к. т. н., доцент

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна*

ss_kurennov@mail.ru

Розв'язано задачу про напружений стан клейового з'єднання прямокутних пластин у спрощеній двовимірній постановці. Розв'язок враховує згин зовнішніх шарів у площині з'єднання. Напруження вважаються рівномірними за товщиною елементів з'єднання. Для побудови розв'язку використано гіпотезу про абсолютну жорсткість шарів, що з'єднуються у поперечному до навантаження напрямку. Поперечні переміщення зовнішніх шарів знаходять згідно з теорією балок, поздовжні переміщення – згідно з уточненою теорією, яка враховує взаємний зсув елементів шару в подовжному напрямку. Розв'язано модельну задачу.

Ключові слова: клейове з'єднання, двовимірна модель, модель Фолькерсена, розподіл змінних.

THE STRESSED STATE OF THE ADHESIVE JOINT. A SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

Kurennov S. S., Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.

*National Aerospace University «KhAI»,
17 Chkalova str., Kharkiv 61070, Ukraine*

ss_kurennov@mail.ru

This article is dedicated to the urgent stressed state problem for the lapping adhesive joint in the 2D formulation. The purpose of this work is solution of the stressed state problem for the adhesive joint of the rectangular plates in the case of longitudinal load, which generates a deflective moment at the contact plane. Here was obtained an analytical solution for the first time. To construct solution we use a simplified 2D Volkersen model, according to which an adherend layers are supposed to be absolutely rigid in the cross direction. A plates rigidity hypothesis in cross direction was used before at the creation of the most accurate beam theory, and its essence is that we refuse a plane section hypothesis. This technique was developed by author for the two plates joint. The outer layers work in tension, in compression and in shear only. The adhesive joint works in shear only. The stress values are supposed to be constant along the layers depth. The stress values in the adhesive joint are proportional to the difference of the outer layers shift. According to the rigidity layers hypothesis, the layers shift in cross direction are constant by width and depend on the longitudinal coordinate only. The outer layers shift are given as superposition of two terms. The first component is conditioned by bend in the joint plane and can be calculated according to a plane section hypothesis. The second component is conditioned by intershift of the bearing layer elements in the longitudinal direction. Relatively to the first component the system of the two ordinary differential equations was obtained relatively to the layer's cross shift. The second shift component is described by the system of the two partial differential equations of a second order. The solution of a given system was obtained by the variable separation method and has an eigenfunctions series form. The eigenfunctions are obtained from the homogeneous boundary conditions at the lateral sides of a joint. Here was solved the Model problem.

Key words: glued joint, analytical solution, Volkersen's model, 2D model, separation of variables.

ВВЕДЕНИЕ

Нахлесточные клеевые соединения широко распространены в современной технике. В многочисленной научно-технической литературе приведены методики определения напряженного состояния соединений, построенные на базе различных гипотез и учитывающие те или иные конструктивные и экспериментальные факторы [1, 2]. В большинстве методик распределение напряжений по толщине соединяемых (несущих) слоев полагается равномерным или линейным (вследствие изгиба), и равномерным по ширине соединения. Однако в ряде случаев при расчете напряженного состояния соединений необходимо учитывать неравномерность деформаций по ширине соединения. В этом случае для уменьшения размерности задачи и сведения ее к двумерной, изгиб соединяемых слоев не учитывается, и напряжения полагаются равномерными по толщине. Построение решения задачи о напряженном состоянии соединения в общей двумерной постановке представляется чрезвычайно сложной проблемой [3], аналитическое решение которой пока неизвестно. Исследования данной проблемы численными методами рассмотрено в работах [4, 5]. Существует два приближенных подхода, которые позволяют получить решение в аналитической форме. Первый подход состоит в том, что несущие слои полагаются податливыми на сдвиг [6-9]. Вследствие этого касательные напряжения в несущих слоях равны нулю. Этот подход позволяет оценить влияние на напряженное состояние соединения поперечных деформаций, обусловленных коэффициентами Пуассона соединяемых слоев. Приложенная нагрузка в этом случае полагается равномерно распределенной по сторонам соединения. Второй подход заключается в том, что несущие слои полагаются абсолютно жесткими в поперечном направлении, т.е., в процессе деформации соединяемые слои не изменяют своей ширины [10, 11]. Эта гипотеза использована в уточненной теории балок [12, 13]. Данный подход позволяет получить решение задачи при неравномерно приложенной нагрузке, однако пуассоновы деформации не учитываются.

В предыдущих работах автора [10, 11] прикладываемая нагрузка полагалась симметричной относительно продольной оси соединения, а поперечные перемещения несущих слоев вследствие этой симметрии – нулевыми. В настоящей работе рассматривается более общий подход, который избавлен от этого ограничения. Рассматривается задача, в которой полагается равными нулю не поперечные перемещения, а поперечные деформации. Поперечные перемещения постоянны по ширине и зависят от продольной координаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим клеевое соединение двух прямоугольных пластин ($L \times 2h$), показанное на рис. 1. Боковые стороны свободны от нагрузки. Несущие слои деформируются только в плоскости соединения, клеевой слой работает на сдвиг, напряжения равномерны по толщине слоев. Не уменьшая общности предлагаемого подхода, положим, что нагрузка приложена только ко второму слою вдоль стороны $x = 0$, а первый слой по стороне жестко закреплен.

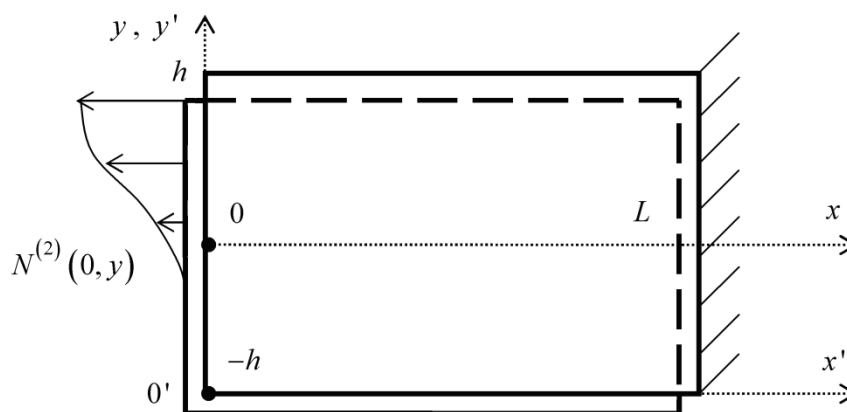


Рис. 1. Схема соединения

Уравнения равновесия несущих слоев в области склейки имеют вид [8]:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где верхний индекс означает номер несущего слоя, а нижний – направление; τ_x, τ_y – касательные напряжения в клеевом слое вдоль соответствующей оси; $q^{(1)}, q^{(2)}$ – касательные усилия в соответствующих несущих слоях; $N_x^{(1)}, N_y^{(1)}, N_x^{(2)}, N_y^{(2)}$ – нормальные усилия в несущих слоях.

Усилия в слоях (эффект Пуассона не учитывается)

$$N_x^{(k)} = B_k \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}; \quad q^{(k)} = \delta^{(k)} G^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где $u^{(k)}, v^{(k)}$ – перемещения слоя k ($k=1, 2$) в продольном и поперечном направлении соответственно; $B_k = \delta^{(k)} E_x^{(k)}$; $E_x^{(k)}, G^{(k)}, \delta^{(k)}$ – модуль упругости, модуль сдвига и толщина соответствующего несущего слоя.

Напряжения в клеевой прослойке [7, 8]

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (u^{(1)} - u^{(2)}); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (v^{(1)} - v^{(2)}), \quad (4)$$

где G_0 и δ_0 – модуль сдвига и толщина клеевого слоя соответственно.

Однородные краевые условия:

$$\begin{aligned} u^{(1)} \Big|_{x=L} &= 0; \quad v^{(1)} \Big|_{x=L} = 0; \quad N_x^{(2)} \Big|_{x=L} = 0; \\ N_x^{(1)} \Big|_{x=0} &= 0; \quad q^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0; \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На левой боковой стороне задано нормальное усилие

$$N^{(2)} \Big|_{x=0} = F(y). \quad (6)$$

В силу гипотезы об абсолютной жесткости соединяемых слоев в поперечном направлении, поперечные перемещения $v^{(k)}(x, y)$ зависят только от координаты x , поэтому обозначим их $V^{(k)}(x)$. Продольные же перемещения $u^{(k)}$ представим в виде суммы двух составляющих: первая составляющая вычисляется согласно гипотезе плоских сечений и описывает изгиб в плоскости соединения. Вторая составляющая $U^{(k)}(x, y)$ описывает продольные перемещения элементов слоев при условии равенства нулю поперечных перемещений [8, 9].

Ось x проходит вдоль продольной оси соединения, как показано на рис. 1, следовательно:

$$u^{(k)}(x, y) = -y \cdot \frac{dV^{(k)}}{dx} + U^{(k)}(x, y). \quad (7)$$

Исходную задачу можно разделить на две независимые составляющие – изгиб в плоскости соединения, который происходит согласно гипотезе плоских сечений, и продольное перемещение элементов слоев при отсутствии поперечных перемещений. Соответственно, краевое условие (1.6) также необходимо представить в виде суммы линейно распределенного усилия, которое обуславливает чистый изгиб соединения и безмоментной нагрузки

$$F(y) = K \cdot y + N_0(y), \quad (8)$$

где K – коэффициент, определяемый из условия равенства изгибающих моментов (8) и (6),

$$K \int_{-h}^h y^2 dy = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy.$$

Изгибающий момент, действующий в сечении соединения

$$M = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy. \quad (9)$$

Задача разделяется на две независимые подзадачи:

1) Решение задачи об изгибе в плоскости соединения, при котором несущие слои рассматриваются согласно теории балок Бернулли. Поперечные перемещения $V^{(k)}$ постоянны по ширине, продольные – вычисляются как $y \cdot \frac{dV^{(k)}}{dx}$ (1.7). В качестве краевого условия используется первое слагаемое (8) в форме $\left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{M}{E_x^{(2)} I^{(2)}}$, где момент вычисляется по (9), а $I^{(2)}$ – момент инерции второго слоя, $I^{(2)} = \frac{2}{3} \delta_2 h^3$.

2) Решение задачи о продольных перемещениях несущих слоев $U^{(k)}(x, y)$ при отсутствии поперечных перемещений. В качестве краевого условия используется второе слагаемое (8).

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Напряжения в клее (4) имеют вид:

$$\tau_{V,x} = -\frac{G_0}{\delta_0} y \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right); \quad \tau_{V,y} = \frac{G_0}{\delta_0} (V^{(1)} - V^{(2)}). \quad (10)$$

Продольные усилия $N_{V,x}^{(k)} = B_k y \frac{d^2 V^{(k)}}{dx^2}$. Нижний индекс V указывает, что напряжения или усилия рассматриваются не в общем случае, а обусловленные только перемещениями $V^{(k)}$.

Подставив $N_{V,x}^{(k)}$ и (10) в уравнения (1), проинтегрировав по y и удовлетворив условиям равенства нулю касательных напряжений на боковых сторонах соединения (5), получим:

$$q_V^{(k)} = (-1)^k \frac{h^2 - y^2}{2} \left[\frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right) - (-1)^k B_k \frac{d^3 V^{(k)}}{dx^3} \right]. \quad (11)$$

Подставив (11) в (2) и проинтегрировав по y , получим:

$$N_y^{(k)} = (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} y \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) + f_k(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y \right) \left[B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находятся из условий (5) $N_y^{(k)} \Big|_{y=h} = 0$:

$$f_k = -\frac{h^3}{3} B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) - h \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) \right].$$

Краевые условия на второй боковой стороне $N_y^{(k)} \Big|_{y=-h} = 0$ приводят к системе

$$A_4 \frac{d^4 \vec{V}}{dx^4} + A_2 \frac{d^2 \vec{V}}{dx^2} + A_0 \vec{V} = 0, \quad (13)$$

где

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V^{(1)}; & V^{(2)} \end{pmatrix}^T; \quad A_4 = \frac{\delta_0}{G_0} \begin{pmatrix} \delta^{(1)} E_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta^{(2)} E_x^{(2)} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_0 = \frac{3}{h^3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение системы (13) ищем в виде вектор-функции $\vec{V} = e^{\theta x} \vec{H}$. Подставив в (13), получим систему линейных однородных уравнений:

$$\left(A_4 \theta^4 + A_2 \theta^2 + A_0 \right) \vec{H} = 0, \quad (14)$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\det \left(A_4 \theta^4 + A_2 \theta^2 + A_0 \right) = 0. \quad (15)$$

Уравнение представляет собой уравнение 8-й степени, четыре корня которого равны нулю, а четыре – отличны от нуля, обозначим их θ_n .

Общее решение (13) можно представить в виде:

$$\vec{V} = \sum_{n=1}^4 S_n x^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^4 S_{n+4} e^{\theta_n x} \vec{H}_n, \quad (16)$$

где $\vec{H}_n$ – решения системы (14), определяемые с точностью до постоянного множителя S_n .

В формулы поперечных перемещений слоев (16) входит 8 констант интегрирования, которые определяются из следующих краевых условий:

$$V_1(L) = \frac{dV_1(x)}{dx} \Big|_{x=L} = \int_{-h}^h q^{(1)}(0, y) dy = \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \Big|_{x=0} = \int_{-h}^h q^{(2)}(0, y) dy = 0;$$

$$\left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{M}{E_x^{(2)} I^{(2)}}; \int_{-h}^h q^{(2)}(L, y) dy = 0; \left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0.$$

Эти условия приводят к системе линейных уравнений относительно констант $S_1, \dots, S_8$.

БЕЗМОМЕНТНАЯ ПРОДОЛЬНАЯ НАГРУЗКА

Нагрузка $N_0(y)$ (8) имеет нулевой изгибающий момент и обуславливает только продольные перемещения несущих слоев $U^{(k)}$ (7). Для удобства построения решения второй подзадачи введем систему координат $x'Oy'$, начало которой находится в одном из углов прямоугольной области (рис. 1). Очевидно, что $x = x'$ и $y = y' - h$.

В работе [10] показано, что перемещения $U^{(k)}$ можно представить в виде суммы $U^{(k)} = W^{(k)}(x') + V^{(k)}(x', y')$, где $W^{(k)}(x')$ представляет собой классическое одномерное решение Фолькерсена, а $V^{(k)}(x', y')$ имеет вид разложения в ряд по собственным функциям.

В частности, если внешние слои соединения обладают свойством $\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2} = \mu$, то перемещения $U^{(k)}$ имеют вид:

$$U_k = C_0 x' + D_0 + d_k \left(A_0 \frac{\text{ch}(\xi_0 x')}{\text{sh}(\xi_0 L)} + B_0 \frac{\text{ch}(\xi_0 (x' - L))}{\text{sh}(\xi_0 L)} \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[C_n \frac{\text{ch}(\chi_n x')}{\text{sh}(\chi_n L)} + D_n \frac{\text{ch}(\chi_n (x' - L))}{\text{sh}(\chi_n L)} + d_k \left(A_n \frac{\text{ch}(\xi_n x')}{\text{sh}(\xi_n L)} + B_n \frac{\text{ch}(\xi_n (x' - L))}{\text{sh}(\xi_n L)} \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$; $\chi_n = \sqrt{\mu} \frac{\pi n}{2h}$; $\xi_n = \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3}$; $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$; $\alpha_3^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$; $\alpha_4^2 = \mu \alpha_3^2$;

$$\alpha_1 = E_x^{(1)} \delta^{(1)} \frac{\delta_0}{G_0}; \alpha_2 = E_x^{(2)} \delta^{(2)} \frac{\delta_0}{G_0}; \mu = \frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2}; \gamma_1 = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \gamma_2 = \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Продольные усилия в несущих слоях находим, используя (3):

$$N_{U,x}^{(k)} = \delta_k E_k \left[C_0 + d_k \left(A_0 \frac{\text{sh}(\xi_0 x')}{\text{sh}(\xi_0 L)} + B_0 \frac{\text{sh}(\xi_0 (x' - L))}{\text{sh}(\xi_0 L)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[\chi_n \left(C_n \frac{\text{sh}(\chi_n x')}{\text{sh}(\chi_n L)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + D_n \frac{\text{sh}(\chi_n (x' - L))}{\text{sh}(\chi_n L)} + d_k \xi_n \left(A_n \frac{\text{sh}(\xi_n x')}{\text{sh}(\xi_n L)} + B_n \frac{\text{sh}(\xi_n (x' - L))}{\text{sh}(\xi_n L)} \right) \right] \right]. \quad (18)$$

Коэффициенты A_0, C_0, B_0, D_0 и A_n, C_n, B_n, D_n найдем, разложив функцию $N_0(y')$ (8) в ряд Фурье

$$N_0(y') = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos \frac{\pi n y'}{2h}.$$

Система уравнений относительно A_0, C_0, B_0, D_0 имеет вид:

$$C_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} B_0 = 0; \quad C_0 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} B_0 = \frac{v_0}{2\delta_2 E_2};$$

$$C_0 L + D_0 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_0 = 0; \quad C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} A_0 = 0.$$

Для $n > 0$ получаем уравнения:

$$\begin{cases} -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} = 0; \\ -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = \frac{v_n}{\delta_2 E_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_n + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_n = 0; \\ C_n \chi_n + A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = 0. \end{cases}$$

Первые слагаемые формул (17) и (18), которые стоят перед знаком суммы, представляют собой классическое одномерное решение Фолькерсена [1, 2]. Абсолютные значения функций, стоящих под знаками сумм в (17) и (18), экспоненциально убывают при удалении x от концов вглубь области. Т.е., влияние неравномерностей в граничных условиях затухает в глубине области, что согласуется с принципом Сен-Венана.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим клеевое соединение алюминиевых пластинок ($E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 25$ ГПа), имеющих размеры $L = 5$ см, $2h = 3$ см, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм. Толщина клеевого слоя $\delta_0 = 0,3$ мм, модуль сдвига $G_0 = 0,8$ ГПа. Продольная нагрузка (6) распределена по закону

$$F(y) = \begin{cases} F_0 & y \geq h/2; \\ 0, & y < h/2. \end{cases}$$

График напряжений τ_x (4), (для $u^{(k)}$ вычислялись согласно (7)), показан на рис. 2.

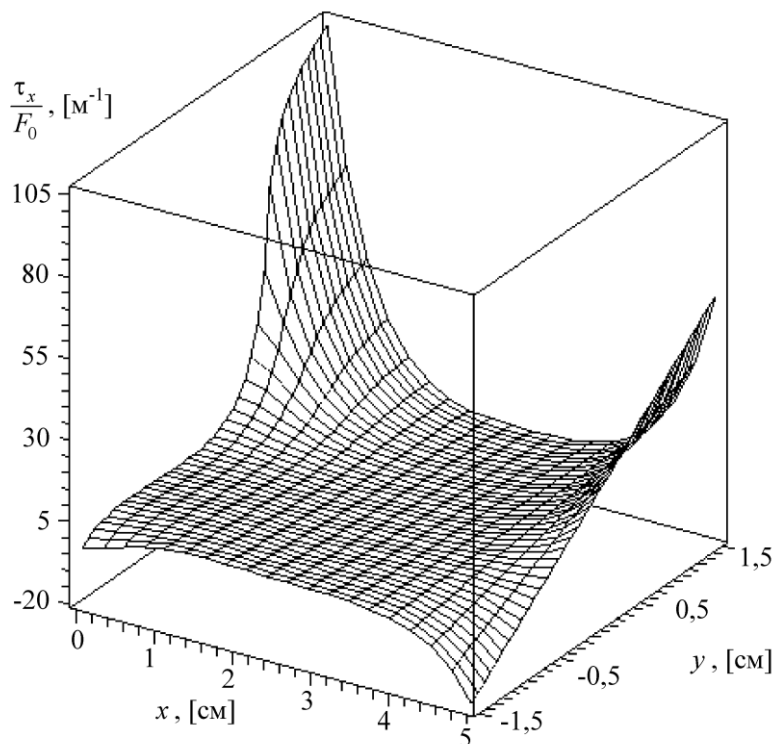


Рис. 2. Напряжения в клее τ_x

Расчеты показывают, что даже для данной геометрии соединения вклад перемещений $V^{(k)}$ в продольные касательные напряжения τ_x является существенным – напряжения, обусловленные перемещениями $V^{(k)}$, составляют около половины суммарных напряжений.

ВЫВОДЫ

Создана упрощенная двумерная модель клеевого соединения, в которой учитывается неравномерность продольных перемещений по ширине соединения. В поперечном направлении несущие слои полагаются абсолютно жесткими, соответствующие напряжения в клее (τ_y) по ширине соединения распределены равномерно. Эта идеализация позволяет получить аналитическое решение и оценить величину напряжений в продольном направлении (τ_x), которые значительно превосходят соответствующие поперечные напряжения, что позволяет использовать предложенный подход для задач проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. da Silva L. F. M. Analytical models of adhesively bonded joints—Part I : Literature survey / L.F.M. da Silva, P.J.C. das Neves, R.D. Adams, J.K. Spelt // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol. 29. – P. 319-330.
2. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях / Ю.П. Артюхин // Исследования по теории пластин и оболочек. – К. : Изд-во КГУ, 1973. – Вып. 10. – С. 3-27.
3. Рябенков Н. Г. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин / Н.Г. Рябенков, Ю.П. Артюхин // Исслед. по теор. пластин и оболочек, Изд-во Казанского ун-та. – 1981. – №16. – С. 82-90.
4. Andruet R. H. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints / R.H. Andruet, D.A. Dillard, S.M. Holzer // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2001. – №21. – P. 17-34.
5. Oterkus E. Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints / E. Oterkus, A. Barut, E. Madenci // NASA Technical Report AIAA Paper 2004-1560, ID 20040084438 (Acquired Aug 03, 2004). – 18 p.
6. Карпов Я. С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов / Я.С. Карпов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.
7. Adams R. D. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint / R.D. Adams, N.A. Peppiatt // J. of Strain Analysis. – 1973. – Vol. 8 (2). – P. 134-139.
8. Mathias J. D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J.D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921-6947.
9. Kurennov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution / S.S. Kurennov // Mechanics of Composite Materials, March, 2014. – Vol. 50, No. 1. – P. 105-114 (Russian Original Vol. 50, No. 1, January-February, 2014, P. 147-158).
10. Куреннов С. С. Упрощенная двумерная модель клеевого соединения. Учет неравномерного приложения загрузки / С.С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – Вып. 2 (78). – С. 45-56.
11. Куреннов С. С. Напряженное состояние клеевого соединения пластин разной ширины. Аналитическое решение / С.С. Куреннов, Е.В. Танчик // Вопросы проектирования и

производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – Вып. 4 (80). – С. 113-123.

12. Васильев В. В. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – №4. – С. 40-49.
13. Васильев В. В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости / В.В. Васильев // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 62-72.

REFERENCES

1. da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D. and Spelt, J.K. (2009), “Analytical models of adhesively bonded joints–Part I: Literature survey”, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, vol. 29, pp. 319-330.
2. Artukhin, U.P. (1973), “Stresses in glued joints”, *Issledovania po teorii plastin i obolochek*, issue 10, pp. 3-27.
3. Ryabenkov, N.G. and Artukhin, U.P. (1981), “Determination of stress in the adhesive connection of two semi-infinite plates”, *Issledovania po teorii plastin i obolochek*, no. 16, pp. 82-90.
4. Andruet, R.H., Dillard, D.A. and Holzer, S.M. (2001), “Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints”, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, no. 21, pp. 17-34.
5. Oterkus, E., Barut, A. and Madenci, E. (2004), “Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints”, *NASA Technical Report AIAA Paper 2004-1560, ID 20040084438* (Acquired Aug 03, 2004), 18 p.
6. Karpov, Ya.S. (2006), *Soedineniya detaley i agregatov iz kompozitsionnykh materialov* [Joining of parts and assemblies made of composite materials], KHaI, Kharkiv.
7. Adams, R.D. and Peppiatt, N.A. (1973), “Effect of Poisson’s ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint”, *Journal of Strain Analysis*, vol. 8(2), pp. 134-139.
8. Mathias, J.D., Grédiac, M. and Balandraud, X. (2006), “On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 6921-6947.
9. Kurenkov, S.S. (2014), “An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution”, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 50(1), pp. 105-114.
10. Kurenkov, S.S. (2014), “The simplified two-dimensional model of the bond. Accounting uneven application download”, *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktsiy letatel'nykh apparatov*, issue 2(78), pp. 113-123.
11. Kurenkov, S.S. and Tanchik, E.V. (2014), “Stress state of adhesive bonding plates of different widths. Analytical solution”, *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktsiy letatel'nykh apparatov*, issue 4(80), pp. 113-123.
12. Vasil'ev, V.V. (2013), “On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip”, *Mechanics of Solids*, no. 4, pp. 40-49.
13. Vasil'ev, V.V. (2010), “Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity”, *Mechanics of Solids*, no. 2, pp. 62-72.

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СИСТЕМ ТІЛ ПРИ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

Лавінський Д. В., к. т. н., доцент, Морачковський О. К., д. т. н., професор

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна*

lavinsky_d@mail.ru, o.morachko@mail.ru

У статті розглядається проблема пружно-пластичного деформування систем електропровідних тіл за умов дії електромагнітних полів. Надано загальну математичну постановку задачі, яка базується на застосуванні принципу мінімуму повної енергії системи тіл та запропоновано чисельний метод аналізу пружно-пластичного деформування тіл. Проведено розрахунки системи «індуктор – заготовка» для технологічної операції магнітно-імпульсної обробки матеріалів.

Ключові слова: пружно-пластичне деформування, електромагнітне поле, принцип мінімуму повної енергії, магнітно-імпульсна обробка матеріалів.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМ ТЕЛ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Лавинский Д. В., к. т. н., доцент, Морачковский О. К., д. т. н., профессор

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина*

lavinsky_d@mail.ru, o.morachko@mail.ru

В статье рассматривается проблема упругопластического деформирования систем электропроводных тел при условии действия электромагнитных полей. Дана общая математическая постановка задачи, основанная на применении принципа минимума полной энергии системы тел и предложен численный метод анализа упругопластического деформирования тел. Проведены расчеты системы «индуктор – заготовка» для технологической операции магнитно-импульсной обработки материалов.

Ключевые слова: упругопластическое деформирование, электромагнитное поле, принцип минимума полной энергии, магнитно-импульсная обработка материалов.

THE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION SYSTEMS BODIES WHEN EXPOSED TO ELECTROMAGNETIC FIELDS

Lavinsky D. V., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Morachkovsky O. K., D. of Technical Science, Professor

*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine,*

The electromagnetic fields are condition the work of many technical and technological systems. There are different systems of deformed solid bodies designed to convert the energy (electric generators and transformers); elements of power equipment; systems that generate pulsed electromagnetic fields for various technological purposes and much more. It is known, that the interaction of electromagnetic fields with conductive bodies leads to appearance of eddy currents. Eddy currents interact with the currents of the source, which leads to movement and deformation of the conductive bodies. Values of electromagnetic field energy can be so significant, that will cause irreversible deforming or destruction of the conductive bodies. Thus, creating effective methods of computational analysis of stress-strain state of electrically conductive bodies in the presence of an electromagnetic field is an important task in scientific and practical terms. The correct analysis of the stress-strain state in the presence of the electromagnetic field must be preceded by an analysis of the distribution of electromagnetic field components in the conductive body. Under the process of developing of analysis methods, we must use the appropriate models thermo-mechanical continuum. A modern view of the task suggests that the analysis of the distribution of the vector component of the electromagnetic field and tensor components of the deformation process must be carried out within the framework of coupled statements. In addition, when considering the composite conductive bodies we must adequately consider the effects of contact interaction. Existing analytical and numerical-analytical method of analysis of the stress-strain state of the conductive bodies under the action of the electromagnetic field may be applied directly only to bodies of canonical shape. Accordingly, when we are analyzing real technical or technological objects, which typically have a complex

shape, these methods can be used only as estimate one. The article provides a complete general mathematical statement of the problem analysis of the propagation of electromagnetic fields in conductive bodies and statement of the problem analysis of elastic-plastic deformation. This arrangement includes a differential equation on the main vector of characteristics of the electromagnetic field: intensities, inductions and surface charges; differential equations relatively components of mechanical stress tensor; geometric Cauchy ratio. The above differential equations are supplemented by the equations of state, the conditions of contact interaction, as well as initial and boundary conditions. Coupled effects under analysis of electromagnetic fields and the analysis of the stress-strain state are taken into account by introducing of volumetric electromagnetic forces into the equations of equilibrium. The finite element method was been chosen as a numerical method of solution. A concrete implementation of the finite element method here is been based on the fulfillment of the principle of minimum of total energy of a system. In this case, the total energy of the system is represented as the sum of the energy of the elastic deformation and magnetic field energy. Presents as expression full of energy depending on the displacements of points of the deformed conductive body and depending on the vector magnetic potential. It is shown that in some cases the coupled task is divided onto a sequence of electromagnetic field analysis and analysis of elastic-plastic deformation process. The problem of elastic-plastic deformation analysis of the «inductor – work-piece» system, which occurs under one of the processing operations of the electromagnetic forming of materials, is considered as an example of the application of the proposed method. The criterion of workability of the inductor is formulated. Some results of calculations are presented, in particular, shows the dependence of the maximum stress intensities in the inductor and the work piece depending on the parameters of the external electromagnetic field. The conclusions about strength of the same technological systems were made.

Key words: elastic-plastic deforming, electromagnetic field, principle of minimum of total energy of a system, electromagnetic forming of materials.

1. ВСТУП ТА АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ

Електромагнітне поле (ЕМП) є невід'ємною умовою роботи для багатьох приладів, конструкцій і машин. Прикладами цього є системи енергетичного обладнання, трансформатори та генератори – системи перетворення енергії, пристрої, що призначені для захисту від блискавок тощо. Високі інтенсивності ЕМП сприяють виникненню значних рівнів енергії в електропровідних тілах та призводять до граничних станів, як оборотного, так і незворотного деформування і руйнування. Це робить актуальним у науковому та прикладному відношенні створення математичних моделей та чисельних методів аналізу пружно-пластичного деформування систем тіл при дії електромагнітних полів, визначення напружено-деформованого стану (НДС) електропровідних тіл для подальшої оцінки міцності. Подібні методи мають базуватися на відповідних моделях термомеханіки електропровідних тіл, які деформуються. Загальна задача щодо визначення електромагнітного, температурного і механічного полів у тілі за умов дії зовнішнього електромагнітного поля полягає в розв'язуванні зв'язаної задачі електродинаміки і теплопровідності та задачі неізотермічної термopужності й пластичності. Завдяки широкому використанню електромеханічних перетворювачів енергії в сучасній науковій літературі сформульовані відомі математичні моделі для врахування зв'язаних полів, вивчені щодо п'єзoeлектрики (п'єзомагнетизму і п'єзонапівпровідності) тіл. Відомі також теорії магнітопружності, за якими досліджена механічна поведінка, зокрема, стійкість та міцність електропровідного тіла в сильному магнітному полі. Доволі розповсюджені теорії поширення хвиль у деформованому тілі з урахуванням зв'язку між механічними і електромагнітними полями, що є актуальним для проблем геофізики і сейсмології і для розвитку неруйнівних методів контролю в елементах конструкцій. Теоретичні основи теплової обробки тіл важливі для багатьох галузей техніки, що використовують зовнішнє електромагнітне випромінювання, високі й ультрависокі частоти.

Теоретичні основи, що описують моделі механіки, які враховують дію електромагнітних полів та сил різної фізичної природи, представлені в класичних фундаментальних роботах Амбарцумяна, Ерингена, Іллюшина, Новацького, Підстригача, Седова, Можена, Трусдела, Топіна та ін. [1-12]. Представлені в цих роботах моделі базуються на рівняннях Максвела, що описують характер ЕМП у вакуумі та в рухомому тілі, яке деформується, відповідно з урахуванням його електромагнітних властивостей, зовнішнє ЕМП впливає на термомеханічний стан тіла, у рівняннях рівноваги враховуються складові, які

характеризують дію поля на тіло, а саме електромагнітні сили і електромагнітні моменти, а також джерела енергії, які з'являються в процесі впливу електромагнітного поля на тіло. Для опису ЕМП використовуються п'ять векторних величин: напруженість й індукція електричного і магнітного полів, щільність поверхневих зарядів. Ці величини зв'язуються за допомогою додаткових характеристик, що описують електромагнітні властивості: провідності, поляризації і намагнічування [5, 12].

Вплив ЕМП на електропровідне тіло моделюється за рахунок введення електромагнітних сил та моментів. Рівні сили, які викликають «магнітні» складові ЕМП, є значно вище за ті, що викликаються «електричною» складовою ЕМП. Тому, для задач, у яких головною метою є оцінювання руйнування, основою може служити теорія магнітопружності, де в загальному випадку вважається, що тіло є поляризованим і таким, що намагнічується. Основи теорії магнітопружності з урахуванням ефектів зв'язаності ЕМП і механічних полів напружень і деформацій у рухомому електропровідному тілі, були закладені в роботах Кнопоффа [14] і Чадвика [15]. Вони розглядали поширення пружних хвиль з урахуванням магнітного поля Землі. Каліскі і Петикевич [16], Данкін і Еринген [17] сформулювали динамічні задачі магнітопружності у випадку коливань тіл і поширення магнітопружних хвиль в них. Підстригач, Бурак, і Кондрат [18], Амбарцумян, Багдасарян, і Белубекян [7] розвинули загальну теорію магнітопружності. Останні автори створили загальні асимптотичні рішення тривимірних рівнянь магнітопружності для оболонок і пластин і сформулювали гіпотезу магнітопружності тонких тіл. На цьому етапі набувають подальшого розвитку спеціальні моделі термомеханіки. Так, наприклад, Кондрат і Грицина [19] розвинули теорію електромагнітотермомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси. Для цього введені нові параметри, приведена маса та енергетична міра впливу зміщення маси на внутрішню енергію, вектор зміщення маси та просторовий градієнт енергетичної міри, які зумовлені врахуванням локального зміщення маси. У роботах цих авторів отримано повну систему співвідношень електромагнітотермомеханіки електропровідного поляризованого середовища з урахуванням локального зміщення маси та показано, що множина спряжених параметрів, поряд із температурою-ентропією, тензорами деформації та напружень, векторами напруженості електричного поля та поляризації визначають рівноважний термодинамічний стан.

Для подальшого, слід зазначити, що існуючі аналітичні та напіваналітичні методи розв'язування задач деформування електропровідних тіл за наявності ЕМП добре розроблені для тіл канонічної форми та їх можна використати для тестування числових методів. Зауважимо, що в науковій літературі практично не розглянуті проблеми створення методів аналізу або оцінювання міцності тіл, що піддані впливу ЕМП. Між тим відзначимо роботу Гачкевича і Мусія [20], у якій запропоновано метод аналізу стійкості електропровідних тіл у разі дії імпульсних ЕМП.

Отже, створення ефективного методу чисельного аналізу пружно-пластичного деформування тіл та визначення напружено-деформованого стану електропровідних складених тіл з метою подальшого оцінювання їх міцності є актуальною науково-практичною проблемою.

2. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА

Розглянемо загальну постановку задачі пружно-пластичного деформування системи контактно-взаємодіючих тіл при наявності ЕМП. Нехай система взаємодіючих тіл задана в декартових координатах x_i , $i=1,2,3$. Тіло об'ємом V_j має поверхню S_j : $S_j = S_{jp} \cup S_{ju} \cup S_{jk}$, де S_{jp} , S_{ju} і S_{jk} – частини тіла, на яких задані зовнішні розподілені сили, умови закріплення та умови контактної взаємодії (рис. 1).

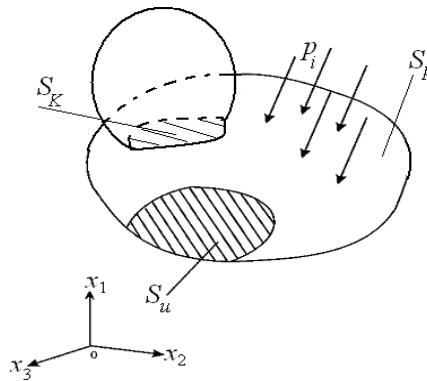


Рис. 1

Електромагнітні процеси при відсутності вільних зарядів описуються системою фундаментальних рівнянь Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{H} = 0, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad (1)$$

де $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ – щільність струму і напруженості електричного і магнітного полів у підобласті, μ_c, ε_c – магнітна та електрична проникність матеріалу підобласті. Нехтуючи конвекційними струмами, рівняння (1) можна доповнити «матеріальними» співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_c \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c \left[\vec{u} \times \vec{B} \right], \quad (2)$$

де $\vec{D}$, $\vec{B}$ – вектора індукції електричного і магнітного полів у підобласті, γ_c – питома електрична провідність матеріалу підобласті.

Повна система рівнянь відносно компонент тензорів напружень, деформацій і вектора переміщень, при заданих об'ємних і поверхневих силах, запишеться у вигляді рівняння рівноваги:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in V, \quad (3)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, f_i – компоненти вектора об'ємних електромагнітних сил, про підхід до визначення яких буде сказано далі. Геометричні співвідношення Коші для малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (4)$$

де ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, u_i – компоненти вектора переміщень. Система рівнянь (1)-(4) доповнюється граничними умовами:

$$\vec{E}_r \times \vec{n} = 0, \quad \vec{D}_r \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{H}_r \times \vec{n} = 0, \quad \vec{B}_r \cdot \vec{n} = 0; \quad (5)$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{p}_n + \frac{\Xi}{2} \vec{E}_r + \frac{\mu_c}{2} (\Xi \vec{u}_\tau + \vec{i}) \times \vec{H}_r, \quad (6)$$

де $\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n}$ – вектор механічних напружень на поверхні з нормаллю $\vec{n}$, Ξ , $\vec{i}$ – густини поверхневих зарядів і струмів, $\vec{u}_\tau$ – проекція вектора швидкості точки на площину, дотичну до межі тіла. Величини, які характеризують електромагнітний вплив, визначаються шляхом інтегрування фундаментальних рівнянь Максвелла (1). У тих випадках, коли необхідно

розглядати деформування складених тіл, для точок контактуючих тіл формуються умови спряження для векторних характеристик ЕМП та векторно-тензорних характеристик процесу деформування:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} &= 0, \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = 0; \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} &= 0, \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0, \quad \sigma_{nn}^m \leq 0, \quad (8)$$

де $u_n^{m-1}, u_n^{m+1}, \delta_{on}^m$ – нормальні переміщення точок поверхонь тіл і початковий зазор (натяг), σ_{nn}^m – нормальне напруження на контактуючих поверхнях (лініях).

Узагальнені рівняння стану, які встановлюють зв'язок між напруженнями і деформаціями в точках тіл, що деформуються пружно, можуть бути представлені тензорно-лінійними співвідношеннями між компонентами тензорів деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T, \quad A_{ijkl}^e = \frac{1}{E} [(1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}], \quad (9)$$

де E , ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона, A_{ijkl}^e , $\alpha_{ij} \Delta T$ – компоненти тензорів властивостей пружності і температурного розширення матеріалу. Згідно з теорією пластичності Прандтля-Рейса співвідношення між компонентами тензорів деформацій і напружень приймаємо у припущеннях деформацій і напружень:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= A_{ijkl} d\sigma_{ij} + \phi_{ij} dT, \quad A_{ijkl} = A_{ijkl}^e + A_{ijkl}^p, \quad A_{ijkl}^p = \frac{3}{2\sigma_i} F_\sigma(\sigma_i, T) s_{ij} s_{kl}, \\ \phi_{ij} &= \phi_{ij}^e + \phi_{ij}^p, \quad \phi_{ij}^e = \delta_{ij} \frac{d\varepsilon^T}{dT} - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} [(1+\nu) \sigma_{ij} - 3\nu \delta_{ij} \sigma_0] + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dT} (\sigma_{ij} - 3\delta_{ij} \sigma_0), \\ \phi_{ij}^p &= -F_\sigma(\sigma_i, T) \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} s_{ij}, \quad F_\sigma(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

У цих рівняннях A_{ijkl}^e – тензор пружних властивостей матеріалу, E_k – дотичний модуль. Закон пластичної течії для ізотропного матеріалу з трансляційним лінійним зміцненням приймаємо асоційованим з умовою пластичності виду:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] \times \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] - \sigma_T^2 &= 0, \\ d(\varepsilon_{ij})_p &= \frac{1}{2G} \left[d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_0 \right] + \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{3}{2} d(\varepsilon_{ij})_p d(\varepsilon_{ij})_p (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0)}, \end{aligned} \quad (11)$$

де s_{ij} – девіатор напружень; E_T – модуль зміцнення, σ_T – межа пластичності матеріалу, $\sigma_0 = 1/3 \sigma_{kl} \delta_{kl}$, $\varepsilon_0 = 1/3 \varepsilon_{kl} \delta_{kl}$, інтенсивність напружень є функцією інтенсивності деформацій та температури – $\sigma_i = H \left(\int d\varepsilon_i^p, T \right)$.

Одним з найбільш ефективних методів розв'язання поставленої задачі є метод скінчених елементів (МСЕ). В основу конкретного використання МСЕ може бути покладений метод

змінних параметрів пружності в поєднанні з покроковим розв'язанням задачі зрівноваженого стану варіаційним методом, що зводить розв'язок вихідної задачі до варіаційної рівності:

$$\delta E^{k+1} = 0, \quad E^{k+1} = U^k + W. \quad (12)$$

Тут U^k – енергія «пружного» деформування, яку підраховують за НДС на попередньому k -му кроці визначення параметрів пружності, W – енергія ЕМП, яка з урахуванням зв'язку поміж вектором напруженості магнітного поля та вектором магнітної індукції, яку підраховують по ЕМП на k -му кроці параметрів пружності. У випадку, коли впливом електричного поля нехтуємо та розглядаємо тільки змінності магнітної проникності матеріалу, енергію ЕМП – W можна записати так:

$$W = \int_V \left(\int_0^B \vec{H} d\vec{B} \right) dV. \quad (13)$$

У першому наближенні можна знехтувати змінністю магнітної проникності матеріалу та вважати, що магнітна проникність є сталою. Тоді введемо до розгляду так званий векторний магнітний потенціал $\vec{A}$, який зв'язано із вектором магнітної індукції:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (14)$$

Тепер енергію ЕМП можна записати у векторно-матричному вигляді:

$$W = \frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\}, \quad (15)$$

де $[M]$ – матриця «магнітних властивостей» матеріалу, елементи якої залежать від властивостей матеріалу, від геометрії тіла, що розглядається, та визначаються за допомогою фундаментальних рівнянь Максвела із урахуванням співвідношення (14). Подібним векторно-матричним рівнянням можна представити енергію пружного деформування:

$$U^k = \frac{1}{2} \{u\}^T [K]^k \{u\}, \quad (16)$$

де $\{u\}$ – вектор-стовпець вузлових переміщень, $[K]^k$ – матриця жорсткості, яку підраховують за розрахунковими даними на k -му кроці зміни параметрів пружності.

Тепер повернемося до варіаційного рівняння (12) та запишемо з урахуванням (15) та (16):

$$\delta E^{k+1} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E^{k+1}}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial E^{k+1}}{\partial u} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [M] \{A\} + [M_k] \{u\} = 0; \\ [K^k] \{u\} + [K_m] \{A\} = 0, \end{array} \right. \quad (17)$$

$$[M_k] = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{A\}}; \quad [K_m] = \frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial \{u\}}.$$

Матриці $[M_k]$, $[K_m]$ визначають вплив змін компонентів ЕМП на механічні характеристики матеріалу, тобто ефект магнітострикції, та вплив змін механічного стану на електромагнітні властивості матеріалу. Ці матриці характеризують зв'язаність електромагнітних та механічних полів. Якщо знехтувати ефектом магнітострикції, тоді видно, що перше рівняння системи (17) стає незалежним від другого. Отже, з'являється можливість у процесі розв'язку розглядати задачу визначення впливу компонент ЕМП на НДС окремо одне від одного.

Дійсно, якщо застосувати принцип віртуальної роботи з метою визначення сил, що діють на точки деформованого електропровідного тіла при дії ЕМП:

$$F_{em} = -\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\int_V \left(\int_0^B \vec{H} d\vec{B} \right) dV \right) = -\int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial u} dV - \int_V \int_0^B \vec{H} \frac{\partial V}{\partial u} d\vec{B}. \quad (18)$$

Якщо знехтувати впливом електричного поля та розглядати тільки змінності магнітної проникності матеріалу, то сили, що діють на точки деформованого електропровідного тіла при дії ЕМП можна визначити так:

$$\{F_{em}\} = -\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\} \right) = -\frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial u} \{A\} = -[K_m] \{A\}. \quad (19)$$

Добуток $[K_m] \{A\}$ після обернення перетворюється у вектор сил, викликаних наявністю ЕМП. Отже, у випадку нехтування змінною магнітною проникністю матеріалу та у випадку нехтування ефектами магнітострикції, задача аналізу деформування електропровідного тіла за наявності ЕМП зводиться до розв'язання системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} [M] \{A\} = 0; \\ [K] \{u\} = \{F_{em}\}, \{F_{em}\} = -[K_m] \{A\}. \end{cases} \quad (20)$$

Рівняння у (20) можуть бути розв'язані послідовно, що формально свідчить про незв'язаність задач аналізу розподілу компонент електромагнітного поля та напружено-деформованого стану. Зв'язаність ЕМП та напружено-деформованого стану виражається тим, що в правій частині другого рівняння знаходиться вектор «електромагнітних сил». Відзначимо, що цей підхід до визначення електромагнітних сил зустрічається і в роботах інших дослідників, наприклад у роботі [21]. Наведена система рівнянь повинна бути доповнена співвідношеннями для умов векторного магнітного потенціалу та переміщень на поверхні тіл. Крім цього, можуть розглядатися джерела ЕМП, наприклад струм, який задається по замкненому контуру одного або декількох тіл системи.

3. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Застосуємо запропонований вище метод до аналізу системи «індуктор – заготовка», що застосовується з метою магнітно-імпульсної обробки матеріалів (МІОМ). МІОМ є сучасним та перспективним методом обробки, в основу якого покладено дві властивості електропровідних металевих матеріалів. Перша – виникнення «наведеного» ЕМП при взаємодії із заданим. Друга – здатність таких матеріалів до пластичного деформування. МІОМ має багато переваг порівняно з традиційними методами обробки тиском. Головна перевага полягає в можливості безконтактного впливу на заготовку. При застосуванні МІОМ однією з головних проблем є забезпечення працездатності головного елемента технологічної схеми – індуктора. Працездатність індукторів базується на виконанні умов їх конструкційної міцності. Оцінювання виконання цих умов базується на розрахунках НДС. З іншого боку, аналіз формозміни заготовок також потребує розрахунків НДС. Одним з напрямків, за якими розвивається МІОМ є виправлення дефектів готових виробів, що характерно для автомобіле- і авіапромисловості. Застосування МІОМ для, наприклад, виправлення вм'ятин корпусів, дозволяє проводити цю операцію в більшості випадків без розмонтування конструкції і без ушкодження фінішного покриття поверхні. Вм'ятина в кожному конкретному випадку може мати індивідуальну форму і розміри, тому аналіз ПДВ систем «індуктор-заготовка з вм'ятиною» кожного разу буде унікальним завданням, і загальні рекомендації в цьому випадку вироблені бути не можуть. Більш практичним є моделювання процесу взаємодії індуктора з недеформованою заготовкою. Завдання в такій постановці дозволяє зробити оцінки міцності індуктора і визначити зони виникнення пластичних деформацій у заготовці.

Тобто такий підхід може розглядатися як фундамент для подальшого дослідження пластичної формозміни заготовки.

Використання МСЕ для вирішення поставленого завдання дозволяє не тільки автоматизувати перехід від рішення задачі аналізу ЕМП до аналізу НДС, але значною мірою дозволяє уникнути різних припущень для спрощень, про які було сказано вище. Крім того, необхідно мати на увазі, що передача струму від індуктора до заготовки відбувається через проміжне середовище – повітря. При розв'язанні задачі моделювалися меридіональні перерізи індуктора (матеріал мідь: відносна магнітна проникність $\mu_r = 1$, модуль пружності – 180 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0.33, межа текучості порядку 200-210 МПа), заготовки (матеріал сталь: відносна магнітна проникність $\mu_r = 1.3$, модуль пружності – 210 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0.28, межа текучості порядку 250-280 МПа); також моделювалося проміжне та оточуюче середовище – повітря (відносна магнітна проникність $\mu_r = 1$). Характерні розміри взаємодіючих тіл такі: менший радіус конічного отвору $R_1 = 10$ мм; більший радіус $R_2 = 20$ мм; габаритний радіус індуктора $R_3 = 60$ мм; радіус заготовки $R_4 = 120$ мм; товщина індуктора – 12 мм; товщина заготовки – 1 мм; найменша відстань між індуктором та заготовкою – 1 мм. Розміри оточуючого повітряного середовища обирались так, щоб змодельовати затухання ЕМП на віддаленні від його джерела. Як відомо, при затуханні ЕМП векторний магнітний потенціал прагне до нуля, тому на зовнішній межі Γ_3 (рис. 2) задався нульовий магнітний потенціал. На межі Γ_2 було задано джерело ЕМП – щільність струму, як затухаюча синусоїдальна функція часу.

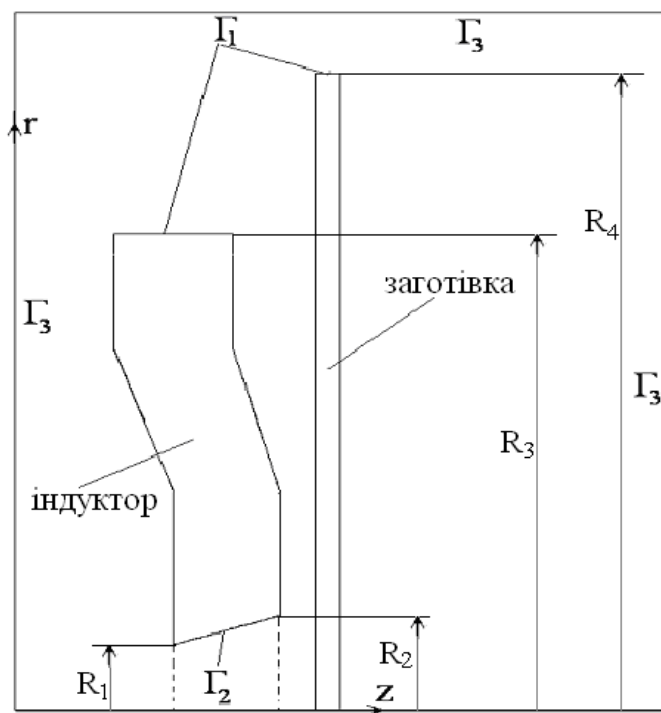


Рис. 2. Розрахункова схема системи «індуктор – заготовка»

Експериментальні дослідження показують, що втрата працездатності систем МІОМ відбувається внаслідок: пластичного деформування індуктора зі значними ступенями залишкових деформацій, миттєвого руйнування індуктора (при першому ж імпульсі поля), руйнування після $\sim 10^2$ повторюваних імпульсів поля, руйнування після $\sim 10^6$ повторюваних імпульсів поля. Останній тип руйнування для досліджень великого інтересу не становить, оскільки в цьому випадку технологічна система, найчастіше, виконує своє призначення в повному обсязі. У перших трьох зазначених випадках, очевидно при першому ж навантаженні індуктора (при першому імпульсі поля), у його матеріалі виникають зони

пластичних деформацій. Тому параметри зовнішнього впливу повинні бути обраними так, щоб електромагнітні сили, які виникають в індукторі, не призводили до виникнення пластичних деформацій. З іншого боку, ефективність технологічної операції при МІОМ у першу чергу визначається досягненням певного рівня пластичних деформацій заготовки. Найчастіше це досягається в процесі повторюваного впливу на заготовку, проте, якщо ми досягнемо пластичних деформацій у заготовці на стадії першого імпульсу (що можна аналізувати у квазістаціонарній постановці), то це певною мірою призведе до «успіху» технологічної операції.

Для розрахункової схеми (рис. 2) було проведено розрахунки розподілу компонент ЕМП в індукторі та заготовці, одержані просторово-часові залежності для напруженості та індукції магнітного поля. Для пікових значень компонент ЕМП проведені розрахунки НДС системи «індуктор – заготовка» у квазістаціонарній постановці. Далі проаналізована залежність максимальних інтенсивностей напружень в індукторі та заготовці від максимальної величини напруженості магнітного поля індуктора. Розрахунки проводились для різних значень амплітуди струму індуктора (10кА, 15кА, 20кА, 25кА). На наступному рисунку наведені відповідні графіки.

З рисунку видно, що максимальна величина інтенсивності в індукторі (матеріал – мідь) швидше перевищує межу текучості, ніж у заготовці (матеріал – сталь). Це пов'язано з тим, що джерело ЕМП знаходиться безпосередньо в індукторі. Розгляд залежності максимальної інтенсивності напружень в індукторі від величини сили струму дозволяє визначити параметри зовнішнього впливу, за яких індуктор залишається працездатним.

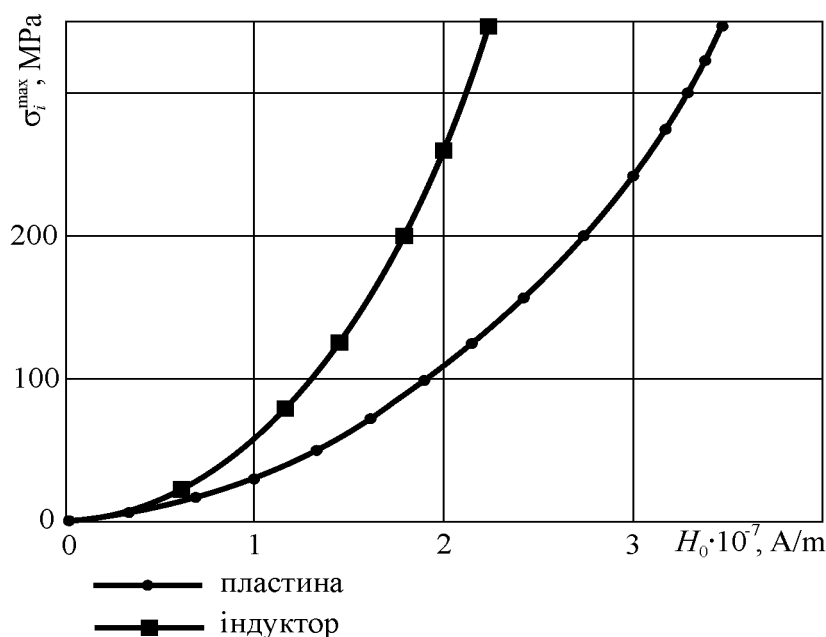


Рис. 3. Залежність максимальної інтенсивності напруження в індукторі та заготовці від величини максимальної напруженості магнітного поля в індукторі

4. ВИСНОВКИ

Надано загальну математичну постановку задачі аналізу пружно-пластичного деформування складених електропровідних тіл за умови дії електромагнітного поля. Зв'язаність електромагнітного поля та полів механічних напружень та деформацій обумовлюється електромагнітними силами, які введено в диференціальні рівняння рівноваги. Як чисельний метод розв'язання обрано метод скінчених елементів, який базується на виконанні принципу мінімуму повної енергії системи. За допомогою запропонованого методу розрахунку проаналізовано деформування системи «індуктор – заготовка» однієї з технологічних операцій магнітно-імпульсної обробки матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Truesdell C. The classical field theories / C. Truesdell, R. Toupin. S. Flügge (editor) // Handbuch der Physik, Vol. III/1. – Berlin : Springer, 1960. – P. 226-793.
2. Подстригач Я. С. Дифференциальные уравнения теории диффузии деформированного твердого тела / Я.С. Подстригач // Докл. Акад. наук Укр. – 1963. – №3. – С. 336-340.
3. Седов Л. И. Математические методы для создания новых моделей сплошной среды / Л.И. Седов // Усп. мат. наук. – 1965. – 20, №5. – С. 121-180.
4. Eringen C. Mechanics of Continuum / C. Eringen. – New York : Wiley, 1967.
5. Подстригач Я. С. Некоторые особенности создания моделей механики твердого тела с учетом электронных процессов / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак // Докл. Акад. наук Укр. – 1970. – №12. – С 18-31.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды : Том 2 / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1976.
7. Амбарцумян С. А. Магнитоупругость оболочек и пластин / С.А. Амбарцумян, Г.Е. Багдасарян, М.В. Белубекян. – М. : Наука, 1977.
8. Илюшин А. А. Механика сплошной среды / А.А. Илюшин. – М. : Московский университет, 1978.
9. Maugin C. A. Electromagnetic internal variables in electromagnetic continua / C.A. Maugin // Arch. Mech. – 1981. – 33, No.1. – P. 927-936.
10. Nowacki W. Efekty Elektromagnetyczne w Stałych Ciałach Odkształcalnych / W. Nowacki. – Warsaw : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.
11. Eringen A. C. Electrodynamics of Continua : Vol. 2 / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York : Springer, 1989.
12. Maugin G. A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids / G.A. Maugin. – New York : Elsevier, 1988.
13. Hutter K. Field-Matter Interaction in Thermoelastic Solids / K. Hutter, A.A. Van de Ven // Lecture Notes in Physics, Vol. 88. – Berlin : Springer, 1978.
14. Knopoff L. The interactions between elastic waves motions and a magnetic field in electric conductor / L. Knopoff // J. Geophys. – 1955. – Res. 60. – P. 441-456.
15. Chadwick P. Elastic wave propagation in a magnetic field / P. Chadwick // Actes IX Congr. Intern. Mech. Appl. – Bruxelles : Univ. Bruxelles, 1957. – Vol. 7. – P. 143-158.
16. Kaliski S. Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field / S. Kaliski, J. Petykiewicz // Proc. Vibr. Probl. – 1960. – 1, No.3. – P. 81-94.
17. Dunkin J. W. Propagation of waves in an electromagnetic elastic solid / J.W. Dunkin and A.C. Eringen // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – 1. – P. 461-495.
18. Подстригач Я. С. Магнитотермоупругость проводящих тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, В.Ф. Кондрат. – К. : Наукова думка, 1982.
19. Кондрат В. Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси / В. Кондрат, О. Грицина, // ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 69-83.
20. Гачкевич О. Р. Несуча здатність електропровідних елементів канонічної форми за дії електромагнітних імпульсів / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – Львів, 2010. – Том 46, №4. – С. 92-97.
21. Ren Z. Calculation of local magnetic forces in magnetized materials / Z. Ren, M. Besbes, S. Boukhtache // Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields. – 1992. – P. 64.1-64.6.

REFERENCES

1. Truesdell, C. and Toupin, R. (1960), "The classical field theories", *Handbuch der Physik*, vol. III/1, pp. 226-793.
2. Podstrigach, Ya.S. (1963), "Diferencial'nye uravneniya teorii diffuzii deformirovannogo tela", *Dokl. Akad. Nauk Ukr.*, no. 3, pp. 336-340.
3. Sedov, L.I. (1965), "Matematicheskie metody dlya sozdaniya novykh modelej sploshnoj sredy", *Usp. Mat. Nauk*, 20, no. 5, pp. 121-180.
4. Eringen, C. (1967), *Mechanics of Continuum*, Wiley, New York.
5. Podstrigach, Ya.S. and Burak, Ya.I. (1970), "Some features of creation of models of mechanics of solid taking into account electronic processes", *Dokl. Akad. Nauk Ukr.*, no. 12, pp. 18-31.
6. Sedov, L.I. (1976), *Mekhanika sploshnoj sredy* [Mechanics of continuous environment], vol. 2, Nauka, Moscow.
7. Ambratcumyan, S.A., Bagdasaryan, G.E. and Belubekyan, M.V. (1977), *Magnitoprugost' obolochek i plastin* [Magnetoelasticity of shells and plastins], Nauka. Moscow.
8. Ilyushin, A.A. (1977) *Mekhanika sploshnoj sredy* [Mechanics of continuous environment], Moskovskij universitet. Moscow.
9. Maugin, C.A. (1981), "Electromagnetic internal variables in electromagnetic continua", *Arch. Mech.*, 33, no. 1, pp. 927-936.
10. Nowacki, W. (1983), "Efekty Elektromagnetyczne w Stałych Ciałach Odkształcalnych", *Państwowe Wydawnictwo Naukowe*, Warsaw.
11. Eringen, A.C. and Maugin, G.A. (1989), "Electrodynamics of Continua", vol. 2, Springer, New York.
12. Maugin, G.A. (1988), "Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids", Elsevier, New York.
13. Hutter, K. and van de Ven, A.A. (1978), "Field-Matter Interaction in Thermoelastic Solids", *Lecture Notes in Physics*, vol. 88, Springer, Berlin.
14. Knopoff, L. (1955), "The interactions between elastic waves motions and a magnetic field in electric conductor", *J. Geophys.*, res. 60, pp. 441-456.
15. Chadwick, P. (1957), "Elastic wave propagation in a magnetic field", *Actes IX Congr. Intern. Mech. Appl.*, vol. 7, pp. 143-158.
16. Kaliski, S. and Petykiewicz, J. (1960), "Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field", *Proc. Vibr. Probl.*, 1, no. 3, pp. 81-94.
17. Dunkin, J.W. and Eringen, A.C. (1963), "Propagation of waves in an electromagnetic elastic solid", *Int. J. Eng. Sci.*, 1, pp. 461-495.
18. Podstrigach, Ya.S., Burak, Ya.I. and Kondrat, V.F. (1982), *Magnitotermoprugost' elektroprovodnykh tel* [Magnetothermoelasticity of conducting bodies], Naukova dumka. Kiev.
19. Kondrat, V. and Ghrycyna, O. (2008) "Rivnyannya elektromagnitotermomekhaniki polarizovanykh neferomagnetnykh til za vrakhuvannya lokal'nogo zmishennya masy", ISSN 1816-1545 *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informacijni technologii*, issue 8, pp. 69-83.
20. Ghachkevich, O.R. and Musij, R.S. (2010), "Nesucha zdatnist' elektroprovodnykh elementiv kanonichnoi formy za dii elektromagnetnykh impul'siv", *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, vol. 46, no. 4, pp. 92-97.
21. Ren, Z., Besbes, M. and Boukhtache, S. (1992), "Calculation of local magnetic forces in magnetized materials", *Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields*, pp. 64.1-64.6.

УДК 534

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

Михлин Ю. В., д. ф.-м. н., профессор, Клименко А. А., Плаксий Е. Ю., аспирант

Национальный технический университет «ХПИ»,

ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

muv@kpi.kharkov.ua

Рассматриваются резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, где наблюдается взаимодействие источника энергии и упругой подсистемы, что может приводить к возникновению больших резонансных колебаний такой подсистемы. Система содержит нелинейный гаситель колебаний, который позволяет существенно уменьшить амплитуды упругих резонансных колебаний. Взаимодействие нелинейных форм колебаний в резонансе анализируется с использованием метода многих масштабов и перехода к редуцированной системе, которая записывается относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд колебаний и разности фаз. Выделены так называемые «переходные формы колебаний», которые существуют только при некотором значении энергии системы. Локализация колебаний обсуждается.

Ключевые слова: система с ограниченным возбуждением, резонансные колебания, локализация колебаний

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМІ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ, ЩО МІСТИТЬ ГАСИТЕЛЬ КОЛИВАНЬ

Міхлін Ю. В., д. ф.-м. н., професор, Клименко А. О., Плаксіє К. Ю., аспірант

Національний технічний університет «ХПІ»,

вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна

muv@kpi.kharkov.ua

Розглядаються резонансні коливання в системі з обмеженим збудженням, де спостерігається взаємодія джерела енергії та пружної підсистеми, що може призвести до виникнення великих резонансних коливань такої підсистеми. Система містить нелінійний гаситель коливань, який дозволяє суттєво зменшити амплітуди пружних резонансних коливань. Взаємодія нелінійних форм коливань в резонансі аналізується з використанням методу багатьох масштабів та переходу до редукованої системи, яка формується відносно енергії системи, арктангенсу відношенню амплітуд коливань та різниці фаз. Виділено так звані «перехідні форми коливань», які існують лише при деяких значеннях енергії системи. Локалізація коливань обговорюється.

Ключові слова: система з обмеженим збудженням, резонансні коливання, локалізація коливань

RESONANCE VIBRATIONS IN A SYSTEM CONTAINING VIBRATION ABSORBER

Mikhlin Yu. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Klimenko A. A.,

Plakсий K. Yu., Graduate Student

National Technical University «KhPI»,

21, Frunze str., Kharkiv, Ukraine

muv@kpi.kharkov.ua

Resonance vibrations in the system with limited power supply are considered. In this system an interaction of the energy source and the elastic subsystem which is under the energy source can be observed. It gives large amplitude resonance vibrations of the elastic subsystem (the Zommerfeld effect). The system under consideration contains the nonlinear vibration absorber. Frequency responses of the system are constructed by the harmonic balance method. It is obtained that the nonlinear absorber permits to reduce essentially amplitudes of resonance vibrations of the elastic subsystem. It is shown that the system parameters can be chosen so that the system will not be situated in the first resonance region where the largest vibration amplitudes are observed.

Interaction of nonlinear vibration modes near the resonance in the dissipative system with limited power supply is analyzed by the multiple scale method and by transformation to the “so-called” reduced system stated with respect to the system energy, the arctangent of vibration amplitudes ratio and the difference of phases of the solution. Resonances on different fundamental frequencies are considered. A transfer of the vibration energy to the stable localized nonlinear modes is observed and discussed. The transient nonlinear modes of coupled vibrations, existing only for some determined level of the dissipative system energy, are identified. In vicinity of time, corresponding to this energy level, the system motions are close to the transient vibration modes; then, when the energy decreases, the system motions tend to other stable vibration mode. Localization of vibrations on nonlinear modes corresponding to some fundamental frequencies is discussed.

Key words: system with limited power supply, resonance vibrations, localization of vibrations

ВВЕДЕНИЕ

Система с ограниченным возбуждением характеризуется взаимодействием источника энергии и упругой подсистемы, которая находится под действием этого источника энергии (такие системы называют также неидеальными системами). Одним из наиболее интересных эффектов, проявляющимся в системах с ограниченным возбуждением, является так называемый эффект Зоммерфельда [1], когда в упругой подсистеме возникает устойчивый резонансный режим с большими амплитудами, и значительная часть энергии колебаний переходит из источника энергии в эти резонансные колебания. Динамика систем с ограниченным возбуждением в резонансе была впервые аналитически описана В.О. Кононенко [2]. Позднее исследования динамики неидеальных систем были изложены в различных публикациях, в частности, в статьях [3, 4]. Известно, что использование динамических гасителей колебаний позволяет существенно уменьшить амплитуды резонансных колебаний. В данной статье рассмотрена неидеальная диссипативная система с маятниковым гасителем колебаний. Используются метод гармонического баланса и метод многих масштабов [3]. Учет диссипации позволяет проанализировать взаимодействие упругой подсистемы и источника энергии, оценить уменьшение амплитуды колебаний в резонансе благодаря использованию маятникового гасителя колебаний, а также выделить такие параметры системы, когда удастся избежать возникновения режима значительных резонансных колебаний. Резонансное поведение неидеальной системы, содержащей нелинейный гаситель колебаний, изучается также путем перехода к так называемой «редуцированной системе», которая записывается относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз. Анализируется взаимодействие нелинейных нормальных форм колебаний (ННФ) [5, 6], появление так называемых «переходных форм колебаний», которые существуют только при определенном значении энергии системы, а также переход к устойчивой локализованной форме колебаний.

1. СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩАЯ МАЯТНИКОВЫЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается модель, которая представлена на рис. 1. Здесь двигатель D оказывает влияние на упругую подсистему с массой M посредством кривошипа радиуса r . К упругой подсистеме прикреплен виброгаситель с массой m .

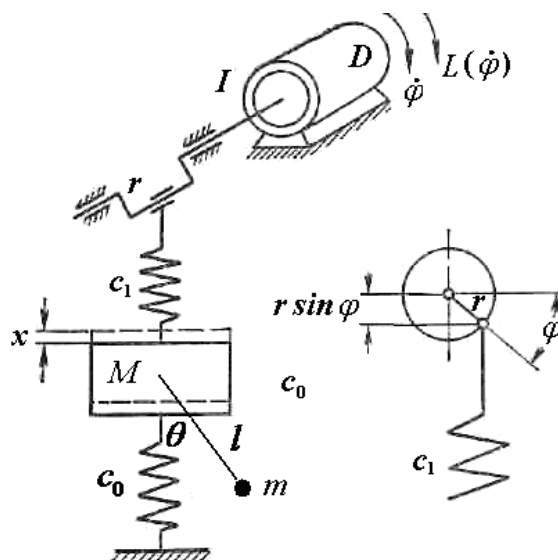


Рис. 1. Система с ограниченным возбуждением и маятниковым гасителем колебаний

Уравнения движения такой системы имеют следующий вид (здесь использовано разложение функций $\cos \theta$ и $\sin \theta$ в ряд Тейлора, причем удержаны слагаемые до третьей степени включительно):

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \varepsilon m) \ddot{x} + (c_0 + c_1) x = c_1 r \sin \varphi - \varepsilon m l \left(\ddot{\theta} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) - \theta \dot{\theta}^2 \right); \\ I \ddot{\varphi} = \varepsilon (a - b \dot{\varphi} + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi); \\ \varepsilon m l \left(l \ddot{\theta} + g \theta + \ddot{x} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где I – момент инерции вращающихся масс; $(c_0 + c_1)$ – жесткость упругой колебательной подсистемы с массой M ; $L = a - b\dot{\varphi}$ – движущий момент источника энергии (характеристика двигателя). Из уравнений (1) ясно, что момент $c_1 r x \cos \varphi$ определяет нагрузку на двигатель, которая определяется колебаниями упругой подсистемы. Малый параметр ε характеризует малость массы гасителя, а также малость амплитуд осцилляционных составляющих в законе изменения угловой скорости от времени по сравнению с постоянной составляющей угловой скорости.

2. ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для построения амплитудно-частотных характеристик на первом этапе отбрасываются малые осцилляционные составляющие в законе изменения угловой скорости. Используется метод гармонического баланса, в соответствии с которым представим $x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$; $\theta = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$. Для определения коэффициентов A_i , B_i получена система алгебраических уравнений. На рис. 2. изображены амплитудно-частотные кривые как для системы без гасителя колебаний (рис. 2, а), так и для системы с виброгасителем (2, б). Расчет проводился при следующих параметрах системы: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,01$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,1$; $l = 1$; $a = 5$; $b = 2$.

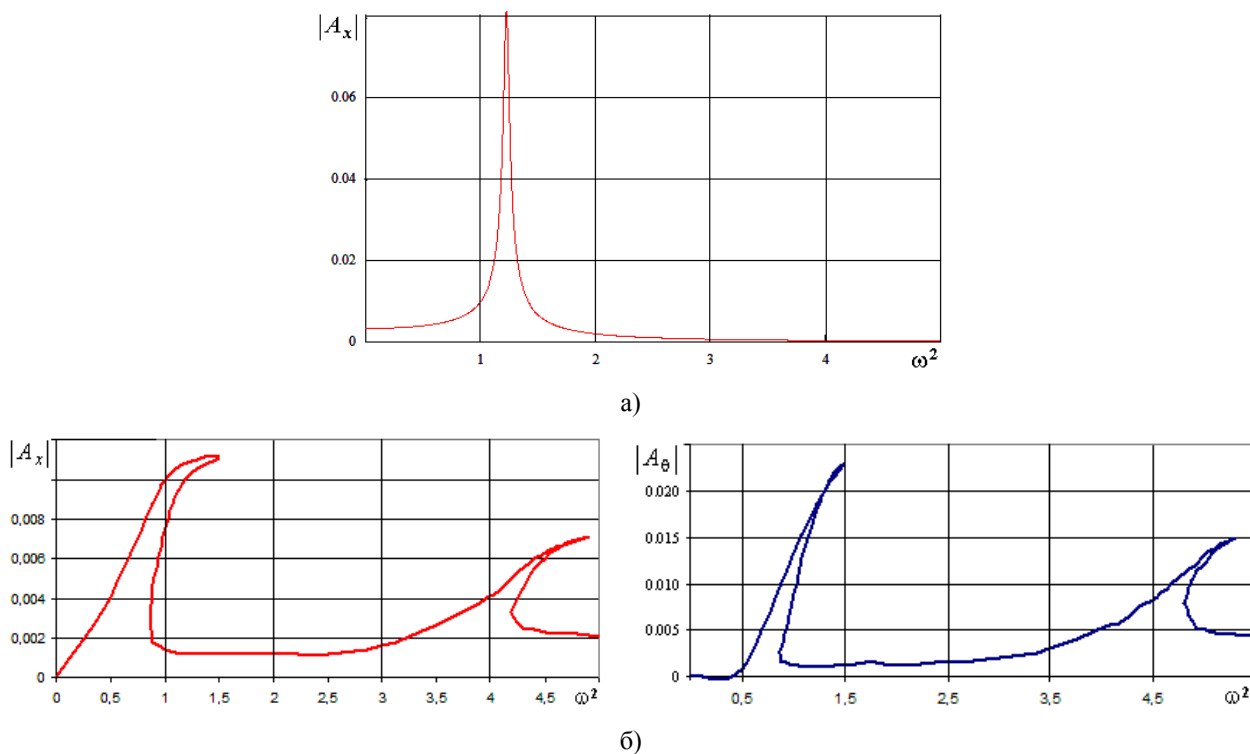


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики неидеальной системы: а) без гасителя; б) с виброгасителем

Очевидно, что наличие маятникового гасителя колебаний приводит к уменьшению в несколько раз амплитуд колебаний упругой подсистемы.

Для уточнения закона изменения угловой скорости с учетом малых осцилляционных слагаемых во втором уравнении системы (1) используется метод многих масштабов [3], в соответствии с которым вводятся разложения

$$x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad \varphi(t, \varepsilon) = \varphi(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad \theta(t, \varepsilon) = \theta(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad (2)$$

где $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, ...; кроме того,

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots; \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots; \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \quad (3)$$

Для дальнейших расчетов вводится следующая замена переменных: $x_0 = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = \tilde{A} \sin(\omega t + \phi)$, где новые переменные $\tilde{A}$ и ϕ являются медленно изменяющимися функциями времени. В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) из второго уравнения системы (1) получаем, что $\varphi_0 = \omega(T_1)T_0$. Уравнение первого приближения для переменной φ имеет следующий вид:

$$I \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + 2I \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_1} - a + b \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} - c_1 r (x_0 - r \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 = 0. \quad (4)$$

Условие отсутствия секулярных членов приводит к следующей зависимости $\tilde{A}^2$ от ω :

$$\tilde{A}^2 = \frac{3I}{2\beta} \omega - \frac{a\sqrt{c_0}}{\beta\sqrt{M}} - C e^{\frac{3\sqrt{c_0}}{4\sqrt{M}} T_1}. \quad (5)$$

Таким образом, $\tilde{A}^2$ зависит от медленно меняющейся переменной T_1 . На рис. 3 изображены различные случаи расположения графиков кривых L (характеристики источника энергии), отвечающих зависимости (5), где вычисления проводились для достаточно больших значений времени и амплитудно-частотных характеристик системы. Подбором параметров a и b можно добиться того, чтобы график L не пересекался с амплитудно-частотной кривой на частоте первого резонанса, где амплитуды колебаний наиболее велики (рис. 3, б). В случае, изображенном на рис. 3, а, расчет проводился для следующих параметров системы: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,001$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 0,5$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,5$; $l = 1$; $a = 2$; $b = 2$. Для построения графиков, изображенных на рис. 3, б, расчет проводился при следующих параметрах: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,03$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,1$; $l = 1$; $a = 4,5$; $b = 2$.

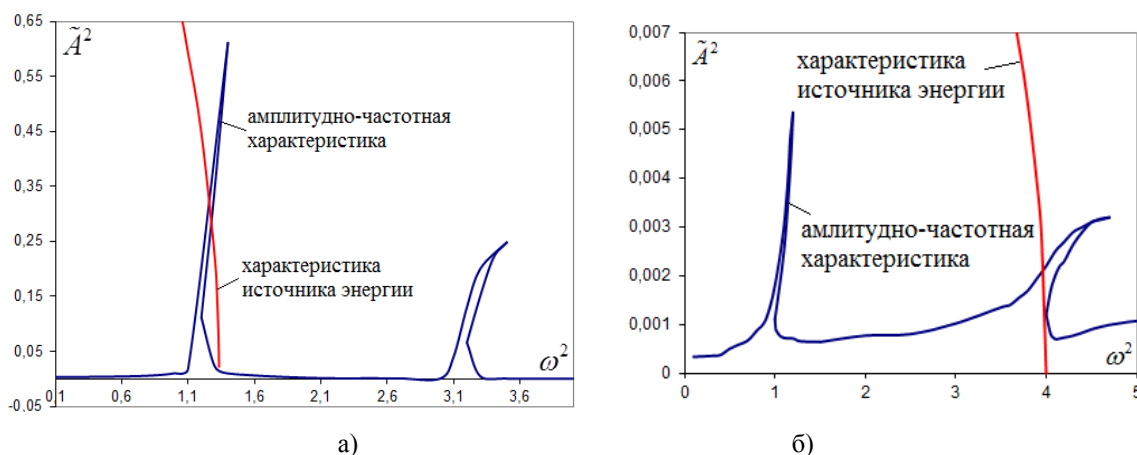


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики и характеристики источника энергии

3. ДИНАМИКА НЕИДЕАЛЬНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим теперь более детально динамику диссипативной неидеальной системы, содержащей нелинейный гаситель колебаний в виде осциллятора с кубической нелинейностью, в окрестности резонанса. Сделан переход к обобщенным координатам z_1, z_2 , которые отвечают фундаментальным частотам упругой подсистемы и гасителя. Затем применяется метод многих масштабов, то есть, использование разложений вида (2) и (3).

Вводятся также следующие последовательные замены переменных: $\varphi_0 = \Omega T_0$;

$$\begin{cases} z_{10} = C_1 e^{i\Omega T_0} + \bar{C}_1 e^{-i\Omega T_0}, \\ z_{20} = C_2 e^{i\omega_2 T_0} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_2 T_0}; \end{cases} \quad C_1 = a_1 e^{ib_1}, \quad C_2 = a_2 e^{ib_2}; \quad a_1 = K \sin \psi, \quad a_2 = K \cos \psi. \text{ В результате мы}$$

приходим к так называемой «редуцированной системе» [7-9], которая для случая резонанса на первой собственной частоте имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial T_1} = \frac{1}{2} (\bar{A} + \bar{B}\Omega + \bar{C}K \sin \psi \cos b_1); \\ \frac{\partial K}{\partial T_1} = \frac{L\Omega - \bar{A} - \bar{B}\Omega}{2\Omega} K \sin^2 \psi + \frac{S}{2\omega_2} K \cos^2 \psi - \left(\frac{\bar{C}}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{N}{2\Omega} \right) \cos b_1 \sin \psi; \\ \frac{\partial \psi}{\partial T_1} = \left(\frac{L\Omega - \bar{A} - \bar{B}\Omega}{2\Omega} - \frac{S}{2\omega_2} \right) \sin \psi \cos \psi - \left(\frac{\bar{C}}{2\Omega} K \sin^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K} \right) \cos \psi \cos b_1; \\ \frac{\partial b_1}{\partial T_1} = -\frac{\Delta + \Omega T_0 (\bar{A} + \bar{B}\Omega)}{2\Omega} - \frac{T_0 \bar{C}}{2} K \sin \psi \cos b_1 + \frac{M}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1; \\ \frac{\partial b_2}{\partial T_1} = -\frac{R}{2\omega_2} K^2 \cos^2 \psi - \frac{T}{2\omega_2} K^2 \sin^2 \psi, \end{cases} \quad (6)$$

где Ω – изменяющаяся во времени частота вращения ротора; K – энергия диссипативной системы, также изменяющаяся во времени; ψ – арктангенс отношения амплитуд, отвечающих колебаниям с фундаментальными частотами упругой подсистемы и гасителя; b_1, b_2 – фазы тех же колебаний. Уравнение относительно разности фаз $\xi = b_1 - b_2$ записывается таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial T_1} = & -\frac{\Delta + \Omega T_0 (\bar{A} + \bar{B}\Omega)}{2\Omega} + \left(\frac{M}{2\Omega} + \frac{T}{2\omega_2} \right) K^2 \sin^2 \psi + \left(\frac{P}{2\Omega} + \frac{R}{2\omega_2} \right) K^2 \cos^2 \psi + \\ & + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1 - \frac{T_0 \bar{C}}{2} K \sin \psi \cos b_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Все коэффициенты в последних уравнениях зависят от параметров рассматриваемой системы. С использованием уравнений (6)-(7) рассматривается взаимодействие нормальных форм колебаний, перекачка энергии из неустойчивых форм в устойчивые, возможность локализации энергии колебаний.

В частности, на рис. 4 представлены результаты интегрирования уравнений (6) и (7) методом Рунге-Кутты, когда начальные условия изменяются на интервале $0 \leq \psi(0) \leq \pi/2$ и выбраны следующие значения параметров системы: $K(0) = 0,1$, $c_0 = 1$ Н/м, $c_1 = 1$ Н/м, $c_2 = 0,2$ Н/м, $M = 1$ кг, $m = 0,05$ кг, $\beta = 0,05$, $\gamma = 0,3$ Н/м, $r = 0,05$ м, $\bar{A} = 0,115$, $\bar{B} = -0,08$, $\bar{C} = 0,01$ и $\Delta(0) = -0,5$. На рис. 4 показана зависимость $\xi(\psi)$.

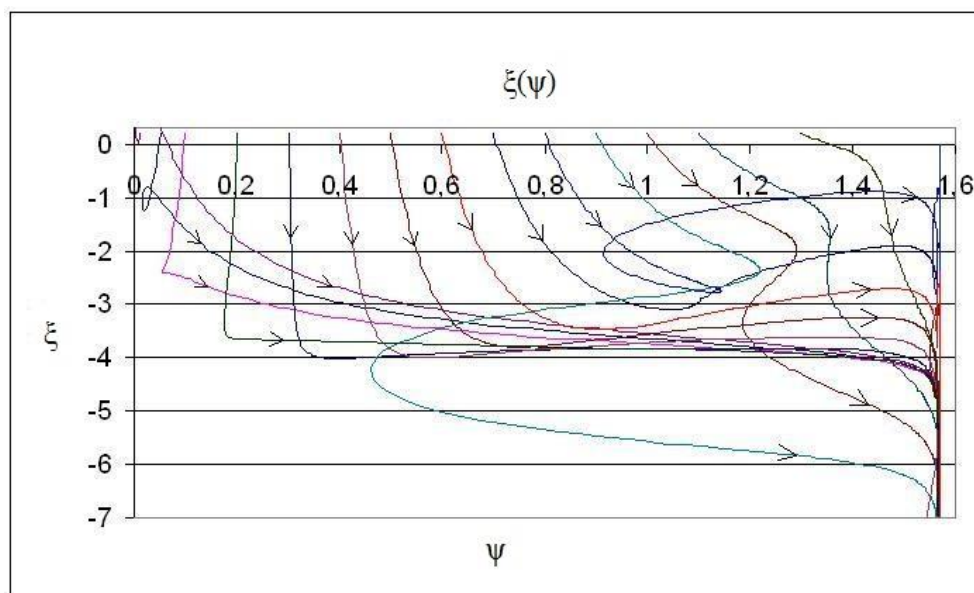


Рис. 4. Зависимость $\xi(\psi)$ для редуцированной системы

На этом рисунке видно, что траектории не остаются вблизи прямой линии $\psi = 0$, отвечающей локализации энергии на обобщенной координате z_2 , и приближаются с течением времени к линии $\psi = \frac{\pi}{2}$, отвечающей локализации энергии на обобщенной координате z_1 . Таким образом, именно локализованные на z_1 колебания устойчивы вблизи резонанса, а колебания, локализованные на z_2 , теряют устойчивость. Некоторые траектории приближаются к равносостоянию редуцированной системы, отвечающему так называемой «переходной форме» связанных колебаний, которая существует только для определенного значения энергии [9]; они остаются вблизи этого положения равновесия и делают петлю вблизи него, пока это положение равновесия существует. С течением времени форма связанных колебаний перестает существовать, и движения системы стремятся к устойчивой в резонансе локализованной форме колебаний. Аналогичные результаты можно получить и в случае резонанса по второй фундаментальной частоте.

ВЫВОДЫ

Для исследования резонансной динамики диссипативной системы с ограниченным возбуждением, содержащей маятниковый виброгаситель, используются метод гармонического баланса и метод многих масштабов. Построены амплитудно-частотные характеристики системы. Показано, что маятниковый виброгаситель позволяет существенно уменьшить амплитуды резонансных колебаний упругой подсистемы. Показано также, что выбор параметров системы позволяет избежать попадания системы в первый резонанс, где амплитуды колебаний наиболее велики. Для более детального исследования поведения системы в резонансе использована методика приведения к так называемой редуцированной системе, которая представлена относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд собственных форм колебаний и фаз форм колебаний. Обнаружено, что, в частности, происходит переход энергии от неустойчивых колебаний к устойчивой форме колебаний, локализованных на одной из обобщенных координат. В то же время существует форма связанных колебаний (так называемая «переходная форма»), которая реализуется только при некотором фиксированном значении энергии. Некоторые траектории приближаются к этой переходной форме, а затем, когда эта форма перестает существовать, удаляются от нее и приближаются к устойчивой локализованной форме колебаний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sommerfeld A. Beiträge Zum Dynamischen Ausbau Der Festigkeitslehe / A. Sommerfeld // *Physikal Zeitschr.* – 1902. – Vol. 3. – P. 266-286.
2. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В.О. Кононенко. – М. : Наука, 1985. – 254 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А.Х. Найфэ. – М. : Мир, 1973. – 454 с.
4. Balthazar J. M. An overview on non-ideal vibrations / J.M. Balthazar, D.T. Mook, H.I. Weber, R.M.L.R.F. Brasil, A. Fenili, D. Belato, J.L.P. Felix // *Meccanica.* – 2003. – Vol. 38(6). – P. 613-621.
5. Vakakis A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. – New York : Wiley Interscience, 1996. – 552 p.
6. Mikhlin Yu. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Yu.V. Mikhlin, K.V. Avramov // *Applied Mechanics Review.* – 2010. – Vol. 63. – P. 4-20.
7. Wang F. Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System / F. Wang, A. Bajaj, K. Kamiya // *Purdue University.* – 2005. – 54 p.
8. Pilipchuk V. N. Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits / V.N. Pilipchuk. – Berlin : Springer-Verlag, 2010. – 364 p.
9. Plaksey K. Y. Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance / K.Y. Plaksey, Y.V. Mikhlin // *Journal of Sound and Vibration.* – 2015. – Vol. 334. – P. 319-337.

REFERENCES

1. Sommerfeld, A. (1902), "Beiträge Zum Dynamischen Ausbau Der Festigkeitslehe", *Physikal Zeitschr*, vol. 3, pp. 266-286.
2. Kononenko, V.O. (1985), *Kolebatelniye sistemi s ogranichennim vozbuzhdeniyem* [Oscillating systems with limited excitation], Nauka, Moskow.
3. Nayfe, A.Kh. (1973), *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods], Mir, Moskow.
4. Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D. and Felix J.L.P. (2003), "An overview on non-ideal vibrations", *Meccanica*, vol. 38(6), pp. 613-621.
5. Vakakis, A., Manevitch, L., Mikhlin, Yu., Pilipchuk, V. and Zevin, A. (1996), "Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems", Wiley Interscience, New York, USA.
6. Mikhlin, Yu.V. and Avramov, K.V. (2010), "Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments", *Applied Mechanics Review*, vol. 63, pp. 4-20.
7. Wang, F., Bajaj, A. and Kamiya, K. (2005), "Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System", *Purdue University*.
8. Pilipchuk, V.N. (2010), "Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits", Springer-Verlag, Berlin.
9. Plaksey, K.Y. and Mikhlin, Y.V. (2015), "Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 334, pp. 319-337.

УДК 629.76/.78:331.361

ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛИСТОВ КОСМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ УКРАИНЫ

Новиков А. В., Потапович Л. П.

*Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля»,
ул. Криворожская, 3, г. Днепропетровск, Украина*

info@yuzhnoye.com

Для дальнейшего развития ракетно-космической отрасли Украины и успешной реализации перспективных космических проектов, очень важным является построение эффективной системы подготовки инженерных кадров. В докладе анализируются существующие проблемы подготовки кадров для ракетно-космической отрасли в Украине и пути их решения. В частности, анализируется опыт и результаты взаимодействия предприятий промышленности и университетов по подготовке специалистов для ракетной промышленности по схеме непрерывного космического образования. Рассматриваются возможности модернизации аэрокосмического образования через международное сотрудничество промышленных предприятий и университетов в рамках проектов по Европейским программам TEMPUS и ERASMUS+. Развитие сотрудничества университетов и предприятий промышленности способствует повышению качества подготовки кадров и обеспечению высокого научно-технического уровня разработок ракетно-космической техники.

Ключевые слова: инженерное образование, подготовка кадров, система непрерывного образования.

ПРОБЛЕМИ ТА ШЛЯХИ ВДОСКОНАЛЕННЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ОСВІТИ СПЕЦІАЛІСТІВ КОСМІЧНОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ УКРАЇНИ

Новиков О. В., Потапович Л. П.

*Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»,
вул. Криворізька, 3, м. Дніпропетровськ, Україна*

info@yuzhnoye.com

Для подальшого розвитку ракетно-космічної галузі України та успішної реалізації перспективних космічних проектів, дуже важливим є побудова ефективної системи підготовки інженерних кадрів. У доповіді аналізуються наявні проблеми підготовки кадрів для ракетно-космічної галузі в Україні та шляхи їх вирішення. Зокрема, аналізується досвід і результати взаємодії підприємств промисловості та університетів з підготовки спеціалістів для ракетної промисловості за схемою безперервної космічної освіти. Розглядаються можливості модернізації аерокосмічної освіти через міжнародне співробітництво промислових підприємств та університетів в рамках проектів за Європейськими програмами TEMPUS і ERASMUS+. Розвиток співробітництва університетів і підприємств промисловості сприяє підвищенню якості підготовки кадрів і забезпеченню високого науково-технічного рівня розробок ракетно-космічної галузі.

Ключові слова: інженерна освіта, підготовка кадрів, система безперервної освіти.

PROBLEMS AND MEANS FOR IMPROVEMENT OF ENGINEERING EDUCATION FOR SPECIALISTS OF UKRAINE'S SPACE INDUSTRY

Novykov O. V., Potapovych L. P.

*Yuzhnoye State Design Office,
3, Krivorozhskaya St., Dnipropetrovsk, Ukraine*

info@yuzhnoye.com

Yuzhnoye state design office is a key company of Ukraine's aerospace industry, which creates launch vehicles, spacecrafts, rocket engines and some other advanced technology products. Realization of all these developments is impossible without highly skilled specialists.

There was a system of the aerospace industry staffing in the Soviet Union; this system successfully operated in conditions of state-planned economy. Under new conditions of economic and social development of Ukraine as a space power, there is occurred a need for new concept of solving the problem of providing the aerospace industry with highly qualified engineers and scientists, improving efficiency of the engineering educational system.

Global strategy for this problem resolving consists in joining of schools', universities', research institutes' and industry companies' efforts to early discover the ablest pupils and involve them in system of specialists training for aerospace industry in accordance with continuous educational scheme: school – university – company.

Forms of cooperation of higher education and industry are constantly changing and improving. A number of brunches of academic departments of Dnipropetrovsk National University and department of Kharkiv National Aerospace University "KHAI" are currently operating at Yuzhnoye SDO. Scientists and specialists of YSDO are teaching senior students of DNU and KHAI at these academic departments. Teachers from Yuzhnoye SDO in addition to good theoretical training have great practical experience of designing, construction and experimental verification of rocket and space technologies, while full-time university teachers usually do not have such experience. As a result, students learn advanced technologies and adapt to the enterprise operating conditions. This facilitates inflow of talented young people into industry and research centers, improves quality of engineering education and helps young specialists to stay at the enterprise.

To improve human resource development as well as to methodize, keep and increase methodological backlog preparation and publication of monographs, textbooks, manuals and courses by main directions of Yuzhnoye's activity are organized in the frame of departments' brunches' activity on the base of Yuzhnoye's Space-Rocket Educational Research Center.

There are also constantly growing requirements in specialists well informed about the latest developments of information technology with foreign language proficiency at Yuzhnoye SDO. In the optimum students acquire this knowledge at university. But Yuzhnoye makes its best to organize corresponding training in the company.

One of directions of further improvement of the specialists training quality is the extension of international collaboration of universities and industrial enterprises for exchange of gathered experience, for cooperation in modernization of academic programs, formation of common strategy of training and employment of graduates of aerospace educational establishments. Yuzhnoye SDO cooperates with European, Russian and Ukrainian universities within the framework of European Union program TEMPUS. Yuzhnoye SDO participates in tempus program as a customer and expert in the development of study programs, shares its experience in the sphere of scientific and innovation activity with the universities.

The above-described methods of universities and enterprises cooperation allow finding solutions to problem of providing with qualified personnel of enterprises of such knowledge intensive and high-technology industry as the aerospace industry.

Key words: engineering education, personnel training, continuous education system.

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля» – головная организация ракетно-космической отрасли Украины и одна из крупнейших в мире организаций по разработке ракетно-космической техники. В настоящее время КБ «Южное» активно участвует в реализации крупных международных космических проектов, таких как «Морской старт», «Наземный старт», «Днепр», «Циклон-4», «Вега», «Антарес» и других в кооперации с ведущими корпорациями США, России, Норвегии, Бразилии, Италии.

Для разработки такой сложной техники, как ракетно-космическая, необходимы специалисты высокой квалификации. В Советском Союзе существовала система кадрового обеспечения ракетно-космической отрасли, которая успешно функционировала в условиях государственного планового хозяйства. В частности, Днепропетровский ракетный центр, включающий КБ «Южное» и Южный машиностроительный завод, комплектовался лучшими представителями ведущих научных школ СССР – выпускниками Московского авиационного института, Московского высшего технического училища им. Баумана, Московского университета, Ленинградского военно-механического института, Харьковского авиационного института, Казанского авиационного института и многих других высших учебных заведений. Одновременно, в составе Днепропетровского университета в начале 50-х годов был создан физико-технический факультет для подготовки на месте инженеров и учёных для ракетной промышленности, выпустивший за 50 лет более 20 тысяч специалистов.

В рамках независимой Украины круг учебных заведений, поставляющих кадры для ракетно-космической отрасли, резко сузился, в основном это Днепропетровский национальный университет, Харьковский авиационный институт, Киевский политехнический институт. В новых условиях экономического и социального развития Украины, как космической державы, появилась необходимость нового подхода к решению задачи обеспечения ракетно-космической отрасли высококвалифицированными инженерами и учёными, повышения эффективности системы инженерного образования.

Основные кадровые проблемы ракетно-космической отрасли сегодня заключаются в следующем:

- старение кадрового состава предприятий, уменьшение прослойки специалистов в возрасте 30-45 лет, что приводит к нарушению преемственности поколений, ослаблению или утрате научных школ, создававшихся десятилетиями;
- непрестижность инженерного труда среди молодежи, что создает значительные трудности в привлечении и закреплении на предприятии перспективных молодых специалистов;
- снижение уровня подготовки в общеобразовательных школах и колледжах, что создает значительные трудности при подготовке специалистов для высокотехнологичных предприятий в вузах;
- недостаточное участие научно-исследовательских институтов и промышленных предприятий в подготовке специалистов;
- недостаточное участие профессорско-преподавательского состава вузов, аспирантов, студентов в решении актуальных научно-технических проблем предприятий;
- отсутствие юридической базы и механизма распределения на предприятия молодых специалистов, получивших образование за счет государственного бюджета.

Общая стратегия решения этих проблем заключается в том, чтобы объединить усилия средней школы, высших учебных заведений, научно-исследовательских институтов и предприятий промышленности для раннего выявления наиболее способных учеников и вовлечения их в систему подготовки специалистов для ракетно-космической отрасли по схеме непрерывного образования: школа – ВУЗ – предприятие.

Очень важным звеном в построении системы непрерывного образования является сотрудничество промышленности и высших учебных заведений в области подготовки специалистов. Удачным примером такого сотрудничества является взаимодействие в течение многих лет КБ «Южное», Южного машиностроительного завода и Днепропетровского национального университета, когда ученые и специалисты промышленности активно участвуют в учебном процессе, а преподаватели и студенты – в решении актуальных научно-технических проблем. Подобная интегрированная система подготовки специалистов дает возможность наиболее рационально сочетать университетское техническое образование с отраслевой наукой и производством.

Формы сотрудничества высшей школы и промышленности непрерывно изменяются и совершенствуются. В настоящее время на базе Ракетно-космического учебно-исследовательского центра (РКУИЦ) КБ «Южное» функционирует ряд филиалов кафедр Днепропетровского национального университета и кафедры Национального аэрокосмического университета «Харьковский авиационный институт». На этих кафедрах учеными и специалистами КБ и завода ведется обучение студентов старших курсов ДНУ и ХАИ. Преподаватели КБ «Южное» помимо хорошей теоретической подготовки владеют богатым практическим опытом проектирования, конструирования и экспериментальной отработки ракетно-космической техники, чего обычно не хватает штатным преподавателям вузов. В результате студенты учатся передовым технологиям и адаптируются к условиям предприятия. Это способствует притоку талантливой молодежи в промышленность и научно-исследовательские центры, способствует повышению качества инженерного образования и закреплению молодых специалистов на предприятии.

Для улучшения подготовки специалистов, систематизации, сохранения и развития научно-методического задела ГП «КБ «Южное» в рамках деятельности филиалов кафедр на базе РКУИЦ организована подготовка и издание монографий, учебников, учебно-методических

пособий и курсов лекций по основным направлениям деятельности предприятия. К подготовке изданий привлекаются ведущие специалисты предприятия по таким направлениям, как проектирование космических ракетных комплексов, космических аппаратов и систем, ракетные двигатели, баллистика, аэродинамика, нагрузки и прочность ракетных конструкций, применяемые материалы и технологии изготовления изделий и др. В частности, опыт ГП «КБ «Южное» по разработке ракетно-космической техники отражен в монографиях [3-5], которые предназначены для специалистов по разработке ракетно-космической техники и студентов аэрокосмических вузов. Издана также книга «Проектирование, конструирование ракет, космических аппаратов и их систем. Учебные программы» [6], в которой представлены учебные программы подготовки и повышения квалификации специалистов, обучение по которым может быть реализовано на базе РКУИЦ или на территории слушателей.

В современных условиях одним из важнейших направлений инженерного образования является освоение передовых информационных технологий. Оптимально, если такими знаниями студенты овладевают, обучаясь в вузе. Для специалистов ГП КБ «Южное», не прошедших такую подготовку, на базе РКУИЦ организовано соответствующее обучение в рамках системы повышения квалификации. Например, в 2014 году такое обучение прошли 440 специалистов. Для этих целей в РКУИЦ существуют классы, оборудованные необходимой техникой. Для оптимизации процесса обучения внедрена также система дистанционного обучения, когда обучаемый через внутреннюю сеть предприятия слушает лекции и выполняет практические задания в удобное для него время на своем рабочем месте. К преподаванию привлекаются специалисты предприятия, прошедшие необходимую подготовку и постоянно повышающие свою квалификацию в лицензированных компаниях. Такая подготовка специалистов необходима для выполнения проектов по международным контрактам в соответствии с международными требованиями. В настоящее время на предприятии уже отработаны механизмы создания в рамках проектов Плана управления конфигурацией и данными, Деревя продукта и Деревя документации, декомпозиции работ (Work Breakdown Structure – WBS), рабочих пакетов и их описаний. Выполнен весь объем проектных и инженерных работ с использованием единой 3D модели и проведено электронное макетирование в среде Autodesk Inventor под управлением PDM (Product Data Management) системы или системы управления данными об изделии в среде Autodesk Vault Professional по ряду проектов. Выполнен пилотный проект «Создание и управление электронным макетом изделия с использованием CAD/CAE/CAM системы в среде NX и Teamcenter для космического аппарата «Микросат». CAD/CAE/CAM система (от computer-aided design, engineering and manufacturing) является комплексной системой автоматизации инженерных работ, которая предполагает автоматизированное проектирование, выпуск конструкторской документации и производство изделия. В данном случае использовались программные продукты NX и Teamcenter разработки компании Siemens PLM Software (Россия), которая специализируется на выпуске программного обеспечения для внедрения PLM (Product Lifecycle Management – управления жизненным циклом изделия) систем на промышленных предприятиях. В настоящее время рассматривается вопрос применения PLM для других проектов, разрабатываемых ГП КБ «Южное». Применение концепции PLM технологий в сложном многооперационном производстве, характерном для предприятий ракетно-космической отрасли является необходимым условием повышения конкурентоспособности выпускаемой продукции за счет повышения ее качества и снижению себестоимости.

Для эффективной реализации международных космических проектов очень важным является освоение опыта европейских и американских компаний по управлению проектами. Для руководителей и ведущих специалистов ГП «КБ «Южное» организовано обучение с привлечением компании Fuchs Management Training, которая специализируется на такой

тематике. По результатам обучения проводится анализ полученных знаний, составляется план мероприятий по адаптированной реализации европейского подхода к организации работ с учетом особенностей ГП «КБ «Южное» и накопленного опыта. Это будет способствовать лучшему взаимопониманию с иностранными партнерами расширению международного сотрудничества предприятия.

Еще одна образовательная проблема, которая требует решения на пути дальнейшего расширения международного сотрудничества – это владение техническими специалистами одним или более иностранным языком. Безусловно, в современных условиях распространения информации для специалиста, владеющего иностранным языком, открываются широкие возможности получения дополнительных знаний по своему направлению деятельности, непосредственного общения со своими иностранными коллегами. Для ГП «КБ «Южное» вопрос владения специалистами иностранным языком стоит особенно остро, т.к. при выпуске проектной и конструкторской документации для иностранных заказчиков сроки ее перевода на английский язык сравнимы с ее разработкой. Для эффективной работы нужны инженерные кадры со знанием иностранного языка. Поэтому вопрос о степени владения языком стал обычным при приеме молодых специалистов на работу. Для улучшения качества переводов на предприятии выпускаются специализированные словари-справочники слов, словосочетаний и выражений, относящихся к ракетно-космической тематике, и наиболее часто встречающихся в проектно-конструкторской документации ГП «КБ «Южное». Организуется также обучение английскому языку на предприятии.

Одним из направлений дальнейшего совершенствования качества подготовки специалистов является развитие международного сотрудничества университетов и промышленных предприятий для обмена накопленным опытом, модернизации учебных программ, формирования общей стратегии подготовки и трудоустройства выпускников аэрокосмических учебных заведений. КБ «Южное» сотрудничает с европейскими, российскими и украинскими университетами по проектам в рамках программы Европейского Союза TEMPUS, где участвует как заказчик и эксперт разрабатываемых учебных программ, передает университетам свой опыт в области научной и инновационной деятельности. В результате проведения работ по проекту «Реформирование учебных программ в области космических технологий в Казахстане, России и Украине» (2009-2011) на базе передовых космических технологий в университетах внедрены новые учебные программы по проектированию микроспутников, созданы и оснащены новые учебные лаборатории и компьютерные классы, сформировались общие подходы к развитию системы аэрокосмического образования и ее унификации, подготовки и трудоустройства выпускников. Одно из уже реализуемых направлений сотрудничества – разработка студенческих спутников и запуск их на орбиту на ракетах-носителях КБ «Южное». В настоящее время в рамках программы TEMPUS проводятся работы по проектам «Национальная образовательная инфраструктура совершенствования инновационной и предпринимательской деятельности ИТ-студентов» и «Новая модель третьего уровня высшего инженерного образования в соответствии с рекомендациями Болонского процесса в университетах Белоруссии, России и Украины». Готовится проект в рамках Европейской программы совершенствования высшего образования ERASMUS+ «Новые учебные программы по перспективному материаловедению и технологиям для аэрокосмической техники». Выполнение этих проектов является продолжением начатой работы по улучшению качества инженерного образования в Украине с использованием Европейского опыта и повышению уровня подготовки специалистов ГП «КБ «Южное».

Описанные выше методы взаимодействия университетов и предприятий позволяют найти пути решения проблемы обеспечения квалифицированными кадрами предприятия такой наукоемкой и высокотехнологичной отрасли как ракетно-космическая промышленность.

Они также способствуют скорейшей интеграции выпускников университетов в современное производство, как для выполнения внутренних заказов, так и для реализации крупных международных космических проектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Novykov O. V. Experience of high school cooperation with manufacturing enterprise while training rocket and space industry experts / O.V. Novykov, V.I. Perlik, E.O. Dzhur // IAC-53. – Texas, 2001.
2. Novykov O. V. Continues space education system and its role in increasing efficiency of engineering staff training for Ukraine space rocket industry / O.V. Novykov, V.I. Perlik, M.V. Polyakov, V.V. Khutoryni // “Acta Astronautica”. – 2008. – P. 33-35.
3. Дуплищева О. М. Экспериментальная отработка агрегатов автоматики и систем летательных аппаратов : монография / О.М. Дуплищева, Г.И. Сокол, В.И. Порубаймех [под ред. д.т.н. А.В. Дегтярева]. – Днепропетровск : Арт-пресс, 2013. – 208 с.
4. Новиков А. В. Методы анализа точности выведения ракет-носителей : монография / А.В. Новиков, В.Л. Тихонов, В.С. Литвинов [под ред. д.т.н. А.В. Дегтярева]. – Днепропетровск : Лира, 2014. – 276 с.
5. Панкратов Ю. П. Динамика переходных процессов ракет-носителей : монография / Ю.П. Панкратов, А.В. Новиков, К.Э. Татаревский, И.Б. Азанов [под ред. д.т.н. А.В. Дегтярева]. – Днепропетровск : Лира, 2014. – 153 с.
6. Проектирование, конструирование ракет, космических аппаратов и их систем. Учебные программы / Под ред. д.т.н. А.В. Дегтярева. – Днепропетровск : Инновация, 2014. – 171 с.

REFERENCE

1. Novykov, O.V., Perlik, V.I. and Dzhur, E.O. (2001), “Experience of high school cooperation with manufacturing enterprise while training rocket and space industry experts”, *IAC-53*, Texas.
2. Novykov, O.V., Perlik, V.I., Polyakov, M.V. and Khutoryni, V.V. (2008), “Continues space education system and its role in increasing efficiency of engineering staff training for Ukraine space rocket industry”, *Acta Astronautica*, pp. 33-35.
3. Duplisheva, O.M., Sokol, G.I. and Porubaimekh, V.I. (2013), *Ekspyrymental'naya otrabotka agregatov avtomatiki i system letatel'nykh apparatov* [Experimental testing of units and automation systems of aircraft], edited by A.V. Degtyarev, Art-press, Dniepropetrovsk, Ukraine.
4. Novikov, O.V., Tikhonov, V.L. and Litvinov, V.S. (2014), *Metody analiza tochnosti vyvedeniya raket-nositeley* [Methods of analysis of the accuracy of removing carriers rockets] edited by A.V. Degtyarev, Lira, Dniepropetrovsk, Ukraine.
5. Pankratov, Yu.P., Novikov, O.V., Tatarevskii, K.E. and Azanov I.B. (2014), *Dinamika perekhodnykh processov raket-nositeley* [Dynamics of transients carriers rockets], edited by A.V. Degtyarev, Lira, Dniepropetrovsk, Ukraine.
6. (2014), *Proyektironaniye, konstruirovaniye raket, kosmicheskikh apparatov i ih system. Uchebnyye programmy* [Design, construction of rockets, space vehicles and their engines. Training programs], edited by A.V. Degtyarev, Innovaciya, Dniepropetrovsk, Ukraine.

УДК 531.39, 517.977

СТАБІЛІЗАЦІЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ

Новікова Ю. В., м. н. с., Зуєв О. Л., д. ф.-м. н., професор

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна*

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

Розглянуто модель механічної системи, яка складається з твердого тіла та тонкої ізотропної пластини. Отримано нескінченну систему диференціальних рівнянь, що описують коливання пластини в термінах модальних координат. Для підсистеми, що відповідає непарним модам, знайдено керування зі зворотним зв'язком, які залежать від узагальнених швидкостей. Доведено теорему про асимптотичну стійкість положення рівноваги підсистеми зі зворотним зв'язком.

Ключові слова: пластина Кірхгофа, асимптотична стійкість, керування зі зворотним зв'язком.

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

Новикова Ю. В., м. н. с., Зуев А. Л., д. ф.-м. н., профессор

*Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, г. Киев-4, 01601, Украина*

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

Рассмотрена модель механической системы, которая состоит из твердого тела и тонкой изотропной пластины. Получена бесконечная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания пластины в терминах модальных координат. Для подсистемы, соответствующей нечетным модам, найдены управления с обратной связью, которые зависят от обобщенных скоростей. Доказана теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия подсистемы с обратной связью.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, асимптотическая устойчивость, управление с обратной связью.

STABILIZATION OF VIBRATIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH ELASTIC PLATE

Novikova Yu. V., Junior Researcher, Zuyev A. L., D. Sc. in Physics and Maths, Professor

*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., 3, Kiev-4, 01601, Ukraine*

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

In this paper, a mechanical system consisting of a rigid body (carrier) and a thin isotropic plate is considered. The carrier body performs rotational motion with three degrees of freedom around a fixed point. The plate vibrations are described by the Kirchhoff model without taking into account the inertia of the cross-section area. Thus, the dynamics of the plate is governed by the following partial differential equation:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D \Delta^2 w(x_1, x_2, t) = \tilde{F}.$$

Here $\tilde{F}$ is the transverse component of the inertia force, obtained by d'Alembert's principle, which occurs due to the translational motion of the carrier body.

Since we consider the hinged plate, the deflection and bending moment vanish on the boundary. With the help of the Fourier method, an infinite system of ordinary differential equations describing the slow rotation of the rigid body and small oscillations of the Kirchhoff plate is obtained.

For the subsystem corresponding to odd indices, a state feedback control is constructed. This control law depends essentially on generalized velocities. A theorem on the asymptotic stability of the equilibrium of this subsystem, written in the operator form, is proved. The proof of this theorem is based on an infinite-dimensional modification of the Barbashin–Krasovskii theorem – LaSalle's invariance principle. In the first step, we show that the time-derivative of a Lyapunov functional $V(x)$ is non-positive. In the second one, the precompactness of semi-trajectories of the differential equation $\dot{x} = Fx$, $x(0) = x_0 \in \ell^2$ is established. This step is based on the property that the operator $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ is compact. Further on, it is shown that any semi-trajectory $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ on the set $M = \{x \in \ell^2 \mid \dot{V}(x) = 0\}$ has the property $x(t) \equiv 0$.

Key words: Kirchhoff plate, asymptotic stability, feedback control.

ВСТУП

Розвиток сучасних аерокосмічних технологій обумовлює високу актуальність проблем моделювання руху космічних апаратів з пружними елементами, а також питань керованості та стабілізації моделей супутників.

До 60-х років ХХ століття при моделюванні руху супутників, як правило, мало місце припущення, що космічний апарат являє собою абсолютно тверде тіло, але високі вимоги до точності керування призвели до необхідності враховувати пружність конструктивних елементів у математичній моделі.

У роботах [1-4] досліджено обертальний рух систем з пружними елементами та рух навколо центру мас. Зокрема, у статті [1] розглянуто питання стабілізації космічного апарата з керованою сонячною батареєю, який рухається по коловій орбіті. Модель апарата представлена абсолютно твердим тілом з панелями, які змодельовані у вигляді недеформованих стержнів. При цьому сонячні батареї пружно зв'язані з тілом космічного апарата за допомогою сферичних шарнірів.

У монографії Г.Л. Дегтярьова та Т.К. Сіразетдінова [5] розглянуто механічну модель космічного апарата, яка складається з твердого тіла та двох панелей сонячних батарей. Панелі батарей жорстко приєднані до твердого тіла за допомогою двох кронштейнів, а тверде тіло здійснює обертання навколо фіксованої осі. Для такої механічної системи побудовано математичну модель та отримано функції керування.

На відміну від моделей з [1, 5], у даній роботі розглянуто механічну систему, де тіло-носій виконує обертальні рухи з трьома степенями волі, а панелі батарей шарнірно закріплені на границі області.

Метою роботи є синтез керування зі зворотним зв'язком для математичної моделі, яка описує рух твердого тіла і пружної пластини Кірхгофа. У роботі також досліджено стійкість тривіального розв'язку лінійної нескінченновимірної системи, яка відповідає цій математичній моделі.

МОДЕЛЬ КЕРОВАНОГО РУХУ СИСТЕМИ З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ

Розглянемо механічну систему, що складається з твердого тіла та тонкої ізотропної пластини. З твердим тілом пов'язана декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. Тверде тіло B обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}(t)$ [6].

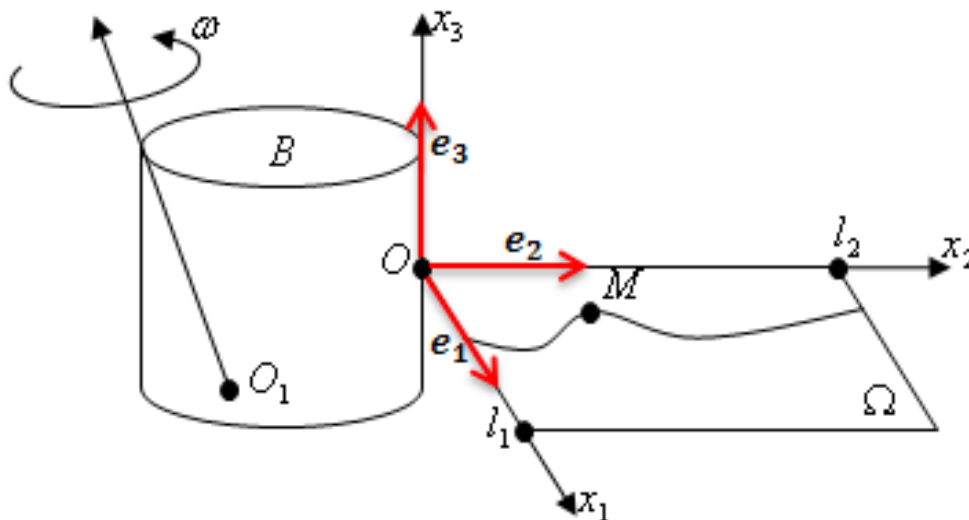


Рис. 1. Тверде тіло з тонкою пружною пластиною

Припустимо, що в стані спокою пластина займає замкнену область, яка має вигляд $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \leq h/2$, де товщина пластини дорівнює h . Будемо вважати, що в кожен момент часу t серединну поверхню пластини можна задати рівнянням $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Для того щоб описати коливання пластини застосуємо гіпотезу Кірхгофа-Лява. Згідно з цією гіпотезою, прямолінійні волокна пластини, що перпендикулярні до її серединної поверхні до деформації, залишаються такими ж до вигнутої серединної поверхні після деформації, а нормальні напруження на площинах, паралельних до серединної поверхні, є малими порівняно з іншими напруженнями. Також припустимо, що матеріал пластини задовольняє закон Гука і є ізотропним [7]. За умови виконання цих припущень, функція $w(x_1, x_2, t)$ не залежить від поздовжніх переміщень та задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку.

Отже, рівняння коливань пластини без урахування інерції поперечного перерізу має вигляд:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D \Delta^2 w(x_1, x_2, t) = \tilde{F}, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – густина матеріалу, $D > 0$ – жорсткість пластини при згинанні, $\tilde{F}$ – поперечна компонента сили, яка діє на пластину.

Оскільки пластина закріплена шарнірно на границі області Ω , то на частинах контуру відсутні прогин та згинаючий момент. Отже, крайові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=0, x_1=l_1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|_{x_2=0, x_2=l_2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Тверде тіло B виконує обертальний рух навколо точки O_1 . Тоді, згідно з принципом можливих переміщень для систем матеріальних точок, які підпорядковані ідеальним в'язам, для того, щоб система знаходилася у стані рівноваги, необхідно і достатньо, щоб сумарна робота зовнішніх сил на усіх можливих переміщеннях дорівнювала нулю.

У задачах динаміки останнє твердження залишається справедливим, якщо до зовнішніх сил додати сили інерції [8].

Щоб записати вираз для сили інерції в рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$ застосуємо принцип Д'Аламбера та формулу додавання прискорень [9]. Припустимо, що e_1, e_2, e_3 – орти системи координат $Ox_1x_2x_3$. Нехай радіус-вектор точки M має вигляд:

$$r_M = x_1 e_1 + x_2 e_2 + w(x_1, x_2, t) e_3.$$

Запишемо суму переносного та коріолісового прискорень точки M :

$$a_M = V_0^* + \omega \times V_0 + \dot{\omega} \times r_M + \omega \times (\omega \times r_M) + 2\omega \times r_M^*,$$

де V_0 – абсолютна швидкість точки O , $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ – кутова швидкість твердого тіла, а $\dot{\omega}$ – кутове прискорення; зірочкою позначені відносні похідні векторів у рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$. Застосувавши принцип Д’Аламбера, отримаємо вираз для поперечної компоненти сили інерції, зумовленої переносним рухом тіла B у вигляді:

$$\tilde{F} = -(\rho h a_M, e_3). \quad (3)$$

Тоді рівняння (1) з урахуванням виразу (3) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \Delta^2 w = -\left[(x_1 - a_1)(\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega}_2) + (x_2 - a_2)(\omega_2 \omega_3 + \dot{\omega}_1) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(a_3 - w)\right], \quad (4)$$

де (a_1, a_2, a_3) – координати точки O_1 у системі координат $Ox_1x_2x_3$, $\alpha^2 = \frac{D}{\rho h} > 0$.

Отже, рівняння (4), (2) описують обертальний рух механічної системи, що складається з тіла-носія та пластини, шарнірно зафіксованої на границі прямокутної області.

Застосуємо метод Фур’є до розв’язання крайової задачі (4), (2), та запишемо лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, яка описує вплив повільних обертань тіла-носія на коливання пластини [10]:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj} \eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj} \xi_{kj} + \varphi_{kj} u_1 + g_{kj} u_2. \end{cases} \quad (5)$$

У системі (5): $\xi_{kj}(t)$ – модальна координата, $\eta_{kj}(t)$ – швидкість, що відповідає моді коливань з індексами $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функції керування, які відповідають кутовому прискоренню тіла-носія. Коефіцієнти системи (5) пов’язані з параметрами механічної системи (4), (2) співвідношеннями:

$$\beta_{kj} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2 \right), \quad \varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k - \text{парне}, \\ \frac{2l_2 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j}, & k - \text{непарне}, j - \text{парне}, \\ \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (2a_2 - l_2)}{\pi^2 k j}, & k - \text{непарне}, j - \text{непарне}, \end{cases} \quad (6)$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \frac{-2l_1 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j}, & k - \text{парне}, j - \text{непарне}, \\ 0, & j - \text{парне}, \\ \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (l_1 - 2a_1)}{\pi^2 k j}, & k - \text{непарне}, j - \text{непарне}, \end{cases}$$

де припускаємо, що $2a_1 \neq l_1$, $2a_2 \neq l_2$.

Розглянемо підсистему системи (5) з ненульовими коефіцієнтами при керуваннях $u_1(t)$ та $u_2(t)$. Тоді вирази з (6) будуть мати вигляд:

$$\beta_{kj} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2 \right), \quad \varphi_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (2a_2 - l_2)}{\pi^2 k j}, \quad g_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2} (l_1 - 2a_1)}{\pi^2 k j}, \quad (k, j) \in \hat{N}_2, \quad (7)$$

де $\hat{N}_2 = \{(k, j) \mid k = 2p - 1, j = 2m - 1, p, m \in \mathbb{N}\}$.

Уведемо взаємно-однозначне відображення $(k, j) \mapsto n(k, j)$ між множинами $\hat{N}_2$ і $\mathbb{N}$, тоді величинам з подвійним індексом $(k, j) \in \hat{N}_2$ буде відповідати одинарний індекс $n \in \mathbb{N}$.

Тоді можна переписати підсистему системи (5) для індексів $(k, j) \in \hat{N}_2$ наступним чином в операторному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

де

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введемо скалярний добуток у гільбертовому просторі ℓ^2 для векторів x та $\bar{x}$ стандартним способом: $\langle x, \bar{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n \bar{\xi}_n + \eta_n \bar{\eta}_n)$.

Розглянемо функціонал $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2)$, який діє з ℓ^2 в $\mathbb{R}$.

Визначимо функції керування зі зворотним зв'язком:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n, \quad v_2(x) = -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n, \quad (k_1 \geq 0, k_2 \geq 0). \quad (9)$$

Тоді похідна V у силу системи (8) з $u_1 = v_1(x)$, $u_2 = v_2(x)$ буде мати вигляд

$$\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0.$$

ДОВЕДЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТРИВІАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. Нехай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Тоді керування зі зворотним зв'язком $u_1 = v_1(x)$ та $u_2 = v_2(x)$ виду (9) забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (8).

Доведення: Запишемо систему (8) з керуванням $u = v(x)$ у вигляді:

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \quad (10)$$

де $F = A + BK$ – інфінітезимальний генератор C_0 – напівгрупи лінійних обмежених операторів $\{e^{tF}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 [11], $K = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k_1 \varphi_1 & 0 & k_1 \varphi_2 & \dots \\ 0 & k_2 g_1 & 0 & k_2 g_2 & \dots \end{pmatrix}$.

Доведення Теорема 1 проведемо за допомогою нескінченновимірної модифікації теореми Барбашина-Красовського – теореми ЛаСалля [13] (див. також [12]).

Умова $\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0$ виконується для всіх $x \in D(A)$ при $k_1 > 0$ та $k_2 > 0$, де $D(A) = \left\{ x \in \ell^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 (\xi_n^2 + \eta_n^2) < \infty \right. \right\}$.

Доведемо передкомпактність напівтраєкторій диференціального рівняння (10) за допомогою теореми з [14]. Доведемо компактність оператора $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ при $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння $Ix + \lambda Ax + \lambda Bu = \bar{x}$ відносно x , де $\lambda = \text{const}$. У матричному вигляді це рівняння матиме запис:

$$(I + \lambda A) \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо це рівняння методом оберненої матриці, у результаті чого отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \beta_n \\ \lambda \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Підставимо вираз (11) у формули для $u = v(x)$ виду (9):

$$\begin{pmatrix} v_1(\bar{x}) \\ v_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2) \\ \frac{-k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Перетворимо (12):

$$\begin{cases} v_1 \left(1 - \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) - v_2 \left(\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2}, \\ v_1 \left(-\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) + v_2 \left(1 - \frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) = -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \end{cases} \quad (13)$$

Застосуємо до системи (13) метод Крамера та запишемо вирази для $v_1(\bar{x})$ та $v_2(\bar{x})$:

$$v_1(\bar{x}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2(\bar{x}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (14)$$

де

$$\Delta = 1 - \frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \frac{k_1 k_2}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right)^2,$$

$$\Delta_1 = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} -$$

$$\begin{aligned} & -\frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2}, \\ \Delta_2 = & -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \\ & -\frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n (\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \end{aligned}$$

Формули (14) визначають лінійний функціонал $v(\bar{x})$ в ℓ^2 . Покажемо обмеженість функціоналу $v(\bar{x})$ для довільного $\lambda > 0$, для цього проведемо оцінку $v_1(\bar{x})$ та $v_2(\bar{x})$. Так як $|v_1(\bar{x})| = \left| \frac{\Delta_1}{\Delta} \right| = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}$, а $|v_2(\bar{x})| = \left| \frac{\Delta_2}{\Delta} \right| = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}$, то оцінимо окремо чисельник та знаменник:

$$\begin{aligned} |\Delta_1| \leq & \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \\ & + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda |\varphi_n g_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n| |\lambda \beta_n \bar{\xi}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \\ & + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda |\varphi_n g_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n| |\bar{\eta}_n|}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для довільного $\beta_0 > 0$ запишемо суми в (15) окремо при $\beta_n < \beta_0$ та $\beta_n \geq \beta_0$ і застосуємо до отриманих сум нерівність Гельдера та нерівності:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\xi}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \|\bar{\xi}\|_{\ell^2} \leq \|\bar{x}\|, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\eta}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{\eta}\|_{\ell^2} \leq \|\bar{x}\|, \\ \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \beta_n < \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \beta_n \geq \beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2 \beta_n^2}{(1 + (\lambda \beta_n)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\varphi\| \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Тоді оцінка (15) матиме вид:

$$|\Delta_1| \leq \|\bar{x}\| \left[\|\varphi\| \left(\left(\frac{\lambda k_1}{2} + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \right] = M_1(\lambda) \|\bar{x}\|.$$

Аналогічно,

$$|\Delta_2| \leq \|\bar{x}\| \left[\|g\| \left(\left(\frac{\lambda k_2}{2} + \frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{\lambda^4 \beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_2}{2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right) \right] = M_2(\lambda) \|\bar{x}\|.$$

Оцінимо визначник Δ знизу, для цього застосуємо зображення:

$$\Delta = 1 + \lambda r(\lambda), \quad (16)$$

де

$$r(\lambda) = -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} - \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right)^2.$$

Нехай $|r(\lambda)| \leq M$ при $M > 0$ для будь-якого $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Оберемо $\lambda = \min \left\{ \lambda_0, \frac{1}{M} \right\}$. Тоді з (16) випливає, що $\Delta > 0$. Для оцінки $|r(\lambda)|$ застосуємо нерівність трикутника та нерівність Гельдера:

$$|r(\lambda)| \leq \frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{1 + (\beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \right)^2 \leq \frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{\lambda k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2.$$

Оберемо $\lambda_0 = 1$, тоді $|r(\lambda_0)| \leq \frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2 = M$, а

$$\Delta \geq 1 - \lambda \left(\frac{k_2}{2} \|g\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2} \|g\|^2 \|\varphi\|^2 \right) = M_3(\lambda).$$

Отже, показано, що для будь-якого $\lambda \in (0, 1)$ знайдуться такі числа $M_4(\lambda) > 0$ і $M_5(\lambda) > 0$, що

$$|v_1(\bar{x})| \leq \frac{M_1(\lambda)}{M_3(\lambda)} \|\bar{x}\| = M_4(\lambda) \|\bar{x}\|, \quad |v_2(\bar{x})| \leq \frac{M_2(\lambda)}{M_3(\lambda)} \|\bar{x}\| = M_5(\lambda) \|\bar{x}\|,$$

у формулі (14) при усіх $\bar{x} \in \ell^2$. Формули (11) и (14) визначають $x = (\lambda F + I)^{-1} \bar{x}$ при усіх $\bar{x} \in \ell^2$ для $\lambda > 0$. Отже маємо, що

$$\left\| (\lambda F + I)^{-1} \bar{x} \right\|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\xi}_n^2 + (\bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n v_1(\bar{x}) - \lambda g_n v_2(\bar{x}))^2 \right) \leq 2 \|\bar{x}\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \times \\ \times \left(1 + \lambda^2 M_4^2 \|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2 \|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5 \|\varphi\| \|g\| - 2\lambda M_4 \|\varphi\| - 2\lambda M_5 \|g\| \right). \quad (17)$$

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2}$ з останньої оцінки збігається. Для цього перейдемо до суми за двома індексами з урахуванням формул (7) при $k = 2p - 1$, $j = 2m - 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda\beta_{kj})^2} \leq \frac{(l_1 l_2)^4}{\pi^2 \lambda^2 \alpha^2} \sum_{p,m=1}^{\infty} \frac{1}{\left((2p-1)^2 l_2^2 + (2m-1)^2 l_1^2 \right)^2}.$$

Для оцінки суми ряду застосуємо інтегральну ознаку збіжності:

$$\frac{(l_1 l_2)^4}{\pi^4 \lambda^2 \alpha^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left((2p-1)^2 l_2^2 + (2m-1)^2 l_1^2\right)^2} \leq \frac{(l_1 l_2)^4}{\pi^4 \lambda^2 \alpha^2} \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dm \frac{dm}{\left((2p-1)^2 l_2^2 + (2m-1)^2 l_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(l_1 l_2)^3}{16\pi^4 \lambda^2 \alpha^2} \left(\frac{\pi - 2\arctg\left(\frac{l_1}{l_2}\right)}{2l_2^2} - \frac{\pi + 2\arctg\left(\frac{l_2}{l_1}\right)}{2l_1^2} - \frac{1}{l_1 l_2} \right). \quad (18)$$

З оцінок (17) та (18) маємо, що $\|(\lambda F + I)^{-1} \bar{x}\|^2 \leq M_6(\lambda) \|\bar{x}\|^2$.

Доведено, що лінійний оператор $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ є обмеженим при $\lambda > 0$. Для доведення його компактності розглянемо оператор проектування $P_N : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, який переводить елементи $x \in \ell^2$ у скінченновимірний підпростір з $\xi_n = \eta_n = 0$ при $n < N$:

$$P_N : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Розглянемо лінійний обмежений оператор в ℓ^2 :

$$U_N = (I - P_N)(\lambda F + I)^{-1}.$$

Кожен оператор U_N є компактным, оскільки його образ має скінченну розмірність. Покажемо, що оператор $(\lambda F + I)^{-1}$ є границею по нормі компактних операторів:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\lambda F + I)^{-1} - U_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N (\lambda F + I)^{-1}\| = 0. \quad (19)$$

Отримаємо, що:

$$\|P_N (\lambda F + I)^{-1} \bar{x}\| \leq 2 \|\bar{x}\|^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \left(1 + \lambda^2 M_4^2 \|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2 \|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5 \|\varphi\| \|g\| - \right.$$

$$\left. - 2\lambda M_4 \|\varphi\| - 2\lambda M_5 \|g\| \right). \quad (20)$$

З формули (18) маємо, що $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Отже, з оцінки (20) випливає властивість (19). Тоді оператор $(\lambda F + I)^{-1}$ є компактным, оскільки він є границею скінченновимірних операторів.

З компактності лінійного оператора $(\lambda F + I)^{-1}$ випливає передкомпактність усіх додатних напівтраєкторій лінійного диференціального рівняння (10) в ℓ^2 [14].

Нехай $x(t)$, $t \geq 0$ – розв’язок системи (10) з керуванням $u = v(x(t))$ виду (9), та нехай $x(\tau) = 0$ при деякому $\tau \geq 0$. Позначимо $\tilde{x}^0 = x(\tau) \in \ell^2$ та визначимо $\tilde{x}(t) = (\tilde{\xi}_1(t), \tilde{\eta}_1(t), \tilde{\xi}_2(t), \tilde{\eta}_2(t), \dots)^T$ розв’язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_n(t) = \beta_n \tilde{\eta}_n(t), \\ \dot{\tilde{\eta}}_n(t) = -\beta_n \tilde{\xi}_n(t), \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0. \quad (21)$$

Оскільки $y(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{\xi}_n(0) = \tilde{\eta}_n(0) = 0$ при усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$\tilde{\xi}_n(t) = \tilde{\eta}_n(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Це означає, що $y(\tilde{x}(t)) \equiv 0$. Покажемо, що $\tilde{x}(t)$ – розв’язок системи (8) зі зворотним зв’язком (9). Підставимо вираз (22) у функціонал зі зворотним зв’язком (9) та отримаємо, що $u = v(\tilde{x}(t)) \equiv 0$. Отже, підстановка $\tilde{x}(t)$ призводить диференціальне рівняння (8) з керуванням (9) до тотожності на основі (21).

Застосуємо властивість єдиності розв’язку задачі Коші та отримаємо, що $x(t) = \tilde{x}(t + \tau)$, $\forall t \geq 0$. Звідси маємо, що $y(x(t)) \equiv 0$ з урахуванням тотожності (22).

Перевіримо останню умову теореми з [12]. Покажемо, що будь-яка напівтраєкторія $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ системи (8) з керуванням (9) на множині $M = \{x \in \ell^2 \mid \dot{V}(x) = 0\}$ має властивість $x(t) \equiv 0$.

Нехай $x(t) \in M$ при усіх $t \geq 0$, тобто:

$$\dot{V}(x(t)) = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n(t) \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n(t) \right)^2 \equiv 0.$$

Звідси з урахуванням нерівностей $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ маємо, що:

$$v_1(x(t)) = v_2(x(t)) = 0. \quad (23)$$

Підстановка рівнянь $u = v(x(t))$ виду (23) у (8) приводить до системи:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \beta_n \eta_n(t), \\ \dot{\eta}_n(t) = -\beta_n \xi_n(t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Запишемо розв’язок системи диференціальних рівнянь (24):

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \xi_n(0) \cos(\beta_n t) + \eta_n(0) \sin(\beta_n t), \\ \eta_n(t) = -\xi_n(0) \sin(\beta_n t) + \eta_n(0) \cos(\beta_n t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Підставимо (25) у (23), тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \eta_n(0) \cos(\beta_n t) - \varphi_n \xi_n(0) \sin(\beta_n t)) \equiv 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \eta_n(0) \cos(\beta_n t) - g_n \xi_n(0) \sin(\beta_n t)) \equiv 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0. \quad (26)$$

Очевидно, якщо система функцій $\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – лінійно-незалежна на півосі $t \in [0, \infty)$, то тотожності (26) виконуються тільки при

$$\xi_n(0) = \eta_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Зі співвідношень (27) в силу формул (25) випливає властивість $x(t) \equiv 0$, що, у свою чергу, забезпечує виконання останньої умови.

Доведемо лінійну незалежність системи $\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) | n \in \mathbb{N}\}$ на півосі $t \in [0, \infty)$. Для доведення лінійної незалежності застосуємо теорему з [15], яка має таке формулювання:

якщо

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{m[a, a+z]}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \quad (28)$$

то система $\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) | n \in \mathbb{N}\}$ мінімальна в $L^2(0; \tau)$, де $m[a, b]$ – потужність множини $[a, b) \cap K$, при $K = \{\beta_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Для доведення умови (28) нагадаємо, що

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha\pi^2 \left(\frac{(2p-1)^2}{l_1^2} + \frac{(2m-1)^2}{l_2^2} \right) = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2} ((2m-1)^2 + (2p-1)^2 \chi). \quad (29)$$

У формулі (29) β_{kj} відповідають тільки непарним значенням k, j . Для доведення (28) розглянемо β_{kj} для $k, j \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha\pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2} \right) = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2} (j^2 + k^2 \chi), \quad \text{де } \chi = \frac{l_2^2}{l_1^2} > 0.$$

Позначимо $\tilde{\beta}_{kj} = j^2 + k^2 \chi$. Розглянемо спочатку випадок $\chi \geq 1$.

Нехай $\Gamma_+ : j^2 + k^2 \chi = b$ та $\Gamma_- : j^2 + k^2 \chi = a$ – границі області Ω , у яку потрапляють усі цілі точки виду (j, k) , для яких $\beta_{kj} \in [a, b)$. Область Ω визначена так:

$$\Omega = \{(j, k) | a \leq j^2 + k^2 \chi < b, \quad k \geq 1, j \geq 1\}.$$

Отже, оцінка числа $m[a, b)$ зводиться до знаходження потужності множини $\Omega \cap \mathbb{N}^2$. Розглянемо два квадрати, один з яких (B_+) містить область Ω , а інший (B_-) має не більше однієї спільної точки з Ω , як показано на рис. 2.

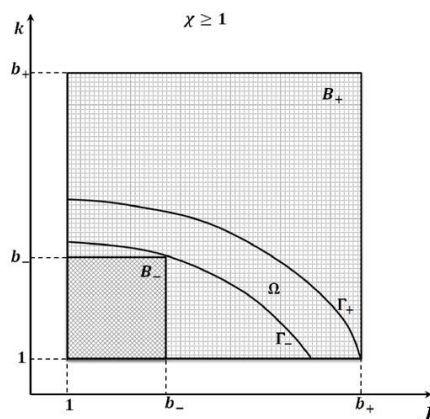


Рис. 2. Множини Ω , B_+ , B_-

Знайдемо кількість цілих точок у квадратах B_+ та B_- . Визначимо координати вершин, що лежать на границі області Ω :

$$b_+ : b_+^2 + \chi = b, \quad b_- : b_-^2 + \chi b_-^2 = a. \quad (30)$$

З рівностей (30) випливає, що $b_+ = \sqrt{b - \chi}$, $b_- = \sqrt{\frac{a}{1 + \chi}}$.

Отже, оцінка кількості цілих точок в Ω матиме вигляд:

$$m_1[a; b) \leq |B_+ \cap \mathbb{N}^2| - |B_- \cap \mathbb{N}^2| + 1 = b_+^2 - b_-^2 + 1 = b - \chi - \frac{a}{1 + \chi} + 1. \quad (31)$$

Нехай $b = a + z$, тоді:

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{m_1[a, a + z)}{z} \leq \overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{a \left(1 - \frac{1}{1 + \chi} \right) + z - \chi + 1}{z} = 1. \quad (32)$$

Випадок при $\chi < 1$ розглядається аналогічно, при цьому:

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{m_1[a, a + z)}{z} \leq \overline{\lim}_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{a \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{1 + \chi} \right) + \frac{z - 1}{\chi} + 1}{z} = \frac{1}{\chi}. \quad (33)$$

З оцінок (32), (33) випливає, що система функцій $\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) | n \in \mathbb{N}\}$ – лінійно-незалежна на $[0; \tau)$ при $\tau > 2\pi \max \left\{ 1, \frac{1}{\chi} \right\}$. Оскільки $m[a, a + z) \leq m_1[a, a + z)$, то система, що відповідає непарним індексам, також є лінійно-незалежною на $[0; \tau)$. Отже, особлива точка $x = 0$ системи (8) з керуванням $u = v(x)$ є асимптотично стійкою.

ВИСНОВОК

У роботі досліджено математичну модель руху механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Для цієї моделі записано нескінченну систему диференціальних рівнянь, які описують малі коливання пружної пластини із застосуванням модальних координат. Для підсистеми, що відповідає непарним індексам, отримано керування зі зворотним зв'язком, а також доведено теорему про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хорошилов В. С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей / В.С. Хорошилов // Известия АН СССР. МТТ. – 1978. – №5. – С. 18-24.
2. Ambrosio J. Efficient kinematic Joint descriptions for flexible multibody systems experiencing linear and non-linear deformations / J. Ambrosio // International journal for numerical methods in engineering. – 2003. – Vol. 56, №12. – P. 1771-1793.
3. Набиуллин Т. К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников / Т.К. Набиуллин. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1990. – 216 с.
4. Докучаев Л. В. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами / Л.В. Докучаев, О.П. Климов // Известия АН СССР. МТТ. – 1982. – №5. – С. 10-15.
5. Дегтярев Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов. – М. : Машиностроение, 1986. – 214 с.

6. Zuyev A. Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements / A. Zuyev. – Cham Heidelberg : Springer, 2015. – 232 p.
7. Lagnese J. E. Controllability of Thin Elastic Beams and Plates / J.E. Lagnese, G. Leugering // The control handbook (W. S. Levine ed.). – Boca Raton : CRC Press – IEEE Press, 1996. – P. 1139-1156.
8. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л. Бердичевский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
10. Зуев А. Л. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187-198.
11. Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations / R.S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90. – P. 193-254.
12. Зуев А. Л. Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58. №5. – С. 709-717.
13. LaSalle J. P. Stability theory and invariance principles / J.P. LaSalle // Dynamical systems. Vol. 1 : Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.) – 1976. – New York : Academic Press. – P. 211-222.
14. Dafermos C. M. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups / C.M. Dafermos, M. Slemrod // Journal of Functional Analysis. – 1973. – Vol. 13. – P. 97-106.
15. Krabs W. On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes / W. Krabs // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 173. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 174 p.

REFERENCES

1. Khoroshilov, V.S. (1978), “The mechanical model of the spacecraft with a solar battery”, *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 5, pp. 18-24.
2. Ambrosio, J. (2003), “Efficient kinematic Joint descriptions for flexible multibody systems experiencing linear and non-linear deformations”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 56, no. 12, pp. 1771-1793.
3. Nabiullin, T.K. (1990), *Stationarnoe dvizhenie i ustoychivost uprugih sputnikov* [Stationary movement and the stability of elastic satellites], Nauka, Sibirskoe otделение, Novosibirsk.
4. Dokuchaev, L.V. and Klimov, O.P. (1982), “On the stability of rotation of a rigid body with flexible elements”, *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 5, pp. 10-15.
5. Degtyarev, G.L. and Sirazetdinov, T.K. (1986), *Theoreticheskie osnovy optimalnogo upravleniya uprugimi kosmicheskimi apparatami* [Theoretical Foundations of optimal control elastic spacecraft], Mashinostroenie, Moscow.
6. Zuyev, A. (2015), “Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements”, Springer, Cham Heidelberg.
7. Lagnese, J.E. and Leugering, G. (1996), “Controllability of Thin Elastic Beams and Plates”, *The control handbook* (W.S. Levine ed.), CRC Press – IEEE Press, Boca Raton, pp. 1139-1156.
8. Berdichevsky, V.L. (1983), *Variationnnye principy mekhaniki sploshnoy sredy* [Variational principles of continuum mechanics], Nauka, Glavnay redakciya phiziko-mathemathicheskoy literature, Moscow.
9. Lurie, A.I. (1961), *Analyticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics], Fizmatgiz, Moscow.

10. Zuyev, A.L. and Novikova, Yu.V. (2011), "Small oscillations Kirchhoff plate with two-dimensional control", *Mechanika tverdogo tela*, issue. 41, pp. 187-198.
11. Phillips, R.S. (1959), "Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, pp. 193-254.
12. Zuyev, A.L. (2006), "Partial asymptotic stability of abstract dynamical processes", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 58, no. 5, pp. 709-717.
13. LaSalle, J.P. (1976), "Stability theory and invariance principles", *Dynamical systems*, vol. 1: Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.), Academic Press, New York, pp. 211-222.
14. Dafermos, C.M. and Slemrod, M. (1973), "Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups", *Journal of Functional Analysis*, vol. 13, pp. 97-106.
15. Krabs, W. (1992), "On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin.

УДК 539.3

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ободан Н. И., д. т. н., проф., Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

stroller@rambler.ru

Рассматривается нелинейная краевая задача теории оболочек для случая цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, при действии равномерного внешнего давления. Для отыскания решений указанной краевой задачи, данной своей вариационной постановкой, использовался метод итеративного разделения переменных (обобщенный метод Канторовича). Установлена область существования нагрузок потери устойчивости, формы до- и закритической деформации, связь между данными формами и формами ветвей вторичного ветвления для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка с разрезом, нелинейная краевая задача, обобщенный метод Канторовича.

ВТРАТА СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ПОСЛАБЛЕНА ВЕРТИКАЛЬНИМ РОЗРІЗОМ, ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Ободан Н. И., д. т. н., проф., Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

stroller@rambler.ru

Розглянуто нелінійну крайову задачу теорії оболонок для випадку циліндричної оболонки, що послаблена вертикальним розрізом, під дією рівномірного зовнішнього тиску. Для відшукування розв'язків зазначеної крайової задачі, яку дано її варіаційним формулюванням, використано метод ітеративного розділення змінних (узагальнений метод Канторовича). Встановлено область існування навантажень втрати стійкості, форми до- та закритичної деформації, зв'язок між цими формами та формами гілок вторинного галуження для випадку циліндричної оболонки без початкових недосконалостей.

Ключові слова: циліндрична оболонка з розрізом, нелінійна крайова задача, узагальнений метод Канторовича.

LOSS OF STABILITY FOR CYLINDRICAL SHELL WITH VERTICAL CUT SUBJECTED TO UNIFORM PRESSURE

Natalia I. Obodan and Vasiliy A. Gromov

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

stroller@rambler.ru

The emergence of robust design concept that gain strength in engineering community while traditional damage tolerance design (that rules out any irregularities and, more importantly, their influence on structure behaviour) becomes less popular necessitates in-depth analysis of postcritical deformed shapes and factors determining the possibility for a structure to develop such and such postcritical deformed shape along with ability to bear load, if the shape happens to emerge. Particularly, of fundamental interest is to ascertain the “worst” imperfection for thin-walled structure of a certain kind.

In the present paper, non-linear boundary problem of shell theory is studied for the case of cylindrical shell with vertical cut under uniform pressure. The problem was solved with employment of iterative variable decomposition method (generalized Kantorovich method). Critical loads area as well as pre- and postcritical deformed shapes was ascertained; the shapes turned out to be similar to those associated with secondary bifurcation paths for the case of cylindrical shell without initial irregularities.

Cylindrical shell with length L , radius R , and thickness h with a vertical cut placed symmetrically with respect to central shell cross-section is subjected to uniform external pressure λ . The shell is simply supported; free edge conditions are satisfied along cut edges; at the cut tips, strain compatibility conditions are satisfied. Inasmuch as the definitional domain of the respective boundary problem is partitioned into subdomains in order to make it possible to follow generalized Kantorovich method, it is necessary to add conditions binding solutions associated with different subdomains; the conditions consist in difference between some integrals of solution components over the respective subdomains. It is worth noting, that these integral conditions are responsible for the fact that Newton method does not hold its quadratic convergence speed.

In the course of a wide-ranging simulation, it was revealed that the loss of stability for that case has two phases; during the first one, localized dents are developed in a neighbourhood of the cut, the shell, however, retains its bearing capacity. The second phase are featured with development of deformed shapes similar to those of single or two adjacent local dents associated with secondary bifurcation paths of the non-linear boundary problem for the shell without initial irregularities. Ultimately, shell losses its stability (bearing capacity) and develops one of the shapes in the postcritical area.

The following conclusions were reached in the paper. Firstly, the method of iterative variable decomposition can be successfully applied to the case of non-linear boundary problem with boundaries for which different boundary conditions are formulated, provided the domain considered is partitioned into subdomains with single type boundary conditions. Secondly, such irregularity as a vertical cut initiates development of deformed shape similar to those associated with the secondary bifurcation paths of non-linear boundary problem for the case of cylindrical shell without initial irregularities. Consequently, as far as cylindrical shell with a cut losses its stability developing shapes analogous to localized shapes of the same shell without irregularities, boundaries with respect to load parameter of the secondary bifurcation paths area (that is 0.6-1.0 of the critical load estimate for the shell without irregularities obtained in the framework of the linear theory) determine critical loads for the case in question.

Key words: cylindrical shell with cut; non-linear boundary problem; generalized Kantorovich method.

ВВЕДЕНИЕ

Широкомасштабное применение тонкостенных оболочечных конструкций в авиа- и ракетно-космическом машиностроении, других отраслях техники, обуславливает постоянный, незатухающий интерес к анализу поведения указанных конструкций, как теоретическому, так и экспериментальному.

Особый интерес здесь представляет анализ поведения конструкции с наличием дефекта [1-7], который может иметь как технологический, так и эксплуатационный характер, а также влияние указанного дефекта на потерю устойчивости, и, в конечном итоге, на несущую способность нагруженной конструкции.

Появление концепции робастного проектирования (robust design) [8], которая постепенно вытесняет в инженерной практике концепцию проектирования, исключающего возможность появления иррегулярностей любого рода и их влияние на поведение конструкции (damage tolerance design), обуславливает необходимость глубокого анализа возможных форм

закритической деформации и факторов, определяющих возможность реализации той или иной закритической формы, а также возможность сохранения конструкцией несущей способности при переходе к той или иной закритической форме.

Частным результатом такого рода анализа является установление характеристик «наихудшего» несовершенства («worst» shape imperfection) [9, 10] для того или иного типа тонкостенной конструкции; для случая однородной тонкостенной конструкции, нагруженной неоднородным внешним давлением, аналогом понятия «наихудшего» несовершенства выступает концепция наиболее опасного внешнего нагружения (infavourable load) [11].

Одним из наиболее распространённых в инженерной практике видов начальных несовершенств тонкостенных конструкций являются разрезы: практическая важность оболочек, ослабленных разрезами, вместе со сложностью численного анализа потери устойчивости тонкостенной конструкцией данного типа обусловило появление значительного числа работ, описывающих процесс до- и закритической деформации цилиндрической оболочки, ослабленной разрезом, подвергнутой действию того или иного нагружения. В работе [12] рассматриваются критические нагрузки для композитной цилиндрической оболочки, подвергнутой действию комбинированного нагружения (осевое сжатие, внутреннее и внешнее давление, изгиб); оболочка ослаблена разрезами. В расчётной схеме применялся метод конечных элементов со сгущением конечных элементов в области вершины разреза [13].

В процессе нелинейного анализа поведения указанной конструкции при различных комбинациях значений рассмотренных нагрузок авторы установили существования трёх различных форм потери устойчивости: форма одна локальная вмятина/несколько смежных локальных вмятин, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только равномерного осевого сжатия, развивающаяся в окрестности разреза («local mode» в терминологии авторов статьи); регулярная форма деформации, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только равномерного внешнего давления («global mode» в терминологии авторов статьи); и, наконец, форма несколько смежных локальных вмятин, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только неравномерного внешнего давления с вмятиной максимальной амплитуды в окрестности разреза («transition mode»).

В работе [14] рассматривается исследование влияния размеров, типа и ориентации разреза на устойчивость цилиндрических оболочек, подвергнутых одновременному действию внутреннего давления и осевого сжатия. Авторы указывают, что наличие внутреннего давления может оказать стабилизирующее воздействие на потерю устойчивости, подавляя возможность потери устойчивости по локальным формам, а может способствовать потери устойчивости именно по локальной форме вследствие концентрации напряжений в окрестности разреза.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цилиндрическая оболочка длины L , радиуса R , толщины h , ослабленная вертикальным разрезом длины $2l$, расположенным симметрично относительно центрального сечения оболочки, подвергнута действию равномерного внешнего давления величины λ . На торцах оболочки считаются выполненными условия шарнирного опирания, на берегах разреза – условия свободного края; в вершине разреза выполняются условия совместности деформаций.

Для формулировки разрешающих соотношений будем использовать следующие обозначения: компоненты вектора перемещений координатной поверхности $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{w}$ в продольном $\bar{x}_1$, окружном $\bar{x}_2$ и нормальном $\bar{x}_3$ направлениях соответственно; углы поворота $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ единичного вектора нормали к координатной поверхности.

В сечении $\bar{x}_1 = \text{const}$ полный вектор и полный момент внутренних усилий раскладывается на усилия тангенциального растяжения $\bar{T}_{11}$, сдвига $\bar{T}_{12}$ и перерезывающую силу $\bar{Q}_1$; изгибный $\bar{M}_{11}$ и крутящий $\bar{M}_{12}$ моменты. В сечении $\bar{x}_2 = \text{const}$ – на усилия тангенциального растяжения $\bar{T}_{22}$, сдвига $\bar{T}_{21}$ и перерезывающую силу $\bar{Q}_2$; изгибный $\bar{M}_{22}$ и крутящий $\bar{M}_{21}$ моменты. Знак тильда над величиной перерезывающей силы обозначает обобщённую перерезывающую силу.

Контур Γ соответствует торцам оболочки, вершина разреза даётся координатами (x_1^C, x_2^C) .

Переход к системе безразмерных величин осуществляется с помощью следующих соотношений (чертой сверху обозначены размерные величины): безразмерные переменные: $x_i = \bar{x}_i / R$, $i = 1, 2$; безразмерные неизвестные функции задачи: $(u_1, u_2, w) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}) / h$; $T_{ij} = \bar{T}_{ij} / (Eh^3 / R^2)$; $M_{ij} = \bar{M}_{ij} / (Eh^4 / R^2)$; $\lambda = \bar{\lambda} / (Eh^4 / R^4)$.

Вариационная постановка нелинейной краевой задачи теории оболочек в данном случае представляет собой задачу отыскания экстремума следующего функционала

$$\begin{aligned}
 I = \Pi + A = & \iint_{\Omega} \left[\alpha_1 T_{11}^2 + \alpha_2 T_{22}^2 + \alpha_3 M_{11}^2 + \alpha_4 M_{22}^2 + \alpha_5 T_{11} T_{22} + \alpha_6 T_{11} M_{11} + \right. \\
 & + \alpha_7 T_{11} M_{22} + \alpha_8 T_{22} M_{11} + \alpha_9 T_{22} M_{22} + \alpha_{10} M_{11} M_{22} + \alpha_{11} T_{12}^2 + \\
 & + \alpha_{12} M_{12}^2 + \alpha_{13} T_{12} M_{12} + T_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) + \\
 & + T_{22} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - w + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) + T_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \theta_1 - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \theta_2 - \\
 & - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \theta_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \theta_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} w - Q_1 \theta_1 - (T_{11} \theta_1 + T_{12} \theta_2) \left(\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
 & + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} w - Q_2 \theta_2 - (T_{12} \theta_1 + T_{22} \theta_2) \left(\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \lambda w \Big] dx_1 dx_2 + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[T_{11}^* u + T_{12}^* v + \tilde{Q}_{11}^* w + M_{11}^* \theta_1 \right] dx_2 + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[T_{11} (u^* - u) - T_{12} (v^* - v) + \tilde{Q}_{11} (w^* - w) + M_{11} (\theta_1^* - \theta_1) \right] dx_2 \rightarrow \text{extr}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты α_i , $i = \overline{1, 13}$ определяются соотношениями, получаемыми из закона Гука.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи (данной своей вариационной постановкой (1)) использовался метод итерационного разделения переменных [15], в рамках которого решение краевой задачи для уравнений в частных производных сводится к решению последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих только от одной координаты – продольной или окружной.

Способ формулировки указанных одномерных краевых задач предполагает, что условия на границах области определения исходной краевой задачи (для функции многих переменных) постоянны вдоль контуров вида $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$. В данном случае – случае

цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, – данное требование обуславливает необходимость разбиения исходной области на подобласти, чтобы обеспечить постоянство граничных условий на границах вида $x_2 = \text{const}$ для каждой подобласти. Здесь можно выделить три таких подобласти:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ 0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2R} - l, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \frac{L}{2R} - l \leq x_1 \leq \frac{L}{2R} + l, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ \frac{L}{2R} + l \leq x_1 \leq \frac{L}{R}, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}.\end{aligned}$$

При этом на границах $x_1 = 0$ области Ω_1 и $x_1 = \frac{L}{R}$ области Ω_3 (торцы оболочки) должны выполняться условия шарнирного опирания, на границах $x_1 = \frac{L}{2R} - l$ (областей Ω_1 и Ω_2) и $x_1 = \frac{L}{2R} + l$ (областей Ω_2 и Ω_3) – условия непрерывности перемещений u_1 , u_2 , w на границах $x_2 = 0$ и $x_2 = 2\pi$ областей Ω_1 и Ω_3 – условия периодичности решения, наконец, на границах $x_2 = 0$ и $x_2 = 2\pi$ области Ω_2 (берега разреза) – условия свободного края.

В каждой из подобластей вектор неизвестных функций задачи представляется в виде:

$$U(x_1, x_2) = \left\{ U_j^{(i)}(x_1, x_2) \right\} = \left\{ h_j^{(i_1)}(x_1) g_j^{(i_2)}(x_2), i \rightarrow \infty \right\} \Big|_{j=\overline{1,13}},$$

где $i_1 = i$, $i_2 = i - 1$ для чётных i , $i_1 = i - 1$, $i_2 = i$ для нечётных i (индекс, отвечающий номеру подобласти, опущен для краткости изложения). Функции одной переменной $h_j^{(i)}(x_1)$, $g_j^{(i)}(x_2)$ являются независимо варьируемыми внутри соответствующей подобласти. Таким образом, соответствующая эквивалентная вариационная формулировка представима в виде:

$$U(x_1, x_2) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\arg \min_{U_j^{(i)}(x_1, x_2)} I(U_j^{(i)}(x_1, x_2)) \right]. \quad (2)$$

При построении вариационной производной функционала (1) по функциям $h_j^{(i)}(x_1)$ и $g_j^{(i)}(x_2)$ функции $g_j^{(i-1)}(x_2)$ и $h_j^{(i-1)}(x_1)$ являются известными, поскольку они уже найдены на предыдущей итерации итерационного процесса.

Следует подчеркнуть, что итерационный процесс, определяемый (2), эквивалентен обобщённому методу Канторовича, применённому к решению нелинейной краевой задачи (1).

В качестве критерия окончания таким образом сформулированного итерационного процесса использовалось малость изменения функционала упругой энергии на последовательных итерациях. Векторы $h(x_1)$ и $g(x_2)$ определяются как $h(x_1) = \{h_i(x_1)\}$, $i = \overline{1,8}$, $g(x_2) = \{g_i(x_2)\}$, $i = \overline{1,8}$.

Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи (данной своей вариационной формулировкой) сводится к отысканию решений последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh_j^{(i)}}{dx_1} = f_j^{x_1} \left(h^{(i)}(x_1), a^{x_2}, \lambda \right), \quad j = \overline{1,8}, \quad x_1 \in [0; L/R], \quad (3)$$

$$\frac{dg_j^{(i)}}{dx_2} = f_j^{x_2} \left(g^{(i)}(x_2), a^{x_1}, \lambda \right), \quad j = \overline{1,8}, \quad x_2 \in [0; 2\pi]. \quad (4)$$

Здесь компоненты векторов a^{x_1} , a^{x_2} представляют собой определённые интегралы от компонент вектор-функций $h(x_1)$ и $g(x_2)$, вычисленных на предыдущей итерации. А именно, компоненты вектора a^{x_2} зависят от $g^{(i-1)}(x_2)$:

$$a_j^{x_2} = \int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2 \quad \text{— для коэффициентов линейных членов уравнения (3);}$$

$$a_j^{x_2} = \int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) g_{j_3}^{(i-1)}(x_2) dx_2 \quad \text{— для коэффициентов нелинейных членов уравнения (3).}$$

Аналогично, компоненты вектора a^{x_1} зависят от $h^{(i-1)}(x_1)$:

$$a_j^{x_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) dx_1 \quad \text{— для коэффициентов линейных членов уравнения (4);}$$

$$a_j^{x_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) h_{j_3}^{(i-1)}(x_1) dx_1 \quad \text{— для коэффициентов нелинейных членов}$$

уравнения (4). Здесь пределы интегрирования α_0 , α_1 различны для различных областей Ω_s , $s = \overline{1,3}$ и определяются границами данных областей в продольном направлении.

Указанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений должны быть дополнены точечными граничными условиями на границах промежутков интегрирования.

Для отыскания решений вышеуказанных нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши типа метода Ньютона в сочетании с методом продолжения по параметру [15]. В указанном источнике также приведен подход к анализу структуры ветвления в окрестности особых точек решения и получения закритических ветвей решения.

Разбиение области Ω на подобласти приводит к появлению условий, связывающих сомножители решения, зависящие от окружной координаты, для различных подобластей: указанные условия представляют собой разность соответствующих интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2, \quad \text{вычисленных для различных подобластей.}$$

Следует отметить, что вследствие наличия такого рода «интегральных» условий метод Ньютона утрачивает присущую ему квадратичную скорость сходимости; с другой стороны, размеры матрицы Фреше для вектора сомножителей решения в окружном направлении (с учётом необходимости применения приёма «врезания точек» в силу сильной изменяемости решения в данном направлении) становятся весьма значительными. Последнее обстоятельство обусловило необходимость вычисления сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, которые отвечают различным подобластям, в рамках

итерационного процесса («внутреннего» по отношению к итерационному процессу отыскания вектора неизвестных функций задачи $U(x_1, x_2) = \{U_j^{(i)}(x_1, x_2)\}$): на каждом шаге указанного процесса последовательно вычисляются решение, соответствующее подобласти Ω_1 ; решение, соответствующее подобласти Ω_2 с учётом «интегральных» условий, связывающих решение для первой и второй подобластей; решение, соответствующее подобласти Ω_2 с учётом «интегральных» условий, связывающих решение для второй и третьей подобластей.

Критерием окончания указанного итерационного процесса является малость изменения вектора сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, на двух последовательных итерациях. Процесс продемонстрировал высокую скорость сходимости (две-три итерации) за исключением самых первых шагов алгоритма движения по параметру, а также шагов алгоритма движения по параметру, следующих за сменой параметра, – в указанных случаях число итераций увеличивалось до десяти-пятнадцати итераций.

Для преодоления в процессе движения по параметру предельных точек решения использовался приём смены параметра [15]. При этом описанный выше итерационный процесс отыскания вектора сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, претерпевает изменения, связанные с необходимостью совместного вычисления матриц Фреше, отвечающих различным подобластям: здесь на каждом шаге итерационного процесса вначале осуществляется совместное (в рамках одного ньютоновского процесса) отыскание сомножителей решения, отвечающих различным подобластям, без учёта «интегральных»

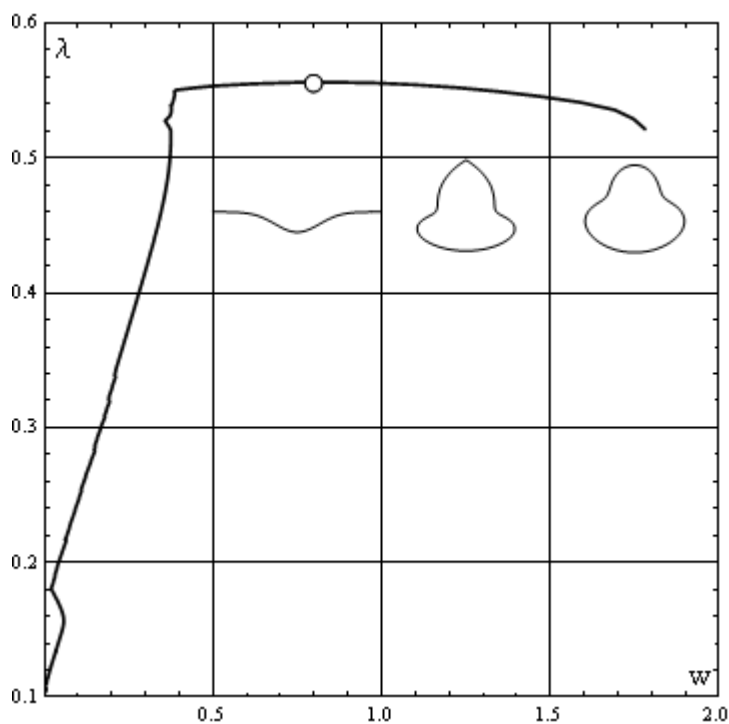


Рис. 1. Характерная зависимость нагрузка-прогиб для оболочки, ослабленной разрезом

условий, связывающих компоненты решения для различных подобластей; далее в рамках отдельных ньютоновских процессов осуществляется коррекция указанных величин для удовлетворения «интегральных» условий.

Для обращения матрицы Фреше в рамках ньютоновского процесса, в рамках которого осуществляется совместное отыскание сомножителей решения, отвечающих различным подобластям, использовалась формула обращения блочных матриц; в качестве начального приближения для данного итерационного процесса хорошо себя зарекомендовали решения, полученные путём организации ньютоновского процесса отдельно для каждой из подобластей.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ

Рассмотренный в предыдущем разделе алгоритм решения нелинейной краевой задачи был применён для отыскания и анализа структуры ветвления нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, при действии равномерного внешнего давления – задача дана своей вариационной постановкой (1).

Было установлено, что процесс потери устойчивости протекает в два этапа: на первом этапе происходит образование локальной вмятины в окрестности разреза, при этом оболочка сохраняет несущую способность. При дальнейшем увеличении значения параметра внешней нагрузки оболочка развивает формы деформации, близкие к формам деформации одна или две смежные локальные вмятины, которые фиксируются на ветвях вторичного ветвления для случая цилиндрической оболочки, не имеющей несовершенств [15]. В конечном итоге оболочка теряет устойчивость (и несущую способность) по одной из указанных форм.

На рис. 1 представлена характерная зависимость нагрузка-прогиб для цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом; величина параметра нагрузки здесь отнесена к величине критической нагрузки для целой оболочки, полученной в рамках линейной теории, характерные прогибы отнесены к толщине оболочки; кружком обозначена предельная точка зависимости. Представленная зависимость соответствует следующим значениям геометрических характеристик оболочки: $L/R = 4$, $R/h = 160$, $2l/L = 0.5$.

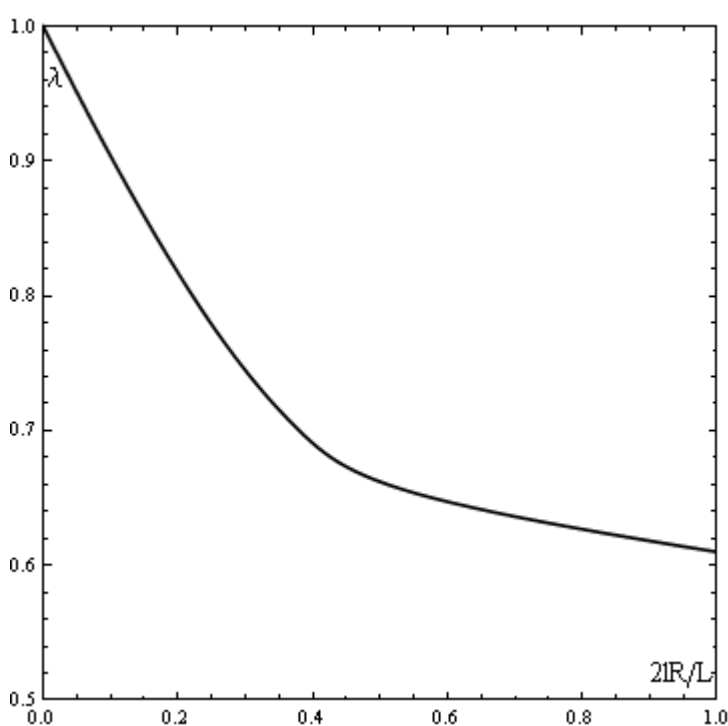


Рис. 2. Зависимость величины критической нагрузки от длины трещины

В данном случае локальная потеря устойчивости наблюдается при $\lambda = 0.18$, общая потеря устойчивости при $\lambda = 0.56$; последняя величина коррелирует с нижней границей области существования ветвей локальных форм для целой оболочки [15]. На рисунке также представлены сечения характерной закритической формы деформации оболочки: (слева направо) продольное сечение, поперечное сечение в области Ω_2 (содержащей разрез), и в области Ω_1 , которая не содержит разрез. Положение разреза соответствует верхней точке второго сечения. На рис. 2 представлена зависимость нагрузки потери устойчивости от длины трещины; область существования критических нагрузок соответствует области существования по параметру нагружения ветвей вторичного ветвления для случая целой оболочки.

ВЫВОДЫ

Приведенный выше анализ позволяет сформулировать следующие выводы:

1. Разбиение области определения нелинейной краевой задачи на подобласти, соответствующие одному типу граничных условий, позволяет применить методологию метода итеративного разделения переменных для случая области, на границах которой сформулированы различные типы граничных условий.
2. Наличие несовершенства в виде вертикального разреза служит инициатором развития форм деформации, близких к локальным формам деформации, фиксируемым на ветвях вторичного ветвления решения нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.
3. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной разрезом, по формам, подобным локальным формам деформации цилиндрической оболочки без начальных

несовершенств, обуславливает область значений нагрузок потери устойчивости для данного случая (0,6-1,0 в долях критической нагрузки, полученной в линеаризированной постановке для цилиндрической оболочки без начальных несовершенств), что эквивалентно области существования ветвей вторичного ветвления (ветвей локальных форм) для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, М.О. Соловей. – К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 300 с.
2. Бауэр С. М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – Санкт-Петербург : Издательство СПбГУ, 2000. – 92 с.
3. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / Я.М. Григоренко, В.Д. Будак, О.Я. Григоренко. – Миколаїв : Ілюн, 2010. – 294 с.
4. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Грищак. – М. : Машиностроение, 1986. – 240 с.
5. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J.N. Reddy. – N.-Y. : CRC Press, 2004. – 855 p.
6. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии : Т. 1. Разрушение в структуре материала / А.Н. Гузь. – К. : Литера, 2008. – 592 с.
7. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии : Т. 2. Родственные механизмы разрушения / А.Н. Гузь. – К. : Литера, 2008. – 736 с.
8. Lee M. C. W. Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures / M.C.W. Lee, Z. Mikulik, D.W. Kelly, R.S. Thomson, R. Degenhardt // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92. – P. 1469-1477.
9. Lindgaard E. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections / E. Lindgaard, E. Lund, K. Rasmussen // Int. J. Solids and Struct. – 2010. – Vol. 47. – P. 3186-3202.
10. Wang B. Determination of realistic worst imperfection for cylindrical shells using surrogate model / B. Wang, P. Hao, G. Li, Y. Fang, X. Wang, X. Zhang // Struct. Multidisc. Optim. – 2013. – Vol. 14. – P. 6-15.
11. Guarracino F. Some comments on the numerical analysis of plates and thin-walled structures / F. Guarracino, A. Walker // Thin-Walled Structures. – 2008. – Vol. 46. – P. 975-980.
12. Allahbakhsh H. Buckling of Cracked Laminated Composite Cylindrical Shells Subjected to Combined Loading / H. Allahbakhsh, M. Shariati // Appl. Compos. Mater. – 2012. – Vol. 14. – P. 631-638.
13. Estekanchi H. E. On the buckling of cylindrical shells with through cracks under axial load / H.E. Estekanchi, A. Vafai // Thin-Walled Structures. – 1999. – Vol. 35. – P. 255-274.
14. Vaziri A. Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression / A. Vaziri, H.E. Estekanchi // Thin-Walled Structures. – 2006. – Vol. 44. – P. 141-151.

15. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov. – N.-Y. : Springer, 2013. – 180 p.

REFERENCES

1. Bazhenov, V.A., Krivenko, O.P. and Solovei, M.O. (2010), *Neliniyne deformuvannya ta stiykist' pruzhnykh obolonok neodnorodnoy struktury* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells with non-homogeneous structure], Vipol, Kiev.
2. Bauer, S.M., Zimin, B.A. and Tovstik, P.E. (2000), *Prosteyshiye modeli teorii obolochek i plastin v oftal'mologii* [The simplest models of plate and shell theory for ophthalmology], Publishing house of Saint-Petersburg University, Saint-Petersburg.
3. Grigorenko, Ya., Budak, V.D. and Grigorenko, O.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii obolonok na osnovi dyskretno-kontinual'nykh metodiv* [Problems solving for shell theory with employment of discrete-continuous methods], Ilion, Nikolaev.
4. Preobrazhenskiy, I.N. and Grishchak, V.Z. (1986), *Ustoychivost' i kolebaniya konicheskikh obolochek* [Stability and oscillation of conical shells], Mashinostroenie, Moscow.
5. Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells", CRC Press, New York.
6. Guz, A.N. (2008), "Fundamentals of fracture mechanics for compressed composites: Vol. 1. Fracture of material structure", Litera, Kiev.
7. Guz, A.N. (2008), "Fundamentals of fracture mechanics for compressed composites: Vol. 2. Related fracture mechanisms", Litera, Kiev.
8. Lee, M.C.W., Mikulik, Z.D., Kelly, W., Thomson, R.S. and Degenhardt, R. (2010), "Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures", *Composite Structures*, vol. 92, pp. 1469-1477.
9. Lindgaard, E., Lund, E. and Rasmussen, K. (2010), "Nonlinear buckling optimization of composite structures considering "worst" shape imperfections", *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 47, pp. 3186-3202.
10. Wang, B., Hao, P., Li, G., Fang, Y., Wang, X. and Zhang, X. (2013), "Determination of realistic worst imperfection for cylindrical shells using surrogate model", *Struct. Multidisc. Optim.*, vol. 14, pp. 6-15.
11. Guarracino, F. and Walker, A. (2008), "Some comments on the numerical analysis of plates and thin-walled structures", *Thin-Walled Structures*, vol. 46, pp. 975-980.
12. Allahbakhsh, H. and Shariati, M. (2012), "Buckling of Cracked Laminated Composite Cylindrical Shells Subjected to Combined Loading", *Appl. Compos. Mater.*, vol. 14, pp. 631-638.
13. Estekanchi, H.E. and Vafai, A. (1999), "On the buckling of cylindrical shells with through cracks under axial load", *Thin-Walled Structures*, vol. 35, pp. 255-274.
14. Vaziri, A. and Estekanchi, H.E. (2006), "Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression", *Thin-Walled Structures*, vol. 44, pp. 141-151.
15. Obodan, N.I., Lebedeyev, O.G. and Gromov, V.A. (2013), "Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells", Springer, New York.

КОНЕЧНАЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ

¹Онищенко И. С., аспирант, ¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор,
²Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

¹Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина

²ООО «Завод Мастер-Профи»,
ул. Курсантская, 23, г. Днепропетровск, 49010, Украина

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

В рамках определяющих соотношений континуальной теории гипопруго-вязкопластичности с комбинированным упрочнением исследуется конечная деформация тонкостенной трубки при сложном нагружении. Задача расчета конечной деформации тонкостенной трубки при совместном действии растягивающего усилия и крутящего момента сведена к задаче Коши для системы трех квазилинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение теоретических данных с известными в литературе экспериментальными результатами для образцов из меди. Показано удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: вязкопластичность, гипопругость, конечные деформации, тонкостенная трубка.

КІНЦЕВА В'ЯЗКОПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ТОНКОСТІННОЇ ТРУБКИ

¹Онищенко И. С., аспирант, ¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор,
²Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

¹Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна

²ТОВ «Завод Мастер-Профі»,
вул. Курсантська, 23, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

У рамках визначальних співвідношень континуальної теорії гіпопружно-в'язкопластичності з комбінованим зміцненням досліджується кінцева деформація тонкостінної трубки при складному навантаженні. Завдання розрахунку кінцевої деформації тонкостінної трубки при спільній дії розтягуючого зусилля й обертового моменту зведена до задачі Коші для системи трьох квазілінійних диференціальних рівнянь. Проведено порівняння теоретичних даних з відомими в літературі експериментальними результатами для зразків з міді. Показано задовільну відповідність розрахункових і експериментальних даних.

Ключові слова: в'язкопластичність, гіпопружність, кінцеві деформації, тонкостінна трубка.

FINAL VISCO-PLASTIC DEFORMATION OF THIN-WALLED TUBE

¹Onischenko I. S., Graduate Student, ¹Chernyakov Yu A., D.Sc. in Physics and Maths,
²Shneider V.P., Ph.D. in Physics and Maths

¹Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine

²“Zavod Master-Profi”, LLC,
Cadets street, 23, Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

A number of theories proposed to describe the visco-plastic deformation of metals in a wide range of deformation rates and temperatures in the recent years. These theories are conventionally divided into two main groups; physical [3, 20, 23, 25, 27, 28] and phenomenological [13, 15]. In these works, special attention is paid to the description of viscoplastic deformation under uniaxial loading. But the development of strain hardening is not considered, although they are very

important to describe the deformation under complex loading. Defining relations of the continuum theory hypoelastic-viscoplastic combined hardening recorded in this paper. Finite deformation of thin-walled tubes under complex loading is studied in the framework of these relations. The problem of calculating the final deformation of thin-walled tubes under combined action of compressive force and torque is reduced to the Cauchy problem for a system of three quasi-linear differential equations. The author compared the theoretical results with the known in the literature [14], the experimental results for samples of copper and showed good agreement between the calculated and experimental data. Statement of the problem. Viewed viscoplastic deformation of thin-walled tube when specifying path loading. The loading is carried out by compressive force and torque. Physical stress rate is expressed in terms of full velocity gradient and visco-plastic deformation using hypo-elastic ratio. viscoplastic deformation is determined by the generalized continuum theory hypoelastic-viscoplastic. It is based on the following assumptions:

1. The gradient of the deformation rate in the current configuration is the sum of the elastic and plastic components. Each of these parts in turn, is the sum of the deformation and rotation speed.
2. The speed of the elastic deformation obeys hypoelastic relations with stiffness matrix, which depends on homologous temperature.
3. The rate of plastic deformation is defined in the standard way as the product of the velocity direction of visco-plastic deformation in the stress space in the current configuration and intensity of the true speed of viscoplastic deformation.
4. Deviator stress tensor is the sum of the active voltage or current and the internal "elastic" or residual stresses in the current configuration.
5. Submissions for thermally activated flow stress is selected

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) F\left(\frac{\bar{\tau}}{D}\right).$$

6. The rate of change of parameters of isotropic and kinematic hardening take proportional to the intensity and speed of visco-plastic deformation is given in summary form.

Ultimately, the problem of determining the stress-strain state is reduced to solving a system of four first order differential equations.

In the current configuration deviator of stress tensor is the sum of the active stresses or yield stresses and the internal "elastic: or residual stresses. The mechanism of occurrence of residual stresses is that the yield condition is corresponded to the total deformation and not elastic and plastic deformation apart. Hence the non-uniform distribution of the plastic deformation of grains always corresponds to the non-uniform elastic deformation, which results in internal elastic forces that provide resistance to plastic deformation (and in some cases, such as unloading and loading of opposite sign, on the contrary, help plastic deformation). This interpretation of the active and residual stress has been proposed in [1] and has been actively used in the construction of theories of thermo-viscoplastic. Note that the nature of the flow stress tensor introduced above is associated with short-range obstacles to dislocation motion, overcoming of which can contribute to the thermal activation [4, 22, 23, 28]. Residual stresses occur due to long-range obstacles resistance force related to the structure of the material and can not be overcome by the thermal energy of the crystal [23, 28]. Effect of temperature is only through the dependence of the elastic modulus on temperature. Representation for the thermally activated flow stresses have the highest diversity. For their construction, in its simplest form, the approach proposed in [28] is used.

The results presented show that a generalized version of the continuum theory of viscoplastic flow with combined hardening sufficient precision allows us to describe the behavior of copper under complex loading.

Key words: viscoplasticity, hypoelastic, finite deformation.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время предложен целый ряд теорий для описания вязкопластической деформации металлов в широком диапазоне скоростей деформации и температур. Эти теории условно разделяют на две основные группы; физические [3, 20, 23, 25, 27, 28] и феноменологические [13, 15]. В упомянутых работах особое внимание уделялось описанию вязкопластического деформирования при одноосном нагружении, тогда как вопросы развития деформационного упрочнения не рассматривались, хотя они очень важны для описания деформации при сложном нагружении.

В настоящей работе записаны определяющие соотношения континуальной теории гипопруго-вязкопластичности с комбинированным упрочнением. В рамках этих соотношений исследуется конечная деформация тонкостенной трубки при сложном нагружении. Задача расчета конечной деформации тонкостенной трубки при совместном действии растягивающего усилия и крутящего момента сведена к задаче Коши для системы трех квазилинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение теоретических данных с известными в литературе [14] экспериментальными результатами для образцов из меди. Показано удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трубку, которая находится под действием растягивающего усилия и крутящего момента. Пусть L , R_1 и R_2 обозначают начальную длину, внутренний и внешний радиусы трубки, соответственно. Начало координат расположим в центре одного из концов трубки и ось Z совместим с осью трубки, тогда деформацию трубки при растяжении и кручении можно описать следующим образом:

$$r = \alpha R, \quad \theta = \Theta + \omega Z, \quad z = \lambda Z,$$

где (R, Θ, Z) и (r, θ, z) определяют положение материальной точки до и после деформации в цилиндрической системе координат, ω – относительный угол закручивания, α и λ – отношение радиусов и длин до и после деформации.

Используя кинематические соотношения можно построить градиент деформации $\mathbf{F}$ и градиент деформации скорости $\mathbf{L}$ [14]:

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \omega \alpha R_m \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_Z + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = & \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \dot{\omega} Z \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \dot{\omega} Z \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \\ & + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$ – базисные векторы в точке трубки до и после деформации, и $\dot{\phi}$ определяется как

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha R_m \dot{\omega}}{\lambda},$$

а $R_m = (R_1 + R_2)/2$ используется вместо R в тонкостенных трубках.

Для деформации скорости и вращения материала образца можем записать:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = -\frac{\dot{\lambda}}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\lambda}}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z - \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta.$$

Градиент деформации скорости $\mathbf{L} \equiv \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ в текущей конфигурации представляется как сумма упругой $\mathbf{L}^e$ и пластической $\mathbf{L}^p$ составляющих

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p.$$

Каждая из этих частей $\mathbf{L}$, в свою очередь, представляется как сумма деформации скорости $(\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^p)$ и вращения $(\mathbf{W}^e, \mathbf{W}^p)$:

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{eT}), \quad \mathbf{W}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e - \mathbf{L}^{eT}), \quad \mathbf{D}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{pT}), \quad \mathbf{W}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^{pT}).$$

Пусть P и M – осевое усилие и скручивающий момент в поперечном сечении трубки, соответственно. В таком случае напряжения в трубке будут

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{z\theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta,$$

где

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi r(R_2 - R_1)} = \frac{P}{2\pi\alpha R_m(R_2 - R_1)},$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \frac{M}{2\pi r^2(R_2 - R_1)} = \frac{M}{2\pi\alpha^2 R_m^2(R_2 - R_1)}.$$

Скорость по Яуманну для напряжений вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma^\nabla &= \dot{\sigma} - \mathbf{W} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W} = \\ &= (\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2} \right)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \\ &+ \left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2} \right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + (\dot{\sigma}_{zz} + \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \\ &+ \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\dot{\phi}\sigma_{\theta z}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{z\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Используя гипотезы соотношения

$$\sigma^{\nabla e} \equiv \dot{\sigma} - \mathbf{W}^e \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}^e = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e,$$

где $\dot{\sigma}$ – материальная скорость изменения тензора напряжений Коши, $\sigma^{\nabla e}$ – коротационная производная в системе координат вращающейся с упругим спином, $\mathbf{C}^e$ – постоянная матрица упругой жесткости, которая задается так:

$$\mathbf{C}^e = 2G(\theta) \left[\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \right].$$

Здесь $G(\theta) = G_0 g(\theta)$, θ – гомологическая температура ($\theta = T/T_{nl}$, T – текущая температура, T_{nl} – температура плавления), G_0 – упругий модуль сдвига при $\theta = 0$, $g(\theta)$ – функция, характеризующая зависимость упругого модуля сдвига от температуры, ν – коэффициент Пуассона, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{I}$ единичные тензоры второго и четвертого ранга, соответственно. Наиболее приемлемое выражение для функции $g(\theta)$ введено в работе [26]

$$g(\theta) = 1 - \theta \exp[\theta^*(1 - 1/\theta)],$$

где θ^* – константа материала.

Можем записать

$$\sigma^\nabla = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \mathbf{W}^p \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}^p.$$

Скорость пластической деформации и пластического вращения определим стандартным образом:

$$\dot{\mathbf{D}}^p = \dot{p}\mathbf{N}, \quad \mathbf{W}^p = \dot{p}\mathbf{M},$$

где $\mathbf{N}$ – направление скорости вязкопластической деформации в пространстве напряжений в текущей конфигурации, $\mathbf{M}$ – антисимметричный тензорный сомножитель $\dot{p}$ – интенсивность скорости истинной вязкопластической деформации ($\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$), $\mathbf{s}$ – девиатор тензора напряжений Коши ($\mathbf{s} = \sigma - \text{tr}(\sigma)\mathbf{I}/3$). В дальнейшем используется упрощенной формой, предложенной в работе [14]:

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{2\eta},$$

где

$$\eta = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha})}.$$

Наибольшим разнообразием отличаются представления для построения термически активированных напряжений течения. В простейшем варианте, используется подход, предложенный в работе [29] с использованием параметра $Z = \dot{p} \exp(Q/kT)$, который учитывает совместное влияния скорости деформации $\dot{p}$ и температуры T на напряжение течения $\bar{\tau}(Z)$, где Q – энергия активации, и k – постоянная Больцмана. Используя этот подход, можем записать:

$$\dot{p} = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sinh\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau_0 + r(p)}\right)^m,$$

где

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - g(\theta)\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : (\mathbf{s} - g(\theta)\bar{\boldsymbol{\alpha}})}, \quad \theta_0 = \frac{Q_0}{kT_{nl}}.$$

Скорость изменения параметров изотропного и кинематического упрочнения примем пропорциональными интенсивности скорости вязкопластической деформации и зададим в обобщенном виде, как и в работе [14]:

$$\dot{r} = E_d(r) \dot{p}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega} = \mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\alpha}) \dot{p},$$

$$E_d = \beta(d_0 - d), \quad \mathbf{E}_\alpha = \sum_i^n \mathbf{E}_\alpha^{(i)}, \quad \mathbf{E}_\alpha^{(i)} = \beta_c^{(i)} [\alpha_c^{(i)} \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}^{(i)}], \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)},$$

где E_d и $\mathbf{E}_\alpha$ – коэффициенты упрочнения, $\boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega}$ – коротационная скорость, с вращением подструктуры материала. Следуя работе [14], представим ее в виде:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega} = \boldsymbol{\alpha}^\nabla + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{W}^p.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}^\nabla$ – скорость по Яуманну от $\boldsymbol{\alpha}$.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Заменяя в определяющих соотношениях скорости деформации и напряжений по формулам и, приходим к системе четырех уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$ и $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$. Представим эту систему в следующем виде:

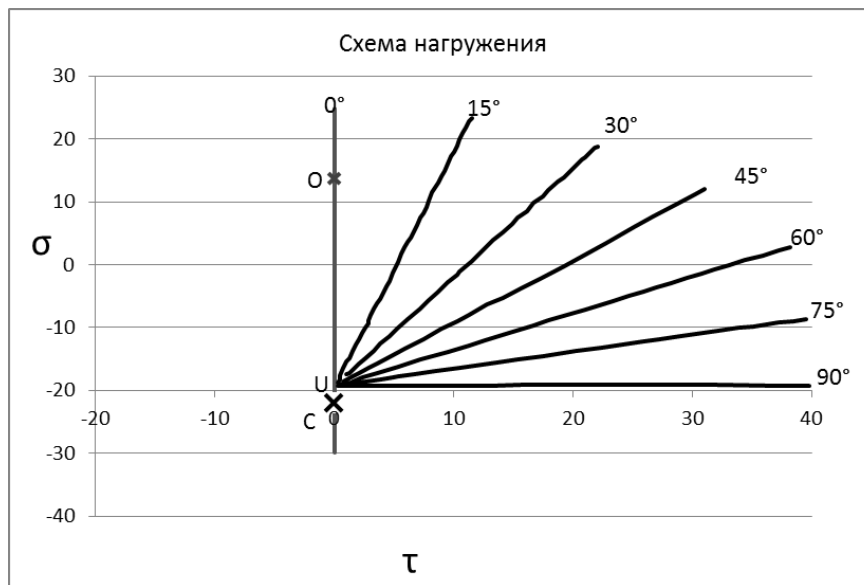
$$\begin{cases} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \nu \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = (1 - 2\nu) N_{11} \dot{p}, \\ 4G(\theta) \nu \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + 2G(\theta)(1 - \nu) \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sigma_{\theta z} (1 - 2\nu) \dot{\phi} = \dot{\sigma}_{zz} (1 - 2\nu) + (2G(\theta) N_{33} + 2M_{32} \sigma_{23})(1 - 2\nu) \dot{p}, \\ (G(\theta) - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \dot{\phi} = \dot{\sigma}_{\theta z} + (2G(\theta) N_{23} + (\sigma_{33} - \sigma_{22}) M_{23}) \dot{p}, \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} = (C_{2211}^e + C_{2222}^e) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + C_{2233}^e \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + (C_{2223}^e + \sigma_{\theta z}) \dot{\phi} - (2G(\theta) N_{22} + 2M_{23} \sigma_{32}) \dot{p}. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** воспользуемся методом Эйлера. Если теперь задать траекторию нагружения $\sigma = \sigma_{zz}(t), \tau = \sigma_{\theta z}(t)$, то в результате

пошагового решения системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** находим $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$ и определяем деформацию $\varepsilon = 1 - 1/\dot{\lambda}$, $\gamma = \frac{\dot{\phi}\dot{\alpha}}{\dot{\lambda}}$ можно построить соответствующую траекторию деформации.

Для проверки работоспособности теории использовались экспериментальные данные, полученные в работе [14] при испытаниях тонкостенных трубчатых образцов из отожженной меди (OFHC) при растяжении приблизительно до 13% и при совместном кручении с растяжением приблизительно до 10%.

Траектории нагружения показаны на рис. 1, на котором участок $O \rightarrow C$ представляет собой первую стадию нагружения кручением до пластического состояния, участок $C \rightarrow U$, отвечает частичной разгрузке образца. На втором этапе нагружения реализовывалось



совместное кручение со сжатием вдоль лучей, начинающихся из точки U, под углами, 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° и 180° к оси касательного напряжения.

Рис. 1. Траектория нагружения в плоскости $\sigma - \sqrt{3}\tau$

В представленных выше соотношениях для описания упругого поведения используются два параметра, G и ν , а для описания вязкопластического поведения, начальный предел текучести σ_y и его изменение при изотропном упрочнении R_m . Для описания кинематического упрочнения приняты следующие параметры $\alpha_v^{(1)}$, $\alpha_v^{(2)}$, $\beta_v^{(1)}$ и $\beta_v^{(2)}$. Все эти параметры являются характеристиками материала и должны быть определены из экспериментальных данных. Для этого использовались экспериментальные данные зависимости натуральной деформации сдвига от касательного напряжения при знакопеременном нагружении. В результате подбора были получены следующие значения констант материала.

Таблица 1

G_0 , ksi*	ν	σ_y , ksi*	β	d_0	$\alpha_c^{(1)}$	$\alpha_c^{(2)}$	$\beta_c^{(1)}$	$\beta_c^{(2)}$	$\dot{\rho}_0$, 1/с	m	T_{nl} , К	T , К	θ^*
3442	0,33	3	4,8	35	2,2	1,7	115	60	$5 \cdot 10^6$	20	1356,5	296	0,9

*ksi – 1000 фунтов на квадратный дюйм

На рис. 2 показаны экспериментальные данные и результаты расчета записанной здесь

теории для деформации сдвига. Установлено, что теория хорошо описывает экспериментальные данные. Это понятно и разумно, потому что использовались данные в четырех точках C, D, E и F для оценки материальных параметров моделей.

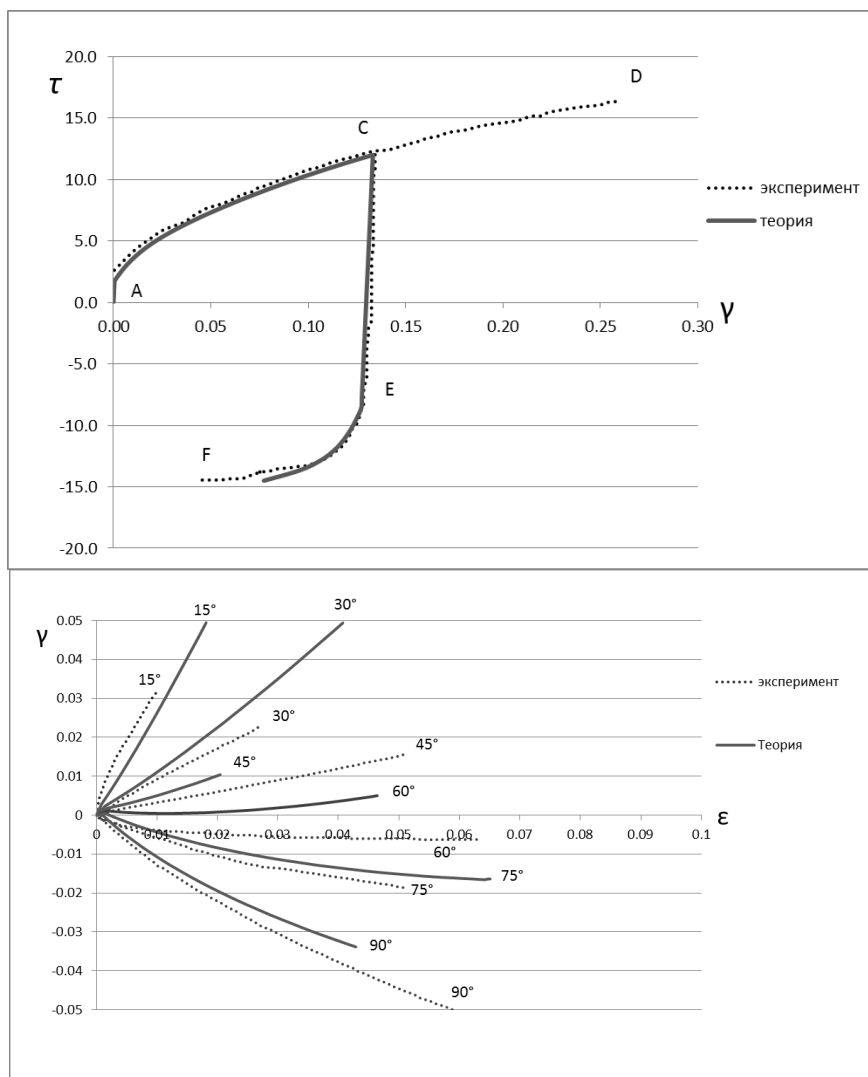


Рис. 2. Сравнение зависимости касательного напряжения – деформация сдвига при кручении – (эксперимент, теория)

Рис. 3. Приведены результаты связи касательного напряжения - деформации сдвига

ВЫВОДЫ

Представленные результаты показывают, что обобщенный вариант континуальной теории вязкопластического течения с комбинированным упрочнением с достаточной для инженерной практики точностью позволяет описывать поведение меди при сложном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 78-89.
2. Armstrong R. W. Thermal activation strain rate analysis (TASRA) for polycrystalline metals / R.W. Armstrong // J. Sci. Ind. Res. India. – 1973. – 32. – P. 591-598.
3. Bodner S. R. Constitutive equation for elastic-viscoplastic strain-hardening materials/ S.R. Bodner, Y. Partom // ASME J. Appl. Mech. –1975. – 42. – P. 385-389.

4. Bonora N. Constitutive modeling for ductile behavior incorporating strain rate, temperature, and damage mechanics / N. Bonora, P.P. Milella // *Int. J. Impact. Eng.* – 2001. – 26. – P. 53-64.
5. Cai M. C. A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials/ M.C. Cai, L.S. Niu, X.F. Ma, H.J. Shi // *Mechanics of Materials*. – 2010. – 42. – P. 774-781.
6. Chaboche J. L. Overview of some theories of plasticity and viscoplasticity / J.L. Chaboche // *International Journal of Plasticity*. – 2008. – 24. – P. 1642-1693.
7. Chen S. R. Constitutive behavior of tantalum and tantalum–tungsten alloys / S.R. Chen, G.T. Gray III // *Metall. Mater. Trans.* – 1996. – A 27. – P. 2994-3006.
8. Chen Y. High-Strain, High-Strain-Rate Deformation of Tantalum / Y. Chen // *Ph.D. Thesis, Materials Science, University of California*. – 1998.
9. Dafalias Y. F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation / Y.F. Dafalias // *J. Appl. Mech.* – 1983. – ASME 50. – P. 561-565.
10. Delobelle P. Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel / P. Delobelle, P. Robinet, L. Bocher // *Int. J. Plasticity*. – 1995. – 11. – P. 295-330.
11. Duprey K. Plastic flow of tantalum at high strain rates / K. Duprey, R.J. Clifton // In: *Proceedings of the Third International Conference on Tungsten and Refractory Metals, McLean, Virginia*. – 1995. – P. 473-479.
12. Hoge K. G. The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum/ K.G. Hoge, A.K. Mukherjee // *J. Mater. Sci.* – 1977. – 12. – P. 1666-1672.
13. Johnson G. R. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, large strain rates and high temperatures/ G.R. Johnson, W.H. Cook // In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands*. – 1983. – P. 541-547.
14. Khan A. S. Study of three elastic-plastic constitutive models by non-proportional finite deformations of OFHC copper/ A.S. Khan, P. Cheng // *International Journal of Plasticity*. – 1996. – Vol. 12, No. 6. – P. 737-759.
15. Khan A. S. Behaviors of three BCC metal over a wide range of strain rates and temperatures: experiments and modeling/ A.S. Khan, R. Liang // *Int. J. Plast.* – 1999. – 15. – P. 1089-1109.
16. Khan A. S. An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. II – experiments and predictions concerning thin-walled tubular OHFC copper / A.S. Khan, P. Cheng // *International Journal of Plasticity*. – 1998. – Vol. 14, N. 1-3. – P. 209-226.
17. Kocks U. F. Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case / U.F. Kocks, H. Mecking // *Prog Mater Sci.* – 2003. – 48. – P. 171-273.
18. Lassila D. The effect of grain boundaries on the athermal stress of tantalum and tantalum–tungsten alloys. / D. Lassila, A. Goldberg, R. Becker // *Metall. Mater. Trans.* – 2002. – A 33. – P. 3457-3464.
19. Lee B.-J. Modeling the mechanical behavior of tantalum / B.-J. Lee, K. Vecchio, S. Ahzi, S. Schoenfeld // *Metall. Mater. Trans.* – 1997. – A 28. – P. 113-122.
20. Liang R. Elastic–Plastic Constitutive Modeling of Tantalum and Aermet 100 Steel due to Quasi-Static and Dynamic Loadings / R. Liang // *Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Maryland*. – 1999.

21. Mecking H. A universal temperature scale for plastic flow / H. Mecking, B. Nicklas, N. Zarubova, U.F. Kocks // *Acta Metall. Mater.* – 1986. – 34. – P. 527-535.
22. Miller, A.K., Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield-surface distortion / A.K. Miller [In: Krauss, A.S., Krauss, K. (Eds.)] // *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. Academic Press Inc. – 1996. – P. 153-227.
23. Nemat-Nasser S. Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to Ta and Ta–W alloys / S. Nemat-Nasser, J. Isaacs // *Acta Metall.* – 1997. – 45. – P. 907-919.
24. Nemat-Nasser S. Flow stress of FCC polycrystals with application to OFHC Copper / S. Nemat-Nasser, Y. Li // *Acta Mater.* – 1998. – 46. – P. 565–577.
25. Rajendran A. Effects of strain rate on plastic flow and fracture in pure tantalum / A. Rajendran, R. Garrett, J. Clark, T. Jungling // *J. Mater. Shaping Technol.* – 1991. – 9. – P. 7-20.
26. Rusinek A. A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper / A. Rusinek, J.A. Rodriguez-Martinez, A. Arias // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2010. – 52. – P. 120-135.
27. Vecchio K. S. High-strain, high-strain-rate deformation of tantalum and tantalum-tungsten alloys / K.S. Vecchio // *J. Phys. IV France*. – 1994. – 4. – P. C8301-C8306.
28. Voyiadjis G. Z. Microstructural based models for BCC and FCC metals with temperature and strain rate dependency / G.Z. Voyiadjis, F.H. Abed // *Mech. Mater.* – 2005. – 37. P. 355-378.
29. Zener C. Effect of strain rate upon plastic flow of steel / C. Zener, J.H. Hollomon // *J. Appl. Phys.* – 1944. – 15. – P. 22-32.
30. Zerilli F. J. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations / F.J. Zerilli, R.W. Armstrong // *J Appl Phys.* – 1987. – 61. – P. 1816-1825.

REFERENCES

1. Kadashevich, Y.I. and Novozhilov, V.V. (1958), “The theory of plasticity, which takes into account the residual microtension”, *PMM*, vol. 22, is. 1, pp. 78-89.
2. Armstrong, R.W. (1973), “Thermal activation strain rate analysis (TASRA) for polycrystalline metals”, *J. Sci. Ind. Res. India*, 32, pp. 591-598.
3. Bodner, S.R. and Partom, Y. (1975), “Constitutive equation for elastic-viscoplastic strain-hardening materials”, *ASME J. Appl. Mech.*, 42, pp. 385-389.
4. Bonora, N. and Milella, P.P. (2001), “Constitutive modeling for ductile behavior incorporating strain rate, temperature, and damage mechanics”, *Int. J. Impact. Eng.*, 26, pp. 53-64.
5. Cai, M.C., Niu, L.S., Ma, X.F. and Shi, H.J. (2010), “A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials”, *Mechanics of Materials*, 42, pp. 774-781.
6. Chaboche, J.L. (2008), “Overview of some theories of plasticity and viscoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, 24, pp. 1642-1693.
7. Chen, S.R. and Gray III, G.T. (1996), “Constitutive behavior of tantalum and tantalum–tungsten alloys”, *Metall. Mater. Trans.*, A 27, pp. 2994-3006.
8. Chen, Y. (1998), “High-Strain, High-Strain-Rate Deformation of Tantalum”, *Ph.D. Thesis, Materials Science*, University of California.

9. Dafalias, Y.F. (1983), "Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation", *J. Appl. Mech.*, ASME 50, pp. 561-565.
10. Delobelle, P., Robinet, P. and Bocher, L. (1995), "Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel", *Int. J. Plasticity*, 11, pp. 295-330.
11. Duprey, K. and Clifton, R.J. (1995), "Plastic flow of tantalum at high strain rates", *In: Proceedings of the Third International Conference on Tungsten and Refractory Metals*, McLean, Virginia, pp. 473-479.
12. Hoge, K.G. and Mukherjee, A.K. (1977), "The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum", *J. Mater. Sci.*, 12, pp. 1666-1672.
13. Johnson, G.R. and Cook, W.H. (1983), "A constitutive model and data for metals subjected to large strains, large strain rates and high temperatures", *In: Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, The Hague, The Netherlands, pp. 541-547.
14. Khan, A.S. and Cheng, P. (1996), "Study of three elastic-plastic constitutive models by non-proportional finite deformations of OFHC copper", *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 6, pp. 737-759.
15. Khan, A.S. and Liang, R. (1999), "Behaviors of three BCC metal over a wide range of strain rates and temperatures: experiments and modeling", *Int. J. Plast.*, 15, pp. 1089-1109.
16. Khan, A.S. and Cheng, P. (1998), "An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. II – experiments and predictions concerning thin-walled tubular OFHC copper", *International Journal of Plasticity*, vol. 14, no. 1-3, pp. 209-226.
17. Kocks, U.F. and Mecking, H. (2003), "Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case", *Prog Mater Sci.*, 48, pp. 171-273.
18. Lassila, D., Goldberg, A. and Becker, R. (2002), "The effect of grain boundaries on the athermal stress of tantalum and tantalum–tungsten alloys", *Metall. Mater. Trans.*, A 33, pp. 3457-3464.
19. Lee, B.-J., Vecchio, K., Ahzi, S. and Schoenfeld, S. (1997), "Modeling the mechanical behavior of tantalum", *Metall. Mater. Trans.*, A 28, pp. 113-122.
20. Liang, R. (1999), "Elastic–Plastic Constitutive Modeling of Tantalum and Aermet 100 Steel due to Quasi-Static and Dynamic Loadings", *Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering*, University of Maryland.
21. Mecking, H., Nicklas, B., Zarubova, N. and Kocks, U.F. (1986), "A universal temperature scale for plastic flow", *Acta Metall. Mater.*, 34, pp. 527-535.
22. Miller, A.K., (1996), "Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield-surface distortion", *In: Krauss, A.S., Krauss, K. (Eds.), Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*, Academic Press Inc., pp. 153-227.
23. Nemat-Nasser, S. and Isaacs, J. (1997), "Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to Ta and Ta–W alloys", *Acta Metall.*, 45, pp. 907-919.
24. Nemat-Nasser S. Flow stress of FCC polycrystals with application to OFHC Copper. / Li Y. // *Acta Mater*- 1998- 46: 565–77.
25. Rajendran, A., Garrett, R., Clark, J. and Jungling, T. (1991), "Effects of strain rate on plastic flow and fracture in pure tantalum", *J. Mater. Shaping Technol.*, 9, pp. 7-20.

26. Rusinek, A., Rodriguez-Martinez, J.A. and Arias, A. (2010), "A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp. 120-135.
27. Vecchio, K.S. (1994), "High-strain, high-strain-rate deformation of tantalum and tantalum-tungsten alloys", *J. Phys. IV France*, 4, pp. C8301-C8306.
28. Voyiadjis, G.Z. and Abed, F.H. (2005), "Microstructural based models for BCC and FCC metals with temperature and strain rate dependency", *Mech. Mater.*, 37, pp. 355-378.
29. Zener, C. and Hollomon, J.H. (1944), "Effect of strain rate upon plastic flow of steel", *J. Appl. Phys.*, 15, pp. 22-32.
30. Zerilli, F.J. and Armstrong, R.W. (1987), "Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations", *J. Appl Phys.*, 61, pp. 1816-1825.

УДК 393.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ КОНТАКТУЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., професор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавіцька С. О.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Университетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини з тріщиною. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини будуть контактувати по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а у її вершинах утворюються пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу за лінійним розподілом напруження у них та виконанням умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі та задачі згину (класична теорія). Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розв'язування задачі зведено до задачі лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій необмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжину пластичної зони у вершині тріщини.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, зміцнення, пластичні зони.

ДВУХОСНЫЙ ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧНЫХ ЗОН В ЕЕ ВЕРШИНАХ И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., професор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавицкая С. О.

*Львовский национальный университет им. Ивана Франка,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформулирована и решена задача о двухосном изгибе распределенными изгибающими моментами на бесконечности изотропной пластины с трещиной. Предполагается, что под воздействием внешней нагрузки берега трещины контактируют по области постоянной ширины вблизи оснований пластины, а в ее вершинах образуются пластические зоны с учетом упрочнения материала по линейному распределению напряжения в них

и выполнением условий пластичности Треска в виде поверхностного слоя или пластического шарнира. С учетом контакта берегов трещины решение задачи представлено в виде суперпозиции двух задач: плоской задачи и задачу изгиба (классическая теория). С использованием методов теории функций комплексной переменной и комплексных потенциалов плоской задачи и классической теории изгиба пластин решения задачи сведено к задачам линейного сопряжения, получено их аналитическое решение задачи в классе функций, неограниченных в вершинах пластических зон. Численно определена длина пластической зоны в вершине трещины.

Ключевые слова: трещина, изгиб, изотропная пластинка, комплексные потенциалы, упрочнение, пластические зоны.

BIAXIAL BENDING ISOTROPIC PLATE WITH THROUGH A LINEAR CONTACTING CRACK IN THE PRESENCE OF THE PLASTIC ZONES IN THE VERTICES AND STRENGTHENING OF MATERIAL

Opanasovich V. K., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

Nykolyshyn M. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor, Alfavitska S. O.

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

A problem is formulated and untied about a biaxial bend by the up-diffused bend moments on endlessness of isotropic plate with a crack. It is assumed that under the action of the external loading the banks of crack will contact for the areas of permanent width near-by one of bases of plate, and in its tops plastic areas will appear taking into account strengthening of material at the linear distributing of tensions for them and by implementation of terms of plasticity of Tresca as a superficial layer or plastic a hinge. Due to the contact of banks of crack of upshots of task will give as superpozicii of two tasks: flat task and task of bend (classic theory). With the use of methods of theory of functions of complex variable and complex potentials of flat task and classic theory of bend of plates of untiiing of task it is erected to the task of linear interface, on the basis of which the analytical decision of task is got in the class of functions of unlimited in tops plastic areas. Numerical certainly length of plastic areas.

Key words: crack, bending, isotropic plate, complex potentials, strengthening, plastic zone.

ВСТУП

Елементи конструкцій у вигляді пластин дуже широко використовуються в різних галузях техніки та промисловості за дії різного зовнішнього навантаження, а в процесі їх експлуатації чи виготовлення можуть виникати тріщиноподібні дефекти, що призводить до зниження міцнісних і надійнісних характеристик конструкцій.

Дослідженням згину та розтягу пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів займалось багато дослідників, що відображено в монографіях [1-3] та ін. Задачу про згин нескінченної ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною із урахуванням контакту її берегів по лінії вперше розв'язав І.П. Шацький [6, 7], а дещо пізніше M.J. Young, C.T. Sun [8] отримали аналогічні результати. У працях Slepryan L.L., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. [9, 10], Опанасовича В.К. [11] враховано контакт берегів тріщин по області постійної ширини при згині пластини. Контакт берегів тріщини із урахуванням уточненої теорії згину пластини розглянуто в праці Опанасовича В.К., Яцика І.М., Сулима Г.Т. [12]. Задачі згину пластини (класична теорія) з тріщинами, береги яких гладко контактують по області постійної ширини, та отвором або жорсткою шайбою, розв'язані в працях Опанасовича В.К., Звізла І.С., Слободяна М.С., Бедрія В. Я. [13, 14]. У [15, 16] отримано розв'язки задач згину та розтягу пластин з тріщинами, у вершинах яких утворилися пластичні зони без урахування зміцнення матеріалу.

У роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластини досліджена задача двовісного згину ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності з наскрізною тріщиною, береги якої приходять у гладкий контакт по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а у вершинах тріщини наявні пластичні зони, з урахуванням зміцнення матеріалу та виконання умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи

пластичного шарніра [19]. Отримано рівняння для визначення довжини пластичних зон та проведено їх числовий аналіз при різних параметрах задачі.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, яка знаходиться в умовах двовісного згину розподіленими моментами на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів тріщини. Виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ у серединній площині з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по тріщині, а вісь $O\tilde{z}$ – перпендикулярно до серединної площини. Під дією зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини, а у вершинах тріщини наявні зміцнені пластичні зони завдовжки b . Довжину тріщини з пластичними зонами позначимо через $2d$, лінію, де розміщена тріщина, – через L , а пластичні зони – L_1 (див. рис. 1).

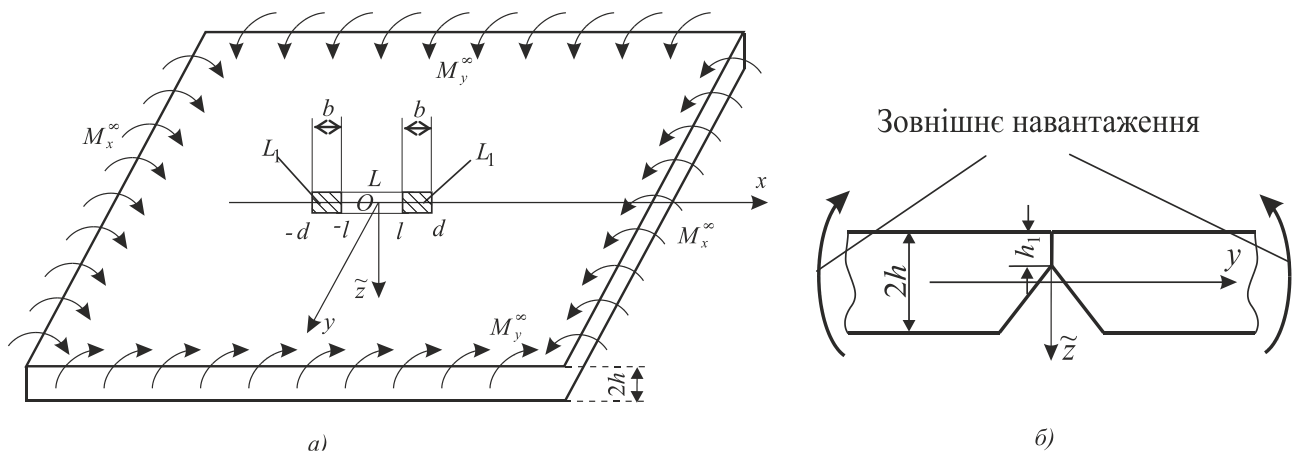


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

За рахунок контакту берегів тріщини сформульовану задачу розбиваємо на дві: плоску задачу та задачу згину (класична теорія згину пластин) за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad M_y^{\pm} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -N/(2h), \quad M_y^{\pm} = \beta h N, \quad [v] + \alpha h [\partial_y w] = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad P_y^{\pm} = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (3)$$

$$\sigma^*(x) = m^* + (1 - m^*)(|x| - l)/(d - l), \quad m^* = \sigma_e / \sigma_Y,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення по осях Ox і Oy у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – невідомі нормальні напруження в плоскій задачі та згинальний момент у пластичній зоні, для яких виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра [19]; N – контактне зусилля ($N > 0$); w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізуювальна сила у сенсі Кірхгофа; σ_e і σ_Y – границя міцності та границя текучості матеріалу; $[f] = f^+ - f^-$, де значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$, константи α і β мають вигляд [11]:

$$\alpha = 0,5 \{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h. \quad (4)$$

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Для визначення напружено-деформованого стану пластини введемо комплексні потенціали плоскої задачі $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та класичної теорії згину пластини $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$, [17, 18]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'_3(z), \quad (7)$$

$$f = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_3(z)}, \quad (8)$$

де $\mu = 0,5E/(1+\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини:

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, \quad f(x) = \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right) / m, \quad (9)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3-\nu)/(1+\nu), \quad \tilde{\kappa} = (3+\nu)/(1-\nu), \quad m = -D(1-\nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

c' – невідома дійсна стала, $D = 2Eh^3/3((1-\nu^2))$ – циліндрична жорсткість пластини.

Комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді [17, 18]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= O(1/z^2), \quad \Omega(z) = O(1/z^2), \\ \Phi_3(z) &= \tilde{\Gamma} + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O(1/z^2), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m},$$

M_x^∞ і M_y^∞ – розподілені згинальні моменти на нескінченності.

З крайових умов (1)-(3), можемо записати

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^+ - \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо врахувати (5) і (8), то крайові умови (11) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Урахувавши (10) та розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'. \quad (13)$$

Із крайових умов (2) і (3), врахувавши (5), (8), (9) та залежності (13), матимемо

$$\begin{aligned} N &= -2h(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in L, \\ M_y &= -ic' + m\{\tilde{\kappa}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\}, \quad x \in L. \end{aligned} \quad (14)$$

Якщо ввести функцію

$$F(z) = -2\beta h^2 \Phi(z) - m\tilde{\kappa} \Phi_3(z) + 0,5\{ic' + m((\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}')\}, \quad (15)$$

то з другої крайової умови (2) отримаємо

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in L. \quad (16)$$

Беручи до уваги крайові умови (1) та співвідношення (13), на основі (5) і (8) одержимо

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (17)$$

$$-ic' + m\{\tilde{\kappa}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1. \quad (18)$$

Виходячи з (17) і (18), отримаємо, що функція $F(z)$ (15) задовольняє умові

$$F^+(x) + F^-(x) = c \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (19)$$

де

$$c = -2h^2 \beta \sigma_0 - M_0. \quad (20)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (16) і (19), матимемо

$$F(z) = \frac{d_1 z + d_0}{X_1(z)} + \frac{1}{X_1(z)} \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{X_1^+(t) \sigma^*(t) dt}{t - z}, \quad (21)$$

де d_0, d_1 – невідомі сталі,

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (22)$$

Врахувавши (10) та поведінку функції $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ (16), на основі (21) можемо записати

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0,5(ic' - M_y^\infty). \quad (23)$$

З крайових умов (3), беручи до уваги (5), (8), (9), (13), одержимо

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x) + c_1)^+ + (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x) + c_1)^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$c_1 = -ic'/(m\tilde{\kappa}).$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (24) та врахувавши поведінку функції $\Phi(z)$ і $\Phi_3(z)$ на нескінченності (10), матимемо

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_3(z) = \Phi_3(z) - c_1 z / X_1(z) + c_1. \quad (25)$$

Із третьої крайової умови (2), врахувавши (6), (7) і (13), одержимо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ - (\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L, \quad (26)$$

де

$$\delta = \frac{\kappa + 1}{\alpha\mu h(1 + \tilde{\kappa})}.$$

Беручи до уваги (14) і (15), отримаємо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ + (\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = G(x), \quad x \in L_1, \quad (27)$$

де

$$G(x) = \delta\sigma_0\sigma^*(x) + 2\{M_0\sigma^*(x)/m + (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\}/\tilde{\kappa}. \quad (28)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (26), (27) має вигляд:

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \frac{\tilde{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{G(t)dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \tilde{d}X_0(z), \quad (29)$$

де

$$\tilde{X}_0(z) = \sqrt{\frac{z^2 - l^2}{z^2 - d^2}}, \quad \tilde{d} = 2\tilde{\Gamma}.$$

Подамо функції $\sigma^*(x)$ та $G(x)$ у вигляді:

$$\sigma^*(x) = a|x| + b, \quad (30)$$

$$G(x) = B|x| + A, \quad (31)$$

$$a = \frac{1 - m^*}{d - l}, \quad b = m^* - \frac{(1 - m^*)l}{d - l}.$$

$$A = \delta\sigma_0 b + 2\{M_0 b/m + (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\}/\tilde{\kappa}, \quad (32)$$

$$B = a[\delta\sigma_0 + 2M_0(m\tilde{\kappa})^{-1}].$$

Врахувавши (31), (32), співвідношення (29) перепишемо у вигляді:

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \tilde{X}_0(z)\rho_1(z) + \frac{A}{2\pi i} \tilde{X}_0(z) \int_{L_1} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \tilde{d}X_0(z), \quad (33)$$

де

$$\rho_1(z) = \frac{B}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{|t|dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}.$$

Після обчислення інтегралів у (33) [17], можемо записати

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \rho_1(z)\tilde{X}_0(z) + 0,5A + (\tilde{d} - 0,5A)\tilde{X}_0(z). \quad (34)$$

Беручи до уваги (25), (34) набуде вигляду

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) = 0,5A + c_1 z/X_1(z) - c_1 + (\tilde{d} - 0,5A + \rho_1(z))\tilde{X}_0(z). \quad (35)$$

Із (15) і (21) отримаємо

$$2\beta h^2 \Phi(z) + m\tilde{\kappa} \Phi_3(z) = d_1 + m\tilde{\kappa} \tilde{\Gamma} - \frac{d_1 z}{X_1(z)} - \frac{1}{X_1(z)} \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) X_1^+(t) dt}{t-z}. \quad (36)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) відносно $\Phi(z)$, $\Phi_3(z)$, матимемо

$$\Phi_3(z) = d_3 + f_3(z)/X_1(z), \quad \Phi(z) = d_5 + f_4(z)/X_1(z), \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(z) &= c_1 z + (\tilde{d} - 0,5A + \rho_1(z)) \sqrt{z^2 - l^2}, \quad f_2(z) = -d_1 z + \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) X_1^+(t) dt}{t-z}, \\ f_3(z) &= (\delta f_2(z) - 2\beta h^2 f_1(z))/\Delta, \quad f_4(z) = (m\tilde{\kappa} f_1(z) - 2f_2(z))/\Delta, \\ d_3 &= (\delta B_2 - 2\beta h^2 B_1)/\Delta, \quad d_5 = (m\tilde{\kappa} B_1 - 2B_2)/\Delta, \\ \Delta &= m\tilde{\kappa} \delta - 4\beta h^2, \quad B_1 = 0,5A - c_1, \quad B_2 = d_1 + m\tilde{\kappa} \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \quad (38)$$

Умова однозначності прогину пластини при обході тріщини з пластичними зонами має вигляд

$$\operatorname{Re} \int_K t \Phi_3(t) dt = 0, \quad (39)$$

де K – замкнутий контур, що охоплює тріщину з пластичними зонами.

Урахувавши (37) та застосувавши теорему про лишки при обчисленні інтеграла у (39), після відповідних перетворень одержимо, що $c' = 0$, а тому

$$c_1 = 0, \quad d_1 = -0,5M_y^\infty. \quad (40)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль k_1, k_2 і моментів K_1, K_2 визначимо за формулами [2]:

$$\begin{aligned} k_1 - ik_2 &= 4h\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow d} (\Phi(x) \sqrt{x-d}), \\ K_1 - iK_2 &= -2\sqrt{2}D(3+\nu) \lim_{x \rightarrow d} (\Phi_3(z) \sqrt{x-d}). \end{aligned} \quad (41)$$

Оскільки напружений стан в околі вершини пластичних зон має бути обмежений [21], то

$$k_i = 0, \quad K_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Беручи до уваги вираз для функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_3(z)$ (37), на основі (38) отримаємо

$$f_3(d) = 0, \quad f_4(d) = 0. \quad (43)$$

Урахувавши залежності для функцій $f_3(z)$ і $f_4(z)$ (38), з (43) одержимо

$$f_1(d) = 0, \quad f_2(d) = 0. \quad (44)$$

Звідки знаходимо

$$M_y^\infty = -\frac{2c}{\pi} \left(a\sqrt{d^2 - l^2} + b \arccos \frac{l}{d} \right), \quad (45)$$

$$M_0 = M_y^\infty / \left(b + \frac{2ad}{\pi} E(q) \right) + \frac{\tilde{\gamma} h^2}{6} \sigma_0, \quad (46)$$

де

$$E(q) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad \tilde{\gamma} = \frac{4(3+\nu)}{\alpha(1+\nu)}, \quad q = \frac{\sqrt{d^2 - l^2}}{d}.$$

Для знаходження σ_0 і M_0 скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [19] на нижній основі пластини

$$\sigma_0 + 3M_0 / (2h^2) = \sigma_Y. \quad (47)$$

Розв'язавши систему рівнянь (46) і (47) відносно σ_0 і M_0 , матимемо

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4(\pi b + 2\tilde{a}E(q) - \pi\tilde{\sigma})}{(\pi b + 2\tilde{a}E(q))(4 + \tilde{\gamma})}, \quad \tilde{M}_0 = \frac{3M_0}{2h^2\sigma_Y} = \frac{\tilde{\gamma}}{4 + \tilde{\gamma}} + \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)}, \quad (48)$$

де

$$\tilde{\sigma} = \frac{3M_y^\infty}{2h^2\sigma_Y}, \quad \tilde{a} = \frac{1 - m^*}{1 - \tilde{l}}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{d}.$$

Підставивши вирази σ_0 і M_0 (48) у (45), одержимо рівняння для визначення довжини пластичної зони $\tilde{l}$

$$\tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} (1 - 3\beta) + (1 + 3\beta) \right\} \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{l}^2} + b \arccos \tilde{l} \right) = 0.$$

Якщо скористатися умовою пластичного шарніру [19, 20]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y} \right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_Y} = 1, \quad (49)$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12}, \quad \tilde{M}_0 = \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12} \frac{\tilde{\gamma}}{4}, \\ \rho(\tilde{d}) &= 1 - \frac{2}{3} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)}, \quad q = \sqrt{\frac{1}{\tilde{l}^2} - 1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Для знаходження $\tilde{l}$ в цьому випадку будемо мати рівняння

$$\tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12} \right) \left(3\beta + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \right) + \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} \right\} \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{l}^2} + b \arccos \tilde{l} \right) = 0.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Проведений числовий аналіз задачі для $\nu = 0,3$, який поданий на рис. 2, де суцільні лінії отримані з використанням умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніру.

На рис. 2 подано графічні залежності зведеної довжини пластичної зони $\tilde{b}$ при різних параметрах задачі. Рис. 2 а) та рис. 2 б) побудовані при $m^* = 1,5$, а рис. 2 в) – при $\gamma = 0,13$. На рис. 2 а) наведено графічні залежності $\tilde{b}$ від $\tilde{\sigma}$ кривій 1 відповідає $\gamma = 0$ (контакт берегів тріщини по лінії), кривій 2 – $\gamma = 0,13$, криві 3 – $\gamma = 0,2$. На рис. 2 б) подана залежність $\tilde{b}$ від параметра γ , кривій 1 відповідає $\tilde{\sigma} = 0,3$, кривій 2 – $\tilde{\sigma} = 0,5$, кривій 3 – $\tilde{\sigma} = 0,7$. На рис. 2 в) наведено графічні залежності $\tilde{b}$ від m^* , кривій 1 відповідає $\tilde{\sigma} = 0,3$, кривій 2 – $\tilde{\sigma} = 0,6$, кривій 3 – $\tilde{\sigma} = 0,8$.

З рис 2 а) можна зробити висновок, що із зростанням відносного зовнішнього навантаження $\tilde{\sigma}$ довжина пластичної зони $\tilde{b}$ у вершинах тріщини зростає. Як видно з рис. 2 б), із зростанням відносної висоти контакту берегів тріщини γ довжина пластичної зони $\tilde{b}$ збільшується, а з рис. 2 в) бачимо, що із збільшенням m^* величина $\tilde{b}$ зменшується. Числовий аналіз показав, що довжина пластичної зони при використанні умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару є більшою, ніж при використанні умови пластичності у вигляді пластичного шарніра.

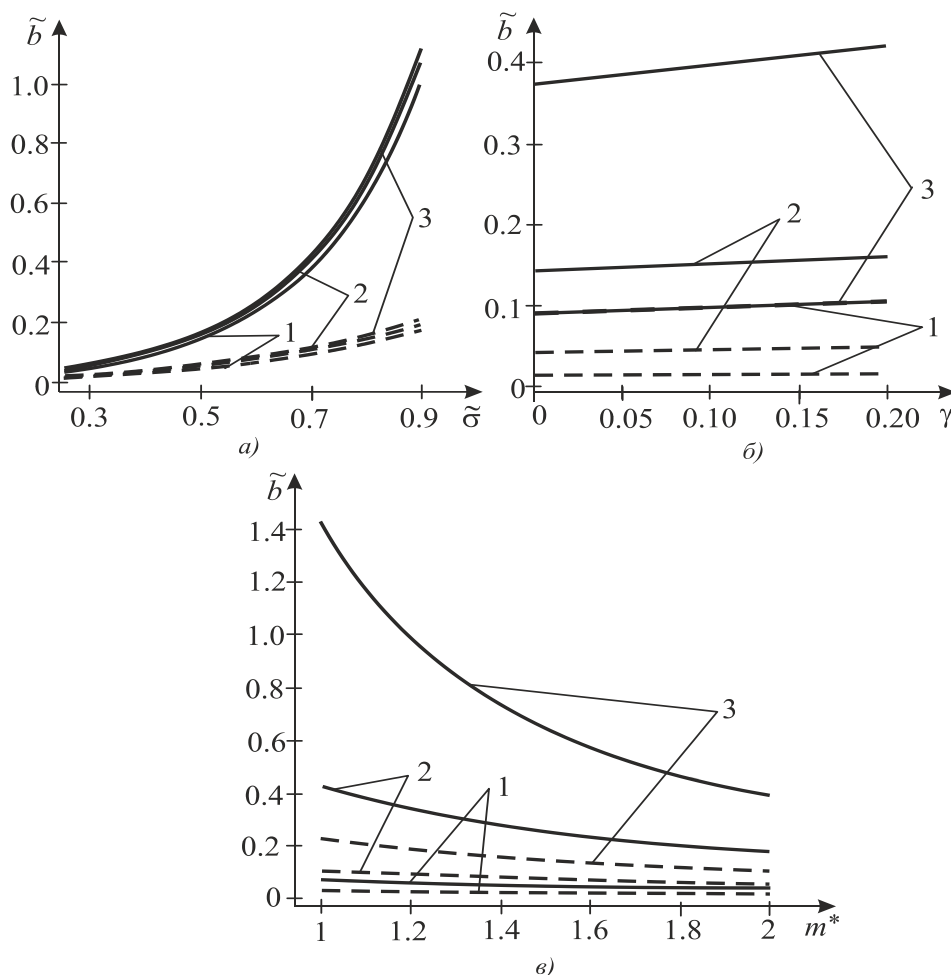


Рис. 2. Графічні залежності зведеної довжини пластичної зони $\tilde{b}$ при різних параметрах задачі

ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявський, В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Саврук М. П. Двухмерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1988. – 324 с.

3. Мазурак Л. П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницкий. – К. : Наукова думка, 1990. – 256 с.
4. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F. S. Jr. Heming // International Journal of Fracture. – 1980. – **16**, №4. – P. 289-304.
5. Hui C. Y. A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments / C.Y. Hui, T. Zehnder Alan // International Journal of Fracture. – 1993. – **61**. – P. 211-229.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – С. 49-51.
7. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / І.П. Шацький // Доповіді НАН України. – 1995. – №10. – С. 62-64.
8. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
9. Slepian L. L. Asymptotic solution for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.L. Slepian, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // International Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – **43**. – P. 1727-1749.
10. Dempsey J. P. Closure of a through crack in a plate under bending / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepian // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – **35**. – P. 4077-4089.
11. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету : міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). – 2007. – Вип. 20(2). – С. 123-127.
12. Опанасович В. К. Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.М. Яцик, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, №4. – С. 71-81.
13. Опанасович В. К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 240-246.
14. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 222-230.
15. Знаходження довжини пластичних зон біля вершини наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини / М.М. Николишин, В.К. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2013. – Вип. 21. – С. 192-200.
16. Опанасович В. Згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів за наявності пластичних зон у її вершинах / В. Опанасович, М. Слободян // Механіка руйнування матеріалів та міцності конструкцій : зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. – С. 403-408.
17. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М. : Наука, 1966. – 707 с.

18. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
19. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
20. Кир'ян В. І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин. – Львів : СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
21. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1968. – 248 с.

REFERENCES

1. Berezhnyts'kyi, L.T., Delyavs'kyi, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects type of cracks], Naukova Dumka, Kiev.
2. Savruk, M.P. (1988), "The two-dimensional problem of elasticity for bodies with cracks", Naukova dumka, Kyiv.
3. Mazurak, L.P. and Berezhnytskyi, L.T. (1990), "Bending transversely isotropic plates with defects such as cracks", Naukova dumka, Kyiv.
4. Heming, F.S.Jr. (1980), "Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate", *International Journal of Fracture*, **16**, no. 4, pp. 289-304.
5. Hui, C.Y., and Zehnder Alan, T. (1993), "A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments", *International Journal of Fracture*, **61**, pp. 211-229.
6. Shatskiy, I.P. (1988), "Plate bending, weakened cut with contacting shores", *Dopovidi AN URSS, Seria A, Fiziko-matematichni ta tehnicni nauki*, no. 7, pp. 49-51.
7. Shats'kyi, I.P. (1995), "Limit equilibrium plate with collinear cracks in the combined bending and stretching", *Dopovidi NAN Ukrayiny*, no. 10, pp. 62-64.
8. Young, M. and Sun, C. (1992), "Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates", *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81-93.
9. Slepyan, L.L., Dempsey, J.P. and Shekhtman, I.I. (1995), "Asymptotic solution for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending", *International Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **43**, pp. 1727-1749.
10. Dempsey, J.P., Shekhtman, I.I. and Slepyan, L.L. (1998), "Closure of a through crack in a plate under bending", *International Journal of Solids and Structures*, **35**, pp. 4077-4089.
11. Opanasovych, V.K. (2007), "Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces", *Naukovi notatki Luts'kogo tekhnichnogo universitetu*, issue 20(2), pp. 123-127.
12. Opanasovych, V.K., Yatsyk, I.M. and Sulym, H.T. (2012), "Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces", *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, **187**, no. 5, pp. 620-634.
13. Opanasovych, V.K., Zvizlo, I.S. and Slobodyan, M.S. (2012), "Bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack inside the washer with taking into account contact it's shores", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky ta mitsnosti konstruktsiy*, issue 19, pp. 240-246.

14. Opanasovych, V., Slobodyan, M. and Bedriy, B. (2012), "Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores", *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, issue 76, pp. 222-230.
15. Nykolyshyn, M.M., Opanasovych, V.K., Kurotchyn, L.R. and Slobodyan, M.S. (2013), "Finding the length of plastic zones near the top of through cracks on a straight-line interface materials at stretching piecewise homogeneous isotropic plate", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 192-200.
16. Opanasovych, V. and Slobodyan, M. (2014), "Bending isotropic plate with a through crack straightforward considering the width of the contact area of the coast in the presence of plastic zones at its top", *Zbirnyk naukovykh prats' 5-oyi Mizhnarodnoyi konferentsiyi "Mekhanika ruynuvannya materialiv ta mitsnosti konstruktsiy"*, pp. 403-408.
17. Muskhelyshvily, N.Y. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.
18. Prusov, Y.A. (1975), *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The method of conjugation in the theory of plates], Izdatelstvo Belorusskogo universitetu, Minsk.
19. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M. and Osadchuk, V.A. (2003), *Pruzhnyi ta pruzhno-plastychnyi granychnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastic-plastic boundary state membranes with defects], SPOLOM, Lviv.
20. Kyr"yan, V.I., Osadchuk, V.A. and Nykolyshyn, M.M. (2007), *Mekhanika ruynuvannya zvarnykh z'ednan' metalokonstruktsiy* [Fracture mechanics of welded joints of metal], SPOLOM, Lviv.
21. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noe ravnovesiye khrupkykh tel s treshchinami* [Limit equilibrium fragile bodies with cracks], Naukova dumka, Kyiv.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., профессор, Украинец Н. А., ст. преподаватель

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина*

nattalja2004@mail.ru

С помощью обобщенного метода Фурье решена первая основная задача теории упругости для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью, расположенной параллельно его границе. Этот метод основан на теоремах сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра. Общее решение задачи представляется в виде суперпозиции базисных решений для полупространства и цилиндра. Применение теорем сложения позволяют записать решение задачи в декартовой и цилиндрической системе координат и удовлетворить граничному условию на соответствующей поверхности. Так задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Оператор этой системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Это позволяет решить систему методом редукции. Численные расчеты показали его быструю сходимость.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, упругое полупространство, цилиндрическая полость, базисные решения уравнения Ламе, теоремы сложения, метод редукции

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ПІВПРОСТОРІ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., професор, Українець Н. А., ст. викладач

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна*

nattalja2004@mail.ru

За допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язана перша основна задача теорії пружності для пружного півпростору з круговою циліндричною порожниною, яка розташована паралельно його границі. Цей метод заснований на теоремах додавання базисних розв'язків однорідного рівняння Ламе для півпростору і циліндра. Загальний розв'язок задачі представляється у вигляді суперпозиції базисних розв'язків для півпростору і циліндра. Застосування теорем додавання дозволяє записати розв'язок задачі у декартовій та циліндричній системі координат та задовольнити граничні умови на відповідній поверхні. Таким чином задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оператор цієї системи є цілком неперервним у просторі l_2 за умови, що граничні поверхні не перетинаються. Це дозволяє розв'язати систему методом редукції. Чисельні розрахунки показали його швидку збіжність.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, пружний півпростір, циліндрична порожнина, базисні розв'язки рівняння Ламе, теореми додавання, метод редукції

APPLICATION OF THE GENERALIZED FOURIER METHOD TO SOLVE THE FIRST BASIC PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR THE SEMISPACE WITH THE CYLINDRICAL CAVITY

Protsenko V. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Ukrainets N. A.

*National Aerospace University named after N.Ye. Zhukovskiy «Kharkiv Aviation Institute»,
Chkalova str., 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

nattalja2004@mail.ru

The first basic problem of elasticity theory for the elastic semispace with the circular cylindrical cavity solved by means of the generalized Fourier method. Cylindrical cavity is parallel to the boundary of the semispace. The generalized Fourier method is based on addition theorems of the basis solutions of the homogeneous Lamé equations for the semispace and the cylinder. The proof of these theorems based on formulas which connect harmonic functions in Cartesian and cylindrical coordinate systems. The general solution of this problem represented as a superposition of basic solutions for the semispace and the cylinder. The use of the addition theorems allow to write the solution in Cartesian and cylindrical coordinate system and satisfy the boundary condition on the surface. Thus the problem reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The operator of this system is quite continuous in l_2 in case boundary surfaces are not intersect. The system solved by means of the reduction method. Numerical calculations showed its fast convergence. The generalized Fourier method allowed to determine the displacements and stresses in this area for the concrete parameter values and the boundary stresses.

Key words: generalized Fourier method, elastic semispace, cylindrical cavity, the basic solutions of the Lamé equation, addition theorems, reduction method

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и строительстве подземных туннелей, горных выработок, шахт и других подобных объектов возникает необходимость в методиках расчета их прочности и надежности. Так как в большинстве случаев такие объекты располагаются на относительно небольшой глубине, то влияние на них окружающей среды зависит от их удаленности или близости к земной поверхности. В качестве их физической модели можно рассмотреть бесконечно длинный полый цилиндр, находящийся в однородном и изотропном упругом полупространстве и расположенный параллельно его границе. Описанную таким образом область можно считать упругим многосвязным телом, для него решать основные задачи теории упругости и определять НДС, в частности, вблизи поверхности цилиндра.

Встречающиеся в литературе исследования проводились для упругого полупространства, имеющего полости конечных размеров (эллипсоидальную, сферическую, сферический разрез и щель). Для полупространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью были

рассмотрены основные задачи теории потенциала [1, с.42; 2, с.189]. В работах [3, с.52; 4, с.102; 5, с.17] решены вторая основная и смешанная задачи теории упругости для упругого полупространства с такой же полостью и проведено исследование НДС в указанном многосвязном теле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругое полупространство, заполненное однородной изотропной средой, содержащее бесконечную круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе. Обозначим эту пространственную область через Ω . Введем две одинаково ориентированные системы координат с совмещенными центрами: декартову $\{x, y, z\}$, ось Oy которой перпендикулярна границе полупространства, и цилиндрическую $\{\rho, \varphi, z\}$, ось Oz которой расположена вдоль оси цилиндра. Введем следующие обозначения: a – радиус цилиндра, h – расстояние от оси цилиндра до границы полупространства, S_1 – плоскость $y = h$, S_2 – цилиндрическая поверхность $\rho = a$. Тогда область Ω можно описать неравенствами: $\{y < h, \rho > a, h > a\}$.

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для области Ω . Будем искать решение однородного уравнения Ламе

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

в области Ω , удовлетворяющее на поверхностях S_1 и S_2 граничным условиям:

$$F\vec{u}|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x, z), \quad (2)$$

$$F\vec{u}|_{S_2} = F\vec{u}_{02}(\varphi, z). \quad (3)$$

В формулах (1)-(3) $\vec{u}$ и $F\vec{u}$ – векторы упругих перемещений и напряжений соответственно, σ – коэффициент Пуассона. Предположим, что заданные функции $F\vec{u}_{01}(x, z)$ и $F\vec{u}_{02}(\varphi, z)$ представимы в виде абсолютно сходящихся рядов и интегралов:

$$F\vec{u}_{01}(x, z) = \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_j(\lambda, \mu) e^{i\lambda z + i\mu x} d\lambda d\mu \vec{e}_j^{(1)}, \quad (4)$$

$$F\vec{u}_{02}(\varphi, z) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda) e^{i\lambda z + im\varphi} d\lambda \vec{e}_j. \quad (5)$$

Здесь $\vec{e}_j$ ($j=1, 2, 3$) выражаются формулами:

$$\vec{e}_1 = (\vec{e}_1^{(2)} + i\vec{e}_2^{(2)}) \frac{e^{i\varphi}}{2}, \quad \vec{e}_2 = (\vec{e}_1^{(2)} - i\vec{e}_2^{(2)}) \frac{e^{-i\varphi}}{2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{(2)}, \quad (6)$$

где $\vec{e}_j^{(k)}$ – орты декартовой ($k=1$) и цилиндрической ($k=2$) систем координат. При этом будем считать, что функции $C_j(\lambda, \mu)$ ($j=1, 2, 3$), ограничены, а ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda)$ абсолютно сходится при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (1)-(3) применим обобщенный метод Фурье [6, с.50; 7, с.83]. Он основан на использовании теорем сложения (формул переразложения) базисных решений уравнения

Ламе для полупространства и цилиндра, записанных соответственно в декартовой и цилиндрической системах координат. Этот метод позволяет удовлетворить граничным условиям и получить решения рассматриваемых задач с наперед заданной точностью.

Для каждой из граничных поверхностей S_1 и S_2 области Ω построим систему базисных решений уравнения (1). Внешние (внутренние) базисные решения для полупространства $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \left(\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right)$, регулярные в области $\{y > h\} (\{y < h\})$, и внутренние (внешние) базисные решения для цилиндра $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) \left(\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) \right)$, регулярные в области $\{\rho < a\} (\{\rho > a\})$, имеют вид [4, с.102]:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_1^{(1)} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu), \\ \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla (y u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)), \\ \vec{u}_3^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_3^{(1)} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu); \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(2)} r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) \quad (k=1, 2, 3; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(2)} s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) \quad (k=1, 2, 3; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \\ N_1^{(j)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_3^{(j)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(j)} \cdot) \quad (j=1, 2); \\ N_2^{(2)} &= \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right].\end{aligned}$$

Входящие в эти решения функции $u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)$, $r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $s_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$ являются декартовыми и цилиндрическими базисными решениями уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned}u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= e^{i(\mu x + \lambda z) \pm \gamma y}, \\ r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) &= e^{i(m\varphi + \lambda z)} I_m(\lambda \rho), \\ s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) &= (\text{sign} \lambda)^m e^{i(m\varphi + \lambda z)} K_m(|\lambda| \rho),\end{aligned}$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $-\infty < \lambda, \mu < \infty$.

С помощью соотношения [8, с.127]

$$F\vec{u} = 2G \left[\vec{n} \text{div} \vec{u} \frac{\sigma}{1-2\sigma} + (\vec{n}, \text{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} [\vec{n}, \text{rot} \vec{u}] \right],$$

где G – модуль сдвига, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности, получены формулы для напряжений, действующих на поверхности S_1 с нормалью $\vec{n}_1^{(\pm)} = \pm \vec{e}_y$:

$$\begin{aligned}F\vec{u}_1^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2G \left(\pm \frac{i\mu\gamma}{\lambda} \vec{e}_x + \frac{\gamma^2}{\lambda} \vec{e}_y \pm i\gamma \vec{e}_z \right) u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu), \\ F\vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2G \left(\frac{i\mu}{\lambda} (2\sigma - 1 \pm \gamma y) \vec{e}_x \pm \frac{\gamma}{\lambda} (2\sigma - 2 \pm \gamma y) \vec{e}_y \pm i(2\sigma - 1 \pm \gamma y) \vec{e}_z \right) u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu),\end{aligned}$$

$$F\vec{u}_3^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) = 2G \left(i \left(\frac{\gamma^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} \right) \vec{e}_x \pm \frac{\mu\gamma}{\lambda} \vec{e}_y \pm \frac{i\mu}{2} \vec{e}_z \right) u^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu)$$

и для напряжений, действующих на поверхности S_2 с нормалью $\vec{n}_2^{(+)} = -\vec{e}_\rho$:

$$F\vec{S}_{1,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = 2G\lambda \left(-\frac{\partial s_{m-1}(\rho, \varphi, z; \lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)} \vec{e}_1 - \frac{\partial s_{m+1}(\rho, \varphi, z; \lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)} \vec{e}_2 + i \frac{\partial s_m(\rho, \varphi, z; \lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)} \vec{e}_3 \right),$$

$$F\vec{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = 2G\lambda \left(-\left(|\lambda|\rho + \frac{(m-1)(m-1+2\sigma)}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-3) \frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)} \right) s_{m-1}(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_1 - \right. \\ \left. - \left(|\lambda|\rho + \frac{(m+1)(m+1-2\sigma)}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-3) \frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)} \right) s_{m+1}(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_2 + \right. \\ \left. + i \left(|\lambda|\rho + \frac{m^2}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-2) \frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)} \right) s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_3 \right),$$

$$F\vec{S}_{3,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = 2G\lambda \left(\frac{m-1}{|\lambda|\rho} s_{m-1}(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_1 + \frac{m+1}{|\lambda|\rho} s_{m+1}(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_2 - i \frac{m}{2|\lambda|\rho} s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) \vec{e}_3 \right).$$

Здесь $\vec{e}_j$ ($j=1, 2, 3$) заданы формулами (6).

При этом соотношения для напряжений $F\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, действующих на поверхности S_2 с нормалью $\vec{n}_2^{(-)} = \vec{e}_\rho$, получаются из формул для $F\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ с помощью замены $s_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$ на $r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $s_{m\pm 1}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ на $-r_{m\pm 1}(\rho, \varphi, z; \lambda)$.

Общее решение задачи запишем в виде суперпозиции внешних базисных решений для цилиндра $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ и внутренних базисных решений для полупространства $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$:

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{km}(\lambda) \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) d\mu d\lambda, \quad (7)$$

где $B_{km}(\lambda)$ и $H_k(\lambda, \mu)$ – неизвестные интегральные плотности.

Для удовлетворения граничных условий используются теоремы сложения (формулы переразложения) введенных базисных решений для полупространства и цилиндра [3, с.53]. Доказательство теорем основано на применении соотношений, связывающих соответствующие гармонические функции в рассматриваемых системах координат [9, с.58, с.73]. С помощью теорем сложения общее решение задачи записывается в системе координат, связанной с заданной граничной поверхностью, и на соответствующей поверхности удовлетворяется граничное условие.

Перепишем первое слагаемое в выражении (7), учитывая формулы переразложения внешних базисных решений для цилиндра $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ через внешние базисные решения для полупространства $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$. Переходя в полученном соотношении к напряжениям и удовлетворяя на поверхности S_1 граничному условию (2), придем к системе линейных

алгебраических уравнений относительно функций $H_k(\lambda, \mu)$ ($k=1, 2, 3$). Определитель этой системы

$$D_1(\lambda, \mu) = \frac{\gamma}{\lambda^2} (3 - 4\sigma) e^{3\gamma h}$$

при $\sigma \in [0, 1/2)$ отличен от нуля.

Запишем второе слагаемое в выражении (7) в цилиндрической системе координат с использованием формул переразложения внутренних базисных решений для полупространства $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ по внутренним базисным решениям для цилиндра $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$. Переходя к напряжениям и удовлетворяя на поверхности S_2 граничному условию (3), получим систему уравнений относительно интегральных плотностей $B_{km}(\lambda)$ ($k=1, 2, 3, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Определитель этой системы $D_2^m(|\lambda|a, \sigma)$ при $\sigma \in [0, 1/2)$ является отличным от нуля и при $|m| \geq 2$ ограничен снизу:

$$|D_2^m(|\lambda|a, \sigma)| > C(\sigma) (m^2 + \lambda^2 a^2) K_{m-1}(|\lambda|a) K_m(|\lambda|a) K_{m+1}(|\lambda|a).$$

Выразив из первой полученной системы функции $H_k(\lambda, \mu)$ и подставив их во вторую, придем к совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно интегральных плотностей $B_{sm}(\lambda)$:

$$B_{jn}(\lambda) = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{sj}^{mn}(\lambda) B_{sm}(\lambda) + Q_j^n(\lambda), \quad (8)$$

где $j=1, 2, 3, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

В операторной форме эти системы запишем в виде:

$$(I + \tilde{G}) \vec{b} = \vec{q}.$$

Здесь I – единичный оператор, $\tilde{G}$ – оператор системы, $\vec{b}$ и $\vec{q}$ – вектор-столбцы неизвестных $B_{sm}(\lambda)$ и правых частей системы $Q_j^n(\lambda)$ соответственно.

Теорема Оператор системы $\tilde{G}$ является вполне непрерывным оператором в пространстве l_2 при условии $a < h$ непересечения граничных поверхностей S_1 и S_2 области Ω .

Доказательство. Рассмотрим двойной ряд, составленный из модулей коэффициентов системы (8)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_{sj}^{mn}(\lambda)|, \quad (9)$$

где $s, j=1, 2, 3$, и докажем его сходимость. Ряд (9) содержит ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\alpha I_{n+\beta}(\lambda a) K_{m+n+\gamma}(2|\lambda|h), \quad (10)$$

где $\alpha \in N, \beta, \gamma \in Z, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а также ряды, содержащие производные от модифицированных функций Бесселя:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\alpha} \frac{\partial I_{n+\beta}(\lambda \rho)}{\partial(\lambda \rho)} \bigg|_{\rho=a} K_{m+n+\gamma}(2|\lambda|h), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\alpha} I_{n+\beta}(\lambda a) \frac{\partial K_{m+n+\gamma}(|\lambda|\rho)}{\partial(|\lambda|\rho)} \bigg|_{\rho=h}. \quad (11)$$

В случае $\lambda > 0$ используем теорему сложения для модифицированных функций Бесселя [10, с.173]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(\lambda y) I_n(\lambda x) \cos n\varphi = K_m(\lambda z) \cos m\phi, \quad (12)$$

где $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}$, $\sin \phi = \frac{x}{z} \sin \varphi$. Продифференцировав равенство (10) дважды по переменной φ , положив в полученном равенстве $\varphi = 0$ и $\phi = 0$ и, заменив $x = a$, $y = 2h$, получим соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 K_{m+n}(2\lambda h) I_n(\lambda a) = \frac{\lambda a h}{2h-a} [K_{m+1}(\lambda(2h-a)) + K_{m-1}(\lambda(2h-a))].$$

Аналогично получим выражения для других значений α в рядах вида (10). Используя формулы для производных [11, с.24]

$$K'_m(\varsigma) = -\frac{K_{m+1}(\varsigma) + K_{m-1}(\varsigma)}{2}, \quad I'_m(\varsigma) = \frac{I_{m+1}(\varsigma) + I_{m-1}(\varsigma)}{2},$$

преобразуем ряды (11) при разных значениях α . С помощью соотношений (10) и (11) ряды, входящие в ряд (9), суммируются по индексу n и таким образом упрощаются. В результате получаем сумму одинарных рядов вида $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{m+\delta}(\lambda(2h-a))}{(m^2+1)K_{m+r}(\lambda a)}$, где $\delta, r \in N$, которую обозначим через $L(\lambda, a, h)$. С помощью неравенства [12, с.426]

$$\frac{1}{K_m(\nu)} \leq \omega m^2 I_m(\nu),$$

верного при $|m| \geq 1$, где $\omega = 4\sqrt{\pi}e(1+\nu)$, $\nu > 0$, и с учетом того, что $\frac{m^2}{m^2+1} < 1$, для функции $L(\lambda, a, h)$ получим оценку сверху:

$$L(\lambda, a, h) \leq f(\lambda). \quad (13)$$

Правая часть неравенства (13) при условии $a < h$ является ограниченной функцией параметра λ . Учитывая поведение модифицированных функций Бесселя для $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ [13, с.196, с.199], можно показать, что при $\lambda \rightarrow 0$ это конечная величина, а при $\lambda \rightarrow \infty$ все слагаемые $f(\lambda)$ стремятся к нулю. Таким образом, при выполнении условия $a < h$ функция $L(\lambda, a, h)$ является положительной и ограниченной для всех $\lambda \in [0, \infty)$, следовательно, ряд (9) является сходящимся. Отсюда следует сходимость ряда, составленного из квадратов модулей коэффициентов $G_{sj}^{mn}(\lambda)$ системы (8).

Доказательство сходимости ряда (9) для случая отрицательного λ с помощью замены $\lambda = -\kappa$, где $\kappa > 0$, и соотношения [14, с.246] $I_n(\lambda) = I_n(-\kappa) = (-1)^n I_n(\kappa)$ сводится к предыдущему случаю. Значит, ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_{sj}^{mn}(\lambda)|^2$ при выполнении условия $a < h$

сходится при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, оператор $\tilde{G}$ системы (8) при выполнении условия $a < h$ непересечения граничных поверхностей является вполне непрерывным в пространстве l_2 для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. **Теорема** доказана.

Аналогично доказывается сходимость ряда, составленного из модулей правых частей $Q_j^n(\lambda)$ системы (8) при условии $a < h$ непересечения граничных поверхностей для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, правые части $Q_j^n(\lambda)$ системы уравнений (8) принадлежат пространству l_2 .

Из альтернативы Гильберта и принадлежности правых частей системы (8) пространству l_2 следует, что система уравнений (8) рассматриваемой задачи разрешима и имеет единственное решение в пространстве l_2 . Ее приближенное решение может быть получено методом редукции [15, с.534].

Проведено исследование распределения напряжений и перемещений в рассматриваемой области для заданных на граничных поверхностях функций: $F\bar{u}_{01}(x, z)/(2G) = (0, -\cos(\lambda z)/(1+(x/l)^2), 0)$, $F\bar{u}_{02}(\varphi, z) = \vec{0}$, различных значений величины $\varepsilon = a/h$ и параметров: $\sigma = 0,25$, $\lambda = 1$, $z = 1$, $l = 1$.

Для оценки точности решения функция $F\bar{u}$ вычислялась на граничных поверхностях при разных значениях ε и n , где n – порядок системы. Для каждого значения ε найден минимальный порядок системы n , при котором граничные условия удовлетворяются с точностью 10^{-6} . Так, для $\varepsilon = 0,3$ неравенства $\|F\bar{u}(x, h, z) - F\bar{u}_{01}(x, z)\|_{S_1} < 10^{-10}$ и $\|F\bar{u}(a, \varphi, z) - F\bar{u}_{02}(\varphi, z)\|_{S_2} < 10^{-6}$ выполняются при $n \geq 9$, для $\varepsilon = 0,6$ – при $n \geq 14$, для $\varepsilon = 0,9$ – при $n \geq 25$. Это указывает на быструю сходимость метода редукции. Напряжения существенно зависят от величины ε , они возрастают при $\varepsilon \rightarrow 1$.

ВЫВОДЫ

С помощью обобщенного метода Фурье найдено решение однородного уравнения Ламе в упругом полупространстве, содержащем бесконечную круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе, при заданных на граничных поверхностях напряжениях. Использование полученных авторами теорем сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра позволило удовлетворить заданным граничным условиям на поверхности цилиндра и границе полупространства и свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказана теорема о том, что оператор полученной системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений решена методом редукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проценко В. С. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2002. – № 542. – С. 42-51.
2. Проценко В. С. Применение обобщенного метода Фурье для решения задач теории потенциала и теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Українець // Современные проблемы математики, механики и информатики: сборник статей / [под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича]. – Х. : Апостроф, 2011. – 452 с. – С. 189-200.

3. Проценко В. С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // *Доповіді НАН України*. – 2004. – № 12. – С. 52-58.
4. Попова Н. А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / Н.А. Попова // *Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка*. – 2004. – № 645. – С. 102-107.
5. Проценко В. С. Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Украинец // *Теоретическая и прикладная механика*. – Донецк, 2006. – № 42. – С. 17-22.
6. Проценко В. С. О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применение к решению краевых задач / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // *Математические методы анализа динамических систем : тематический сборник научных трудов*. – Харьков, 1984. – № 8. – С. 50-77.
7. Проценко В. С. Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // *Прикладная механика*. – 1986. – Т. 22, № 7. – С. 83-89.
8. Лурье А. И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
9. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения : Справочник / В.Т. Ерофеев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 255 с.
10. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : Физматгиз, 1953. – 376 с.
11. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Корнев. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
12. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами : [под ред. М. Абрамовица, И. Стиган]. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
14. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 326 с.
15. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

REFERENCES

1. Protsenko, V. S. and Popova, N. A. (2002), "The Dirichlet problem for the Laplace equation in the semispace with the cylindrical cavity", *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu, seriia Matematika, prykladna matematika i mekhanika*, vol. 542, pp. 42-51.
2. Protsenko, V. S. and Ukrainets, N. A. (2011), "Application of the generalized Fourier method to solving the problems of potential theory and elasticity theory in the semispace with the cylindrical cavity", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki, Sbornik statey*, Edited by Kizilova, N.N. and Zholtkevich, G.N., Apostrof, Kharkiv, pp. 189-200.
3. Protsenko, V. S. and Popova, N. A. (2004), "The second boundary-value problem of elasticity theory for the semispace with the circular cylindrical cavity", *Dopovidi NAN Ukrainy*, vol. 12, pp. 52-58.
4. Popova, N. A. (2004), "Analysis of the stress-strained state of an elastic semispace with the circular cylindrical cavity", *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu, seriia Matematika, prykladna matematika i mekhanika*, vol. 645, pp. 102-107.

5. Protsenko, V. S. and Ukrainets, N. A. (2006), "The mixed problem for an elastic semispace with a circular cylindrical cavity", *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika, Sbornik nauchnykh trudov*, vol. 42, pp. 17-22.
6. Protsenko, V. S. and Soloviov, A. I. (1984), "Some expansions formulas in the theory of harmonic functions and their application to solving boundary value problems", *Matematicheskie metody analiza dinamicheskikh system, Tematicheskii sbornik nauchnykh trudov*, vol. 8, pp. 50-77.
7. Protsenko, V. S. and Nikolaev, A. G. (1986) "Solving spatial problems of elasticity theory by means of formulas reexpansion", *International Applied Mechanics*, vol. 22, no. 7, pp. 83-89.
8. Lurie, A.I. (1970), *Teoriia uprugosti* [Elasticity theory], Nauka, Moscow, Russia.
9. Yerofeenko, V. T. (1989), *Teoremy slozheniia. Spravochnik* [Addition theorems. Handbook], Nauka i tekhnika, Minsk, Belorussia.
10. Lebedev, N. N. (1953), *Spetsialnye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications], Fizmatgiz, Moscow, Russia.
11. Korenev, B. G. (1971), *Vvedenie v teoriyu besselevikh funktsiy* [Introduction to the theory of Bessel functions], Nauka, Moscow, Russia.
12. Lyuk, Yu. (1980), *Spetsialnye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii* [Special mathematical functions and their approximations], Nauka, Moscow, Russia.
13. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami* [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables], Edited by Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Translated by Ditkin, V.A. and Karmazina, L. N. (1964), Nauka, Moscow, Russia.
14. Janke, J., Emde, F. and Lösch, F. (1977), *Spetsialnye funktsii* [Special functions], Edited by Sedov, L. I., Nauka, Moscow, Russia.
15. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. (1977), *Funktsionalnyi analiz* [Function analysis], Nauka, Moscow, Russia.

UDC 519.833+519.6

FINITE APPROXIMATION OF UNIT-HYPERCUBIC INFINITE NONCOOPERATIVE GAME VIA DIMENSION-DEPENDENT IRREGULAR SAMPLINGS AND RESHAPING THE PLAYER'S PAYOFFS INTO LINE ARRAY FOR SIMPLIFICATION AND SPEEDUP

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

*Khmelnitskiy National University,
Institutska str., 11, Khmelnitskiy, 29016, Ukraine*

romanukevadimv@mail.ru

A method of converting the infinite noncooperative game on the unit hypercube into finite game is suggested. Purpose of the conversion is to obtain an approximate solution of the initial infinite game as the exact solution of the same type in the finite game. There are three steps to get the approximated solution. Firstly the players' payoff functions are sampled on the unit hypercube, what maps the initial infinite game into finite one. The samplings are dimension-dependent and irregular. Irregularity allows to sample quickly oscillating dimensions of payoff values tighter, whereas slowly oscillating dimensions are sampled sparser. The sampled players' payoff functions are multidimensional matrices, given at the second step of approximation. After having reshaped these matrices into matrices, whose number

of dimensions is equal to the number of players, it is expected a favorable impact on simplification and speedup in finding the finite game exact solution. At the final third step, this solution is ascertained whether it is consistent, meaning its relative independence upon the sampling points over the unit hypercube. Consistency is formulated with its requirements, which rank the approximation accurateness. There are distinguished consistency and weak consistency. The consistency conception is generalized to cases, when the finite game solution is relatively independent upon the sampling points within the defined neighborhood of this solution. Thus, (weakly) λ -consistent solutions are defined for $\lambda \in \mathbb{N}$. For quickening consistency analysis, there is a theorem saying how weakly λ -consistent solution of finite noncooperative game appears λ -consistent one.

Key words: infinite noncooperative game, unit hypercube, finite game approximation, finite noncooperative game, multidimensional matrix reshaping, finite approximation accurateness rank, approximate solution consistency.

КОНЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ НА ЕДИНИЧНОМ ГИПЕРКУБЕ ПОСРЕДСТВОМ ЗАВИСИМЫХ ОТ ИЗМЕРЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ ВЫБОРОК И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫИГРЫШЕЙ ИГРОКА В ЛИНЕЙНЫЙ МАССИВ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ И УСКОРЕНИЯ

Романюк В. В., профессор, д. т. н., доцент

*Хмельницький національний університет,
ул. Інститутська, 11, г. Хмельницький, 29016, Україна*

romanukevadimv@mail.ru

Предлагается метод преобразования бесконечной бескоалиционной игры на единичном гиперкубе в конечную игру. Целью этого преобразования является получение некоего приближённого решения исходной бесконечной игры в качестве точного решения такого же типа в конечной игре. Аппроксимированное решение получается в три этапа. Сперва функции выигрыша игроков дискретизируются на единичном гиперкубе, что отображает исходную бесконечную игру в конечную. Выборки дискретизации являются зависимыми от измерения и неравномерны. Неравномерность позволяет дискретизировать быстро осциллирующие измерения значений выигрыша плотнее, тогда как медленно осциллирующие измерения дискретизируются более разрежёнными. Дискретизированные функции выигрыша игроков являются многомерными матрицами, получаемыми на втором этапе аппроксимации. После того, как эти матрицы преобразованы в матрицы, количество измерений которых равно числу игроков, ожидается упрощение и ускорение при нахождении точного решения конечной игры. На финальном, третьем, этапе устанавливается, является ли это решение согласованным, подразумевая его относительную независимость от точек выборок на единичном гиперкубе. Согласованность формулируется со своими требованиями, которые устанавливают ранг точности аппроксимации. Различают согласованность и слабую согласованность. Концепция согласованности обобщается на случаи, когда решение конечной игры является относительно независимым от точек выборок в определяемой окрестности этого решения. Таким образом для $\lambda \in \mathbb{N}$ определяются (слабые) λ -согласованные решения. Для ускорения анализа согласованности предлагается теорема о том, как из слабо λ -согласованного решения конечной бескоалиционной игры получается λ -согласованное.

Ключевые слова: бесконечная бескоалиционная игра, единичный гиперкуб, конечная аппроксимация игры, конечная бескоалиционная игра, преобразование многомерной матрицы, ранг точности конечной аппроксимации, согласованность приближённого решения.

СКІНЧЕННА АПРОКСИМАЦІЯ НЕСКІНЧЕННОЇ БЕЗКОАЛІЦІЙНОЇ ГРИ НА ОДИНИЧНОМУ ГІПЕРКУБІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ВИМІРУ НЕРІВНОМІРНИХ ВИБІРОК І ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИГРАШІВ ГРАВЦЯ У ЛІНІЙНИЙ МАСИВ ДЛЯ СПРОЩЕННЯ ТА ПРИСКОРЕННЯ

Романюк В. В., професор, д. т. н., доцент

*Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна*

romanukevadimv@mail.ru

Пропонується метод перетворення нескінченної бескоаліційної гри на одиничному гіперкубі в скінченну гру. Метою цього перетворення є отримання деякого наближеного розв'язку вихідної нескінченної гри у якості точного розв'язку такого ж типу в скінченній грі. Апроксимований розв'язок виходить у три етапи. Спершу функції виграшу гравців дискретизують на одиничному гіперкубі, що відображує вихідну нескінченну гру в скінченну. Вибірki дискретизації є залежними від виміру і нерівномірні. Нерівномірність дозволяє дискретизувати швидко осцилюючі виміри значень виграшу щільніше, тоді як повільно осцилюючі виміри дискретизують більш розрідженими. Дискретизовані функції виграшу гравців є багатовимірними матрицями, що

отримуються на другому етапі апроксимації. Після того, як ці матриці перетворені в матриці, кількість вимірів яких дорівнює числу гравців, очікується спрощення і прискорення при знаходженні точного розв'язку скінченної гри. На фінальному, третьому, етапі встановлюється, чи є цей розв'язок узгодженим, маючи на увазі його відносну незалежність від точок вибірок на одиничному гіперкубі. Узгодженість формулюється зі своїми вимогами, які встановлюють ранг точності апроксимації. Розрізняють узгодженість і слабку узгодженість. Концепція узгодженості узагальнюється на випадки, коли розв'язок скінченної гри є відносно незалежним від точок вибірок у визначуваному околі цього розв'язку. Таким чином для $\lambda \in \mathbb{N}$ визначаються (слабкі) λ -узгоджені розв'язки. Для прискорення аналізу узгодженості пропонується теорема про те, як зі слабо λ -узгодженого розв'язку скінченної безкоаліційної гри виходить λ -узгоджений.

Ключові слова: нескінченна безкоаліційна гра, одиничний гіперкуб, скінченна апроксимація гри, скінченна безкоаліційна гра, перетворення багатовимірної матриці, ранг точності скінченної апроксимації, узгодженість наближеного розв'язку.

NONCOOPERATIVE-GAME MODELING

In order to meet the growing demands and requirements against insufficient resources, noncooperative-game modeling is a means for allocating resources rationally and fairly. Insufficiency of resources is expressed as with inequalities between resources and pretensions to them, as well as with a group of persons or players participating in the allocation. Particularly, uncertainties or permanently altering circumstances provoke the insufficiency [1, 2]. Eventually, noncooperative-game modeling proposes equilibrium or Pareto-efficient strategies for participants. Using these strategies theoretically ensures rationality, fairness, equilibrium, and relative utility in removing discrepancies and uncertainties [1, 3, 4]. The question is only to find equilibrium or Pareto-efficient strategies as fast as possible, although it is exceptionally hard for infinite games [2, 5, 6].

SOLVING INFINITE NONCOOPERATIVE GAMES

In particular, finding Nash equilibrium or Pareto-efficient solutions in even the finite noncooperative game (FNCG) is a computational difficulty [5, 7, 8]. Being more particular, solving dyadic games with three players takes some technique of visualization of the cube of situations in mixed strategies [5, 9], but dyadic games with more than three players are solved purely in analytics [5, 10]. Naturally that solving FNCG with more than two pure strategies at their players, whose number is three or greater, constitutes known computational problems [2, 5, 8, 11]. Nevertheless, the efficiency of solving infinite noncooperative games (INCG) is far behind the efficiency of solving FNCG. Solving INCG needs voluminous analytical substantiations, and it is never known certainly whether a solution exists or not [12, 13]. Even compact INCG, having solutions at least in mixed strategies for measurable payoff functions [1, 2, 5, 9], cannot be solved by a universal algorithmic approach. That is why INCG are substituted with their finite approximations [8, 14, 15]. In fact, finite approximation for INCG is either a mapping that converts INCG into FNCG [5, 9, 16] or an approach for finding an approximate solution of INCG whose strategies have finite supports [14, 17, 18]. However, finding an approximate finite support solution of INCG may need substantiations of sampling the players' action spaces. In a manner, this leads to the conversion of INCG into FNCG.

THE ARTICLE GOAL AND ITS TASKS

The final goal of this article is to convert INCG into FNCG for obtaining an approximate solution of the initial INCG as the exact solution of the same type in FNCG. There is going to be considered unit-hypercubic INCG (UHINCG), which is isomorphic to compact INCG in Euclidean finite-dimensional subspaces of appropriate dimensions [5, 6, 12, 19, 20]. The conversion of UHINCG into FNCG must maintain the exact solution of FNCG being as close as needed to the exact solution of UHINCG. It should be mentioned that the exact solution of UHINCG does not always exist or just can be unknown [5, 9, 13], though. The closeness nonetheless is going to be expressed.

There are four tasks to meet the described goal:

1. To sample the players' payoff functions (PPF) on the unit hypercube, what maps the initial UHINCG into FNCG. The sampling mustn't be dependent upon all dimensions, and the sampling points are not necessarily to be equidistant along the dimension.
2. To reshape the sampled PPF as multidimensional matrices into matrices with minimally possible number of dimensions, letting get rid off dimensionalities and having the single dimension at each player. This will simplify FNCG and provide speedup in computing the exact solution of FNCG.
3. To state requirements to the exact solution of FNCG that every strategy from the solution wouldn't be too dependent upon the sampling points. This is believed to ensure the spoken closeness of UHINCG to its finite approximation in the form of FNCG, what provides also hypothetical similarity between the exact solution of FNCG and the same type solution of UHINCG.
4. To generalize the stated requirements to when the tolerable dependence of the solution upon the sampling points is possible to regard wider.

DIMENSION-DEPENDENT IRREGULAR SAMPLINGS OF PPF

Let there be $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ players in INCG, in which the n -th player acts within the unit hypercube U_n of M_n -dimensional pure strategies

$$\mathbf{X}_n = [x_{nm}]_{1 \times M_n} \in \bigtimes_{m=1}^{M_n} [0; 1] = U_n \subset \mathbb{R}^{M_n} \quad \text{by } M_n \in \mathbb{N} \quad \forall n = \overline{1, N} \quad (1)$$

and in the situation

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^N \in \bigtimes_{i=1}^N U_i = \bigtimes_{d=1}^{\sum_{i=1}^N M_i} [0; 1] \subset \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^N M_i} \quad (2)$$

gets the payoff $K_n(\mathbf{X})$. Therefore

$$\left\langle \{U_n\}_{n=1}^N, \{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N \right\rangle \quad (3)$$

is UHINCG, where each of PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ defined on the unit $\left(\sum_{i=1}^N M_i\right)$ -dimensional hypercube

$$U = \bigtimes_{n=1}^N U_n = \bigtimes_{d=1}^{\sum_{n=1}^N M_n} [0; 1] \subset \mathbb{R}^{\sum_{n=1}^N M_n} \quad (4)$$

is measurable and all PPF are differentiable with respect to any of variables $\left\{\{x_{nm}\}_{m=1}^{M_n}\right\}_{n=1}^N$. Also there exist mixed derivatives of each of PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ by any combination of variables $\left\{\{x_{nm}\}_{m=1}^{M_n}\right\}_{n=1}^N$ in any situation (2), where every variable is included no more than just once.

PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ are sampled along each of dimensions of hypercube (4) with a specific sampling rule. For making the irregular sampling independent upon other dimensions, there are going to be applied dimension-dependent irregular samplings (DDIS). Thus let $S_m^{(n)}$ be the number of intervals

between the selected points in m -th dimension of hypercube U_n in (1), where $S_m^{(n)} \in \mathbb{N}$ for the utmost case of sampling. So, there is no fixed sampling step, although the endpoints of any unit segment are included into the sampling necessarily. Thus, in m -th dimension n -th player instead of the segment $[0; 1]$ of values of m -th component of its pure strategy (1) now possesses the set of points

$$D_m^{(n)}(S_m^{(n)}) = \left\{ x_{nm}^{(s_m)} \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}+1} \text{ by } x_{nm}^{(1)} = 0, \quad x_{nm}^{(S_m^{(n)}+1)} = 1, \\ x_{nm}^{(d_{nm})} < x_{nm}^{(d_{nm}+1)} \quad \forall \quad d_{nm} = \overline{1, S_m^{(n)}} \text{ for } m = \overline{1, M_n} \text{ and } n = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Subsequently, the finite hypercubic irregular lattice (FHIL)

$$D^{(n)}\left(\left\{S_m^{(n)}\right\}_{m=1}^{M_n}\right) = \bigotimes_{m=1}^{M_n} D_m^{(n)}(S_m^{(n)}) = \bigotimes_{m=1}^{M_n} \left\{ x_{nm}^{(s_m)} \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}+1} \quad (6)$$

substitutes the hypercube U_n , mapping the initial UHINCG (3) into FNCG

$$\left\langle \left\{ D^{(n)}\left(\left\{S_m^{(n)}\right\}_{m=1}^{M_n}\right) \right\}_{n=1}^N, \left\{ K_n(\mathbf{X}) \right\}_{n=1}^N \right\rangle \text{ by } \mathbf{X}_i \in D^{(i)}\left(\left\{S_m^{(i)}\right\}_{m=1}^{M_i}\right) \quad (7)$$

on FHIL

$$D\left(\left\{\left\{S_m^{(n)}\right\}_{m=1}^{M_n}\right\}_{n=1}^N\right) = \bigotimes_{n=1}^N D^{(n)}\left(\left\{S_m^{(n)}\right\}_{m=1}^{M_n}\right), \quad (8)$$

where hypersurface $K_n(\mathbf{X})$ is mapped into $\left(\sum_{i=1}^N M_i\right)$ -dimensional array (matrix) with elements

$$K_n(\mathbf{X}) \quad \forall \quad \mathbf{X} \in D\left(\left\{\left\{S_m^{(i)}\right\}_{m=1}^{M_i}\right\}_{i=1}^N\right) \text{ by } n = \overline{1, N}. \quad (9)$$

The sampling numbers

$$\left\{\left\{S_m^{(n)}\right\}_{m=1}^{M_n}\right\}_{n=1}^N \quad (10)$$

shall clearly not be assigned arbitrarily, because DDIS mustn't remove information about local extremums and gradient over hypersurfaces $\left\{K_n(\mathbf{X})\right\}_{n=1}^N$. That is $\forall \quad s_m = \overline{1, S_m^{(n)}}$ there ought to be

$$\frac{\sum_{i=1}^N M_i K_n(\mathbf{X})}{\partial x_{11} \partial x_{12} \dots \partial x_{1M_1} \partial x_{21} \partial x_{22} \dots \partial x_{2M_2} \dots \partial x_{N1} \partial x_{N2} \dots \partial x_{NM_N}} \geq 0 \quad \text{or} \\ \frac{\sum_{i=1}^N M_i K_n(\mathbf{X})}{\partial x_{11} \partial x_{12} \dots \partial x_{1M_1} \partial x_{21} \partial x_{22} \dots \partial x_{2M_2} \dots \partial x_{N1} \partial x_{N2} \dots \partial x_{NM_N}} \leq 0 \\ \forall \quad x_{nm} \in \left[x_{nm}^{(s_m)}; x_{nm}^{(s_m+1)} \right], \quad m = \overline{1, M_n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (11)$$

and

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^N M_i K_n(\mathbf{X})}{\partial x_{11} \partial x_{12} \dots \partial x_{1M_1} \partial x_{21} \partial x_{22} \dots \partial x_{2M_2} \dots \partial x_{N1} \partial x_{N2} \dots \partial x_{NM_N}} \right| \leq \alpha$$

$$\forall x_{nm} \in [x_{nm}^{(s_m)}; x_{nm}^{(s_m+1)}], \quad m = \overline{1, M_n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (12)$$

for some $\alpha > 0$, implying tolerable oscillations of PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ on every one of segments

$$\left\{ \left\{ \left[x_{nm}^{(s_m)}; x_{nm}^{(s_m+1)} \right] \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}} \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N.$$

In order to sample PPF under conditions (11) and (12) from the hypercube (4) down to FHIL (8), the sampling numbers (10) and points

$$\left\{ \left\{ \left\{ x_{nm}^{(s_m)} \right\}_{s_m=2}^{S_m^{(n)}} \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N \quad (13)$$

can be chosen using the following assertion.

Theorem 1. If inequalities (12) hold $\forall s_m = \overline{1, S_m^{(n)}}$ and if local extremums of PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ are reached at points having only components (13), then PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ are sampled through representing the unit hypercube U_n as FHIL (6) with (5).

Proof. Since having local extremums only with components (13), none of PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ has local extremums on every one of intervals

$$\left\{ \left\{ \left[x_{nm}^{(s_m)}; x_{nm}^{(s_m+1)} \right] \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}} \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N.$$

Hence, for the differentiable PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ conditions (11) hold as well. The theorem has been proved.

Based on practical reasonings,

$$\alpha \leq \beta \cdot \left(\max_{n \in \{1, N\}} \max_{\mathbf{X} \in U} K_n(\mathbf{X}) - \min_{n \in \{1, N\}} \min_{\mathbf{X} \in U} K_n(\mathbf{X}) \right)$$

by, say, $\beta = 0.05$, $\beta = 0.01$, $\beta = 0.005$ or $\beta = 0.001$ and other practically appropriate values for the scale factor β . That shall be sufficiently accurate for practice experience. However, some conditions below may cause need to resample PPF with the lowered parameter α . These conditions, defining whether the approximate solution of the initial UHINCG (3) is consistent enough, are going to be applied to the exact solution of FNCG (7). For computing this solution

faster, the sampled PPF $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^N$ as $\left(\sum_{i=1}^N M_i \right)$ -dimensional matrices must be reshaped into matrices with minimally possible number of dimensions, letting get rid off dimensionalities and

having the single dimension at each player. Apparently, these reshaped matrices shall have N dimensions.

RESHAPING THE SAMPLED PPF INTO N -DIMENSIONAL MATRICES

Theorem 2. Any sampled PPF in UHINCG (3) as $\left(\sum_{i=1}^N M_i\right)$ -dimensional matrix can be reshaped into N -dimensional matrix so that each player's payoffs shall be assigned through the single dimension. The matrix mapping which realizes this reshaping is reversible.

Proof. Denote the sampled PPF $K_n(\mathbf{X})$ with elements (9) as $\left(\sum_{i=1}^N M_i\right)$ -dimensional matrix

$\mathbf{P}_n(0) = \left[p_J^{(n)} \right]_{\mathcal{F}}$ of the format

$$\mathcal{F} = \bigtimes_{i=1}^N \bigtimes_{m=1}^{M_i} \left(S_m^{(i)} + 1 \right), \quad (14)$$

whose $\left(\sum_{i=1}^N M_i\right)$ -position indices

$$J = \{ j_d \}_{d=1}^{\sum_{i=1}^N M_i} \quad \text{by} \quad j_k \in \left\{ \overline{1, S_m^{(r)} + 1} \right\} \quad (15)$$

at

$$k = m + \sum_{i=1}^{r-1} M_i \quad \forall m = \overline{1, M_r} \quad \text{and} \quad \forall r = \overline{1, N} \quad (16)$$

determine the element

$$p_J^{(n)} = K_n(\mathbf{X}) \quad \text{by} \quad x_{rm} = x_{rm}^{(j_k)}. \quad (17)$$

Indices numbered from $1 + \sum_{i=1}^{n-1} M_i$ to $\sum_{i=1}^n M_i$ in the set J in (15) correspond to components of the pure strategy of the n -th player. These indices are convolved into value

$$u_n = \sum_{m=1}^{M_n} \left(\prod_{w=1}^{m-1} \left(S_{M_n-w+1}^{(n)} + 1 \right) \right) \cdot \left(j_{M_0-m+1} - \text{sign}(m-1) \right) \quad \text{at} \quad M_0 = \sum_{i=1}^n M_i \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Taking $j_k = \overline{1, S_m^{(r)} + 1}$ at (16), there is

$$u_r = \overline{1, Q_r(0)} \quad \text{by} \quad Q_r(0) = \prod_{m=1}^{M_r} \left(S_m^{(r)} + 1 \right) \quad \forall r = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Thus the set of indices (15) at (16) is mapped into the set of indices $I = \{u_r\}_{r=1}^N$ with the convolution (18). Therefore, matrix $\mathbf{P}_n(0) = \left[p_J^{(n)} \right]_{\mathcal{F}}$ of the format (14) by (15) — (17) is reshaped into N -dimensional matrix $\mathbf{G}_n(0) = \left[g_I^{(n)} \right]_{\mathcal{I}}$ of the format

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^N \prod_{m=1}^{M_i} (S_m^{(i)} + 1) \quad (20)$$

and its elements

$$g_I^{(n)} = p_J^{(n)} \quad \text{by } n = \overline{1, N}.$$

For proving reversibility of this mapping, let the function $\rho(a, b)$ by $b \neq 0$ round the fraction $\frac{a}{b}$ to the nearest integer towards zero. And put another function

$$\eta(a, b) = a - b \cdot \rho(a, b). \quad (21)$$

By the function (21), the last index in indicating the n -th player's aggregate index u_n for matrix $\mathbf{P}_n(0) = [p_J^{(n)}]_{\mathcal{F}}$ is restored as

$$j_{M_0} = \eta(u_n, S_{M_n}^{(n)} + 1) + (S_{M_n}^{(n)} + 1) \left(1 - \text{sign} \left[\eta(u_n, S_{M_n}^{(n)} + 1) \right] \right) \quad \text{at } M_0 = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (22)$$

The rest $M_n - 1$ indices are restored using the index (22):

$$j_{M_0-m} = 1 + \eta \left(\frac{u_n - j_{M_0} - \sum_{w=1}^{m-1} \left(\prod_{w_1=1}^w (S_{M_n-w_1+1}^{(n)} + 1) \right) \cdot (j_{M_0-w} - 1)}{\prod_{w=1}^m (S_{M_n-w+1}^{(n)} + 1)}, S_{M_n-m}^{(n)} + 1 \right) \quad \forall m = \overline{1, M_n - 1}. \quad (23)$$

Consequently, the matrix mapping $\mathbf{P}_n(0) \rightarrow \mathbf{G}_n(0)$ is accomplished along with the index mapping $J \rightarrow I$ via convolution (18), and the reverse index mapping $I \rightarrow J$ accomplished via expansion (22) and (23) gives the matrix mapping $\mathbf{G}_n(0) \rightarrow \mathbf{P}_n(0)$. The theorem has been proved.

The reshaping of the sampled PPF $\{\mathbf{P}_n(0)\}_{n=1}^N$ into N -dimensional matrices $\{\mathbf{G}_n(0)\}_{n=1}^N$ under Theorem 2 lets get rid off dimensionalities, and each player will act through its own single dimension. This simplifies ultimately formalism of FNCG (7) on FHIL (8), mapping FNCG (7)

$$\left\langle \left\{ D^{(n)} \left(\left\{ S_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{M_n} \right) \right\}_{n=1}^N, \left\{ \mathbf{P}_n(0) \right\}_{n=1}^N \right\rangle \quad (24)$$

into FNCG

$$\left\langle \left\{ \left\{ z_{u_n}^{(n)}(0) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(0)} \right\}_{n=1}^N, \left\{ \mathbf{G}_n(0) \right\}_{n=1}^N \right\rangle \quad (25)$$

with the pure strategy $z_{u_n}^{(n)}(0)$ of the n -th player corresponding to its strategy

$$\mathbf{X}_n = \left[x_{nm}^{(j_k)} \right]_{1 \times M_n} \in D^{(n)} \left(\left\{ S_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{M_n} \right) \subset U_n \quad (26)$$

at

$$k = m + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \quad \text{for } m = \overline{1, M_n} \quad (27)$$

in the initial UHINCG (3) after having sampled under numbers $\left\{ S_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{M_n}$. Besides, the mapping of FNCG (24) into FNCG (25) must presumably speed up computing the exact solution of FNCG (24), when $\exists n_1 \in \overline{1, N}$ such that $M_{n_1} > 1$. Indeed, there is a known rule telling that manipulating with a many single-dimensional objects is more convenient than manipulating with single multidimensional object [21, 22]. Practically it is explained with that the greater supplementary dimensions of a matrix the longer computations might be. This computational retardation is easy

exemplified in Matlab environment. Suppose that a 12-dimensional $\bigotimes_{d=1}^{12} 4$ -matrix represents the player's payoff values in 3-person game, where each player's pure strategy is of four dimensions with four points in every dimension. While operating on Intel Core i3-4150 CPU @ 3.50 GHz with 4 GB RAM within 64-bit Windows 7, 30000 Matlab operations of summing and extracting mean, finding minimal and maximal elements of three such matrices take about 10375 seconds, whereas

the same takes about 8105 seconds over three six-dimensional $\bigotimes_{d=1}^6 16$ -matrices, reshaped before.

Moreover, reshaping these $\bigotimes_{d=1}^{12} 4$ -matrices into three-dimensional $\bigotimes_{d=1}^3 256$ -matrices under Theorem

2 reduces the operation time down to 7874 seconds. The computational time shortening gain is almost 1.32, what is pretty significant for the exemplified reshaping (more than 2500 seconds).

WEAK CONSISTENCY OF THE EXACT SOLUTION OF FNCG (25), APPROXIMATING A GENUINE SOLUTION IN UHINCG (3)

Denote by

$$\left\{ \left\{ p_*(u_n, 0) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(0)} \right\}_{n=1}^N \quad (28)$$

a known Nash equilibrium or Pareto-efficient solution or other type equilibrium solution in FNCG (25), where $p_*(u_n, 0)$ is the optimal probability of applying the pure strategy $z_{u_n}^{(n)}(0)$. Before calling (28) the approximate solution of UHINCG (3), every strategy from the solution (28) shouldn't be too dependent upon the sampling numbers (10) and the sampling points (13) or

$$\left\{ \left\{ \left\{ x_{nm}^{(s_m)} \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}+1} \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N. \quad (29)$$

For controlling this dependence, along with FNCG (25) there is going to be considered FNCG

$$\left\langle \left\{ \left\{ z_{u_n}^{(n)}(\delta) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(\delta)} \right\}_{n=1}^N, \left\{ \mathbf{G}_n(\delta) \right\}_{n=1}^N \right\rangle \quad (30)$$

which is the result of mapping UHINCG (3) into FNCG under the sampling numbers

$$\left\{ \left\{ S_m^{(n)} + \delta \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N \quad (31)$$

by $\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wherein

$$Q_n(\delta) = \prod_{m=1}^{M_n} (S_m^{(n)} + 1 + \delta)$$

and with identifications

$$\left\{ S_m^{(n)} \equiv S_m^{(n)} + \delta \right\}_{m=1}^{M_n} \quad \forall n = \overline{1, N} \quad (32)$$

the re-settings (5) — (8) and re-mappings of the sampled under (31) PPF $\{\mathbf{P}_n(\delta) \rightarrow \mathbf{G}_n(\delta)\}_{n=1}^N$ are fulfilled after re-formatting (14) and (20), whereupon the pure strategy of the n -th player $z_{u_n}^{(n)}(\delta)$ corresponds to its strategy (26) at (27) in UHINCG (3) after having sampled under numbers $\left\{ S_m^{(n)} + \delta \right\}_{m=1}^{M_n}$. Let there be a convention that the sampling numbers (31) and points

$$\left\{ \left\{ \left\{ x_{nm}^{(s_m)}(\delta) \right\}_{s_m=1}^{S_m^{(n)}+1} \right\}_{m=1}^{M_n} \right\}_{n=1}^N \quad (33)$$

chosen after them by $\delta \in \mathbb{N}$ are such against the sampling numbers (10) and points (29), that the inequalities

$$\max_{d_m=1, S_m^{(n)}} (x_{nm}^{(d_m+1)} - x_{nm}^{(d_m)}) \geq \max_{d_m=1, S_m^{(n)}+\delta} (x_{nm}^{(d_m+1)}(\delta) - x_{nm}^{(d_m)}(\delta)) \quad \text{at } m = \overline{1, M_n} \text{ by } n = \overline{1, N} \quad (34)$$

hold. This implies that density of the sampling points along each dimension by $\delta > 0$ doesn't decrease, and density of the sampling points along each dimension by $\delta < 0$ doesn't increase.

Denote the solution of FNCG (30) by

$$\left\{ \left\{ p_*(u_n, \delta) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(\delta)} \right\}_{n=1}^N \quad (35)$$

similarly to denotation (28), in which $p_*(u_n, \delta)$ is the optimal probability of applying the pure strategy $z_{u_n}^{(n)}(\delta)$. Thus by denoting the support

$$\text{supp} \left\{ p_*(u_n, \delta) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(\delta)} = \left\{ z_{u_n}^{(n)}(\delta) \right\}_{u_n \in \mathbf{u}_n(\delta) \subset \{1, Q_n(\delta)\}} \quad (36)$$

the n -th player gets payoff

$$v_n^*(\delta) = \sum_{\substack{I=\{u_i\}_{i=1}^N \\ u_i=1, Q_i(\delta)}} \left(g_I^{(n)} \cdot \prod_{i=1}^N p_*(u_i, \delta) \right) = \sum_{I^*=\{u_i^*: u_i^* \in \mathfrak{U}_i(\delta)\}_{i=1}^N} \left(g_{I^*}^{(n)} \cdot \prod_{i=1}^N p_*(u_i^*, \delta) \right) \text{ for } n=\overline{1, N} \quad (37)$$

in situation (35). Henceforward, FNCG (25) can be compared to FNCG (30) by $\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in two ways: through comparing payoffs $\{v_n^*(0)\}_{n=1}^N$ and $\left\{ \{v_n^*(\delta)\}_{n=1}^N \right\}_{\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, and through comparisons among supports (36) at each player. Comparisons among supports (36) at each player imply support cardinality comparisons, and support configuration comparisons regarding the hypercube of the player's pure strategies.

Definition 1. Situation (35) in FNCG (30) is called δ -neighboring situation in relation to the situation (28) in FNCG (25).

Definition 2. Aggregate of situations (35) in FNCG (30) by $\delta = -\overline{\lambda}, \overline{\lambda}$ and $\lambda \in \mathbb{N}$ is called λ -neighborhood of the situation (28) in FNCG (25).

When N players take their payoffs $\{v_n^*(0)\}_{n=1}^N$ in the situation (28) and take payoffs $\{v_n^*(1)\}_{n=1}^N$ in 1-neighboring situation (for the minimally increased sampling numbers or the minimally increased number of the sampling points along each dimension), it is nonexceptional that there may be at least $\exists n_0 \in \{1, N\}$ such that payoffs $v_{n_0}^*(0)$ and $v_{n_0}^*(1)$ will be significantly different. The same concerns payoffs $\{v_n^*(-1)\}_{n=1}^N$ taken in (-1) -neighboring situation (for the minimally decreased number of the sampling points along each dimension) in relation to $\{v_n^*(0)\}_{n=1}^N$. Meanwhile, it is unknown whether limits

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} v_n^*(\delta) \text{ by } n=\overline{1, N} \quad (38)$$

exist or not. Neither are known genuine payoffs $\{v_n^{**}\}_{n=1}^N$ in UHINCG (3), where v_n^{**} is the n -th player's payoff in the situation, being approximated with (35) by $\delta \in \mathbb{Z}$. So it is apparent that the solution (28) of FNCG (25) can be said that it approximates a genuine solution in UHINCG (3) only if

$$|v_n^*(0) - v_n^*(1)| \leq |v_n^*(-1) - v_n^*(0)| \quad \forall n=\overline{1, N}. \quad (39)$$

Secondly, when the number of the sampling points along each dimension is minimally increased, any support cardinality shouldn't decrease:

$$|\mathfrak{U}_n(1)| \geq |\mathfrak{U}_n(0)| \quad \forall n=\overline{1, N}. \quad (40)$$

Inequalities (40) can be strengthened involving FNCG under the minimally decreased number of the sampling points along each dimension:

$$|\mathfrak{U}_n(1)| \geq |\mathfrak{U}_n(0)| \geq |\mathfrak{U}_n(-1)| \quad \forall n=\overline{1, N}. \quad (41)$$

Here also limits

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} |\mathfrak{U}_n(\delta)| \quad \text{by } n = \overline{1, N} \quad (42)$$

are non-proved for their existence, and it is unknown how they are close to the genuine solution in UHINCG (3), being approximated with (35) by $\delta \in \mathbb{Z}$.

And, thirdly, each player's strategies from solutions of the same type in FNCG must have nearly similar configurations. This feature isn't numerical, unlike (40) and (41). The study of the player's strategy configuration, if its support is not a singleton, needs consideration of the player's supports from different δ -neighboring situations as hypersurfaces.

Let the n -th player's strategy support in the situation (28) be represented as piecewise linear hypersurface $h_n(u_n, 0)$. This hypersurface is a function of $u_n = \overline{1, Q_n(0)}$ and its nonzero vertices are those elements in the set (36) that are linearly linked to points on FHIL (6) not included into the support. The hypersurfaces in δ -neighboring situation (35) are denoted $\{h_n(u_n, \delta)\}_{n=1}^N$. Vertices of hypersurface $h_n(u_n, 0)$ are in points

$$\left\{ \left\{ x_{nm}^{(j_k)} : k = m + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \right\}_{m=1}^{M_n}, p_*(u_n, 0) \right\}_{u_n=1}^{Q_n(0)} \quad (43)$$

in the space $\mathbb{R}^{M_n+1}$. Hypersurfaces $\{h_n(u_n, \delta)\}_{n=1}^N$ are defined with identifications (32) analogously. Thus the solution (28) of FNCG (25) can be said that it approximates a genuine solution in UHINCG (3) only if

$$\max_{U_n} |h_n(u_n, 0) - h_n(u_n, 1)| \leq \max_{U_n} |h_n(u_n, -1) - h_n(u_n, 0)| \quad \forall n = \overline{1, N} \quad (44)$$

and

$$\|h_n(u_n, 0) - h_n(u_n, 1)\| \leq \|h_n(u_n, -1) - h_n(u_n, 0)\| \quad \text{in } \mathbb{L}_2(U_n) \quad \forall n = \overline{1, N} \quad (45)$$

similarly to inequalities (39). Deficiently, existence of limits

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} h_n(u_n, \delta) \quad \text{by } n = \overline{1, N} \quad (46)$$

and their convergence to the being approximated strategies in the solution of UHINCG (3) protrudes non-proved. Nonetheless hypersurfaces $\{h_n(u_n, \delta)\}_{n=1}^N$ feature strategies' configurations incompletely.

For completing the configuration feature, note that the n -th player matches the index $u_n^* \in \mathfrak{U}_n(0)$ to the point

$$\mathbf{X}_n^{(q)}(0) = \left[x_{nm}^{(j_k(q, 0))} \right]_{1 \times M_n} \in D^{(n)} \left(\left\{ S_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{M_n} \right) \subset U_n \quad \text{for } k = m + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \quad \text{by } q = \overline{1, Q_n^*(0)} \quad (47)$$

at $Q_n^*(0) = |\mathfrak{U}_n(0)|$ through expanding the index $u_n^* \in \mathfrak{U}_n(0)$ via (22) and (23) into subset

$$\left\{ j_k(q, 0) : k = m + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \right\}_{m=1}^{M_n} \subset J \quad (48)$$

by $n = \overline{1, N}$. Then let the set $\left\{ \mathbf{X}_n^{(q)}(0) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)}$ of the points (47) be sorted into the set

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)} &= \left\{ \left[x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q, 0) \rangle} \right]_{1 \times M_n} \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)} \cap \left\{ \mathbf{X}_n^{(q)}(0) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)} = \\ &= \left\{ \mathbf{X}_n^{(q)}(0) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)} \in D^{(n)} \left(\left\{ S_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{M_n} \right) \subset U_n \end{aligned} \quad (49)$$

so that the value

$$\begin{aligned} \min_{w \in \{q+1, Q_n^*(0)\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{(w)}(0) \right) &= \min_{w \in \{q+1, Q_n^*(0)\}} \left\| \bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0) - \bar{\mathbf{X}}_n^{(w)}(0) \right\| = \\ &= \min_{w \in \{q+1, Q_n^*(0)\}} \sqrt{\sum_{m=1}^{M_n} \left(x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q, 0) \rangle} - x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(w, 0) \rangle} \right)^2} \end{aligned} \quad (50)$$

with the re-sorted subset

$$\left\{ \bar{j}_k(q, 0) \right\}_{m=1}^{M_n} \cap \left\{ j_k(q, 0) \right\}_{m=1}^{M_n} = \left\{ j_k(q, 0) \right\}_{m=1}^{M_n} \subset J \quad (51)$$

at (48) is reached at $w = q + 1$ for each $q = \overline{1, Q_n^*(0) - 1}$ by $Q_n^*(0) < Q_n(0)$, $n = \overline{1, N}$. Importantly, one ought to be aware of that the result of sorting in (49) depends on selection of the initial points

$$\bar{\mathbf{X}}_n^{(1)}(0) \in \left\{ \mathbf{X}_n^{(q)}(0) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(0)} \quad \forall n = \overline{1, N}.$$

In the case of completely mixed strategies, the sorting is needless:

$$\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0) = \mathbf{X}_n^{(q)}(0) \quad \forall q = \overline{1, Q_n^*(0)} \quad \text{and} \quad \forall n = \overline{1, N} \quad \text{by} \quad Q_1^*(0) = Q_1(0). \quad (52)$$

For δ -neighboring situations, let the sets

$$\left\{ \left\{ \bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(\delta) \right\}_{q=1}^{Q_n^*(\delta)} \right\}_{n=1}^N$$

regard built and found with identifications (32) and turning to these sets' description in (47) — (52). Just right along with (40), the solution (28) of FNCG (25) can be said that it approximates a genuine solution in UHINCG (3) only if

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(1) - 1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(1) \right) \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(0) - 1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(0) \right) \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (53)$$

Inequalities (53) imply that density of the pure strategies from the support at each player in 1-neighboring situation shall not decrease. This comes along also with the convention expressed in (34) for choosing the sampling numbers (31).

Definition 3. The solution (28) of FNCG (25) is called weakly consistent or weakly 1-consistent for being the approximate solution of UHINCG (3) if the inequalities (39), (40), (44), (45), (53) hold. Every strategy and its support in the weakly 1-consistent solution (situation) are called weakly consistent or weakly 1-consistent.

Weak 1-consistency is the most primitive method in ranking the finite approximation accurateness for UHINCG (3). It invokes minimal number of δ -neighboring situations, approximating the initial UHINCG (3). But inequalities (40) have been strengthened already into (41). Inequalities (53) might be strengthened as well involving FNCG with (-1) -neighboring situation.

REINFORCEMENT OF WEAK CONSISTENCY

Definition 4. The weakly consistent solution (28) of FNCG (25) is called consistent or 1-consistent for being the approximate solution of UHINCG (3) if the inequalities (41) and

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(0)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(0)) \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(-1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(-1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(-1)) \quad \forall n = \overline{1, N} \quad (54)$$

hold. Every strategy and its support in the 1-consistent solution (situation) are called consistent or 1-consistent.

The reinforced weak 1-consistency with (41) and (54) presumes that after the minimal decrement of the sampling points number the support cardinality cannot increase and the support pure strategies configuration cannot become denser. These presumptions complete the requirement of that the 1-consistent situation (28) in FNCG (25) within its 1-neighborhood shall maintain monotonic-like properties of the supports and the corresponding payoffs.

Hypothetical similarity between 1-consistent solution (28) of FNCG (25) and the same type solution of UHINCG (3) is provided with that the solution (28) is relatively independent under some tolerance upon the sampling points (13) in δ -neighboring situations by $\delta \in \{-1, 1\}$. The tolerance is expressed by leftside terms of inequalities (39), (40) and (41), (44), (45), (53), (54), where minimal increment of the sampling points number can only cause lesser differentiation of the players' payoffs, and of hypersurfaces, approximating their supports piecewise-linearly, and increment of cardinalities of these supports, and denser configuration of pure strategies from these supports.

In controlling the weak 1-consistency, there are $5N$ inequalities to be checked. Controlling the 1-consistency requires additionally $2N$ inequalities to be checked. Below is an opportunity to avoid superfluous computations in controlling the weak 1-consistency.

Theorem 3. If 1-neighboring situation in relation to the situation (28) in FNCG (25) is completely mixed, then for checking the weak 1-consistency of the solution (28) it is sufficient to check $3N$ inequalities (39), (44), (45).

Proof. Inasmuch as the 1-neighboring situation is completely mixed then the inequalities

$$Q_n^*(1) = Q_n(1) = \prod_{m=1}^{M_n} (S_m^{(n)} + 2) > \prod_{m=1}^{M_n} (S_m^{(n)} + 1) = Q_n(0) \geq Q_n^*(0) \quad \forall n = \overline{1, N}$$

give us all the inequalities (40), even strictly. Through the convention (52) there is the set

$$\{\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(1)\}_{q=1}^{Q_n^*(1)} = \{\mathbf{X}_n^{(q)}(1)\}_{q=1}^{Q_n(1)} \quad \forall n = \overline{1, N}$$

such that

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(1)) = \max_{m=1, M_n} \left\{ \max_{d_m=1, S_m^{(n)}+1} (x_{nm}^{(d_m+1)}(1) - x_{nm}^{(d_m)}(1)) \right\} \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (55)$$

Due to (34), from (55) and by (27) have:

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(1)) \leq \max_{m=1, M_n} \left\{ \max_{d_m=1, S_m^{(n)}} (x_{nm}^{(d_m+1)} - x_{nm}^{(d_m)}) \right\} \leq$$

$$\leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(0)-1\}} \sqrt{\sum_{m=1}^{M_n} \left(x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q+1, 0) \rangle} - x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q, 0) \rangle} \right)^2} = \max_{q \in \{1, Q_n^*(0)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q \rangle}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q+1 \rangle}(0) \right) \quad \forall n = \overline{1, N}$$

giving us all the inequalities (53). The theorem has been proved.

The case of the completely mixed solution facilitates in controlling its consistency. This is confirmed with the assertion below.

Theorem 4. If weakly 1-consistent solution is completely mixed then it is consistent.

Proof. For the weakly consistent strategy of the n -th player in the completely mixed solution (28), the inequalities

$$Q_n^*(0) = Q_n(0) = \prod_{m=1}^{M_n} (S_m^{\langle n \rangle} + 1) > \prod_{m=1}^{M_n} S_m^{\langle n \rangle} = Q_n(-1) \geq Q_n^*(-1) \quad \forall n = \overline{1, N}$$

give us all the inequalities

$$Q_n^*(0) = |\mathbf{u}_n(0)| > |\mathbf{u}_n(-1)| = Q_n^*(-1) \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (56)$$

The inequalities (56) with (40) give the inequalities (41) true. Then, once again, the convention (52) leads to that

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(0)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q \rangle}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q+1 \rangle}(0) \right) = \max_{m=1, M_n} \left\{ \max_{d_m=1, S_m^{\langle n \rangle}} \left(x_{nm}^{\langle d_m+1 \rangle} - x_{nm}^{\langle d_m \rangle} \right) \right\} \quad \forall n = \overline{1, N}. \quad (57)$$

And due to (34), from (57) and by (27) have:

$$\begin{aligned} & \max_{q \in \{1, Q_n^*(0)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q \rangle}(0), \bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q+1 \rangle}(0) \right) \leq \max_{m=1, M_n} \left\{ \max_{d_m=1, S_m^{\langle n \rangle}-1} \left(x_{nm}^{\langle d_m+1 \rangle}(-1) - x_{nm}^{\langle d_m \rangle}(-1) \right) \right\} \leq \\ & \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(-1)-1\}} \sqrt{\sum_{m=1}^{M_n} \left(x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q+1, -1) \rangle} - x_{nm}^{\langle \bar{j}_k(q, -1) \rangle} \right)^2} = \max_{q \in \{1, Q_n^*(-1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}} \left(\bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q \rangle}(-1), \bar{\mathbf{X}}_n^{\langle q+1 \rangle}(-1) \right) \quad \forall n = \overline{1, N} \end{aligned}$$

giving us all the inequalities (54), what confirms the 1-consistency. The theorem has been proved.

Consistency by either Definition 3 or Definition 4 of the solution (28), approximating the unknown solution of UHINCG (3), ranks accurateness of the approximation for the narrowest neighborhood of the sampling numbers (10) for the sampling points (13). For that, there has been used 1-neighborhood of the situation (28) in FNCG (25). Apparently, the approximation accurateness rank conception in the form of (weak) 1-consistency is easily generalized to the form of (weak) λ -consistency by $\lambda \in \mathbb{N}$, what is going to make possible to ascertain whether the tolerable dependence of the solution upon the sampling points extends over λ -neighborhoods.

APPROXIMATING A GENUINE SOLUTION IN UHINCG (3) WITH λ -CONSISTENT SOLUTION OF FNCG (25)

Definition 5. The situation (28) in FNCG (25) is called weakly λ -consistent for being the approximate solution of UHINCG (3) if $\forall n = \overline{1, N}$ the inequalities

$$|v_n^*(\mu) - v_n^*(\mu+1)| \leq |v_n^*(\mu-1) - v_n^*(\mu)|, \quad (58)$$

$$|\mathbf{u}_n(\mu+1)| \geq |\mathbf{u}_n(\mu)|, \quad (59)$$

$$\max_{U_n} |h_n(u_n, \mu) - h_n(u_n, \mu+1)| \leq \max_{U_n} |h_n(u_n, \mu-1) - h_n(u_n, \mu)|, \quad (60)$$

$$\|h_n(u_n, \mu) - h_n(u_n, \mu+1)\| \leq \|h_n(u_n, \mu-1) - h_n(u_n, \mu)\| \text{ in } \mathbb{L}_2(U_n), \quad (61)$$

and

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(\mu+1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(\mu+1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(\mu+1)) \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(\mu)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(\mu), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(\mu)) \quad (62)$$

are true $\forall \mu = \overline{1-\lambda, \lambda-1}$ by $\lambda \in \mathbb{N}$. Every strategy and its support in the weakly λ -consistent solution (situation) are called weakly λ -consistent.

Definition 6. The weakly λ -consistent solution (28) of FNCG (25) is called λ -consistent for being the approximate solution of UHINCG (3) if $\forall n = \overline{1, N}$ the inequalities

$$|\mathfrak{U}_n(\mu)| \geq |\mathfrak{U}_n(\mu-1)| \quad (63)$$

and

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(\mu)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(\mu), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(\mu)) \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(\mu-1)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(\mu-1), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(\mu-1)) \quad (64)$$

are true $\forall \mu = \overline{1-\lambda, \lambda-1}$ by $\lambda \in \mathbb{N}$. Every strategy and its support in the λ -consistent solution (situation) are called λ -consistent.

For checking λ -consistency of the weakly λ -consistent solution, it is not of necessity to check all $4N\lambda - 2N$ inequalities (63) and (64). It is sufficient to check $2N$ inequalities ever.

Theorem 5. If for some $\lambda \in \mathbb{N}$ the inequalities

$$|\mathfrak{U}_n(1-\lambda)| \geq |\mathfrak{U}_n(-\lambda)| \quad (65)$$

and

$$\max_{q \in \{1, Q_n^*(1-\lambda)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(1-\lambda), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(1-\lambda)) \leq \max_{q \in \{1, Q_n^*(-\lambda)-1\}} \rho_{\mathbb{R}^{M_n}}(\bar{\mathbf{X}}_n^{(q)}(-\lambda), \bar{\mathbf{X}}_n^{(q+1)}(-\lambda)) \quad (66)$$

are true $\forall n = \overline{1, N}$ then the weakly λ -consistent solution (28) of FNCG (25) is λ -consistent.

Proof. Inasmuch as the inequalities (59) and (62) are true $\forall \mu = \overline{1-\lambda, \lambda-1}$ then, having added the inequalities (65) and (66) to them, there are true the inequalities (63) and (64) $\forall \mu = \overline{1-\lambda, \lambda-1}$ by that known λ . The theorem has been proved.

Approximation of UHINCG (3) in λ -consistency under the generalizing Definition 5 and Definition 6 prescribes the monotonic-like properties of the supports and the corresponding payoffs within λ -neighborhood of the situation (28) in FNCG (25). The greater λ the higher the approximation accurateness rank is. Apparently, weak $(\lambda-1)$ -consistency follows weak λ -consistency and $(\lambda-1)$ -consistency follows λ -consistency for $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. However, for ranking the approximation accurateness in λ -consistency there are needed 2λ δ -neighboring situations (35) at $\delta \in \{\overline{-\lambda, \lambda}\} \setminus \{0\}$ to be found. So, for trying to approximate the initial UHINCG (3), it takes $2\lambda+1$ FNCG (30) at $\delta = \overline{-\lambda, \lambda}$.

DISCUSSION AND CONCLUSIVE REMARKS

UHINCG (3) is approximated as FNCG (25) through sampling PPF and simplification of FNCG (24) if only the situation (28) has a rank of the approximation accurateness. This rank has been conceived as consistency of the supports and the corresponding payoffs within λ -neighborhood of

the situation (28) in FNCG (25). Principally, there are three steps to get the approximated UHINCG (3). The sampling goes first. After having reshaped the sampled PPF as matrices $\{\mathbf{P}_n(0)\}_{n=1}^N$ of the format (14) into matrices $\{\mathbf{G}_n(0)\}_{n=1}^N$ of the format (20), the solution (28) of FNCG (25) is supposed to be searched faster. Finally, the solution (28) is ascertained whether it is (weakly) λ -consistent. In other words, it is ascertained how much this finite solution is tolerably dependent (or relatively independent) upon the sampling points (13) for watching hypothetical similarity between (28) and the same type solution of UHINCG.

The idea of approximating UHINCG finitely lies in that every player's strategies in the finite solution shall be sufficiently close when the sampling slightly varies. The sufficient closeness is dissociated into four components. Expectedly, it concerns the supports' cardinalities, what has been expressed with (59) and (63) in Definition 5 and Definition 6. Also the sufficient closeness is understood in the sense of the most widespread metrics, what has been expressed with (60) and (61) in Definition 5 for measuring the corresponding distances between hypersurfaces, approximating the supports piecewise-linearly. And the sufficient closeness concerns measuring Euclidean distances between differently generated supports' pure strategies, what has been expressed with (62) and (64) in Definition 5 and Definition 6 for watching the supports' configurations through their density property. To the completion, the sufficient closeness presumes that the player's payoffs as the aftermath of the support usage shall differentiate less as the sampling numbers increase, what has been expressed with (58) in Definition 5.

Naturally, before approximating the weak 1-consistency ought to be checked first. The check consecution is recommended to start with checking the inequalities (39) or (40), because there are lesser computations. Then subconsecution of checking the inequalities (44), (45), (53) goes, needing more computational resources for solving the sorting problems (50) at (48) and (51) by $n = \overline{1, N}$ for (49). Namely these consecutions are preferable, because the easiest requirements are checked before the more complicated ones for preventing needless huge computations over non-consistent solutions, being revealed after easier comparisons (39) or (40).

An essential demerit is that existence of limits (38), (42), (46) remains non-proved. If consistency were conceived in the strict form, where all the inequalities in Definition 5 and Definition 6 were with signs "greater than" and "less than" instead of "greater than or equal" and "less than or equal", then it would have been probably a way to prove some convergences in those limits. But requirement with the strictness could have been very rigid. And anyway questions of effective computations for revealing consistent solutions are of higher importance. These questions have been particularly resolved with the proved Theorems 2 — 5. Reshaping the player's payoffs into line array under Theorem 2 impacts favorably on simplification and speedup.

Furthermore, another merit of the finite approximation is an opportunity of obtaining a solution to the conflict object even when UHINCG (3) is solved solely in ε -equilibrium situations or doesn't have solution at all. Besides, the (weak) consistent approximate solution (28), where every player has the finite strategy support, is practiced freer with discrete variates unlike practicing on continuous variates. And, conspicuously, DDIS of PPF allow to sample dimensions depending on oscillation of PPF: quickly oscillating dimensions of PPF are sampled tighter, and slowly oscillating dimensions of PPF are sampled sparser.

According to the isomorphism of UHINCG (3) and compact INCG in Euclidean finite-dimensional subspaces of appropriate dimensions, the stated approximation method is applicable to INCG on compact action spaces. Just normalization to unit hypercubes $\{U_n\}_{n=1}^N$ is obligatory. And further work will be focused on building an efficient sorter for solving the problems (50) at (48) and (51) by $n = \overline{1, N}$ for (49). And there are five important open questions:

1. Shall the n_1 -th player at $n_1 \in \overline{\{1, N\}}$ use its strategy from the solution of FNCG (25) if the n_1 -th player's strategy satisfies conditions of (weakly) λ -consistency, but $\exists n_0 \in \overline{\{1, N\}}$ such that the n_0 -th player's strategy does not satisfy conditions of (weakly) λ -consistency?
2. Shall the n_1 -th player at $n_1 \in N_1 \subset \overline{\{1, N\}}$ use its strategy from the solution of FNCG (25) if the n_1 -th player's strategy satisfies conditions of (weakly) λ -consistency and $|N_1| = N - 1$, but $\exists n_0 \in \overline{\{1, N\}} \setminus N_1$ singly such that the n_0 -th player's strategy does not satisfy conditions of (weakly) λ -consistency or is just (weakly) $(\lambda - 1)$ -consistent?
3. Shall the n_1 -th player at $n_1 \in N_1 \subset \overline{\{1, N\}}$ use its strategy from the solution of FNCG (25) if the n_1 -th player's strategy satisfies conditions of λ -consistency, but $\exists n_0 \in N_0 \subset \overline{\{1, N\}}$ by $N_1 \cup N_0 = \overline{\{1, N\}}$ such that the n_0 -th player's strategy is weakly λ -consistent?
4. Is it possible to determine (weak) λ -consistency of the solution of FNCG (25) if it is already known that the n_1 -th player's strategy at $n_1 \in N_1 \subset \overline{\{1, N\}}$ and $|N_1| \leq N - 1$ satisfies conditions of (weakly) λ -consistency?
5. Are two different situations (28) in FNCG (25) necessarily (weakly) λ -consistent if one of them is (weakly) λ -consistent already?

These questions motivate to continue studies of approximating INCG. They may evolve into more complicated fundamental research. It will include ε -equilibrium solutions in pure strategies or in mixed strategies with finite supports, whose relation to game approximation is obvious [5, 9]. Nevertheless, the stated approximation method has a strong connection with practicing finite supports on discrete variates [23], what is a good supplement to finite game approximation theory and praxis.

REFERENCES

1. Osborne M. J. An introduction to game theory / M. J. Osborne. — Oxford : Oxford University Press, Incorporated, 2003.
2. Nisan N. Algorithmic Game Theory / N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2007.
3. Harsanyi J. C. A General Theory of Equilibrium Selection in Games / J. C. Harsanyi, R. Selten. — Cambridge Mass. : The MIT Press, 1988.
4. Gąsior D. Pareto-optimal Nash equilibrium in capacity allocation game for self-managed networks / D. Gąsior, M. Drwal // Computer Networks. — 2013. — Vol. 57, Iss. 14. — P. 2817 — 2832.
5. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьев. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 496 с.
6. Bajoori E. Perfect equilibrium in games with compact action spaces / E. Bajoori, J. Flesch, D. Vermeulen // Games and Economic Behavior. — 2013. — Vol. 82. — P. 490 — 502.
7. Han D. An improved two-step method for solving generalized Nash equilibrium problems / D. Han, H. Zhang, G. Qian, L. Xu // European Journal of Operational Research. — 2012. — Vol. 216, Iss. 3. — P. 613 — 623.

8. Chen X. Recent development in computational complexity characterization of Nash equilibrium / X. Chen, X. Deng // *Computer Science Review*. — 2007. — Vol. 1, Iss. 2. — P. 88—99.
9. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьёв. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
10. Browning L. Evolution of coordinated alternating reciprocity in repeated dyadic games / L. Browning, A. M. Colman // *Journal of Theoretical Biology*. — 2004. — Vol. 229, Iss. 4. — P. 549—557.
11. Lemke C. E. Equilibrium points of bimatrix games / C. E. Lemke, J. T. Howson // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1964. — Vol. 12, Iss. 2. — P. 413—423.
12. Kukushkin N. S. Nash equilibrium in compact-continuous games with a potential / N. S. Kukushkin // *International Journal of Game Theory*. — 2011. — Vol. 40, Iss. 2. — P. 387—392.
13. Moulin H. *Théorie des jeux pour l'économie et la politique* / H. Moulin. — Paris : Hermann, 1981.
14. Bernhard P. On finite approximation of a game solution with mixed strategies / P. Bernhard, J. Shinar // *Applied Mathematics Letters*. — 1990. — Vol. 3, Iss. 1. — P. 1—4.
15. Kontogiannis S. C. Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games / S. C. Kontogiannis, P. N. Panagopoulou, P. G. Spirakis // *Theoretical Computer Science*. — 2009. — Vol. 410, Iss. 17. — P. 1599—1606.
16. Mallozzi L. Approximate equilibria for Bayesian games / L. Mallozzi, L. Pusillo, S. Tijs // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2008. — Vol. 343, Iss. 2. — P. 1098—1102.
17. Reny P. J. On the Existence of Pure and Mixed Strategy Equilibria in Discontinuous Games / P. J. Reny // *Econometrica*. — 1999. — Vol. 67. — P. 1029—1056.
18. Романюк В. В. Дискретизация континуальной антагонистической игры на единичном гиперкубе и преобразование многомерной матрицы для решения соответствующей матричной игры / В. В. Романюк // *Проблемы управления и информатики*. — 2015. — № 1. — С. 118—126.
19. Stoltz G. Learning correlated equilibria in games with compact sets of strategies / G. Stoltz, G. Lugosi // *Games and Economic Behavior*. — 2007. — Vol. 59, Iss. 1. — P. 187—208.
20. Gabarró J. The complexity of game isomorphism / J. Gabarró, A. García, M. Serna // *Theoretical Computer Science*. — 2011. — Vol. 412, Iss. 48. — P. 6675—6695.
21. Hoffbeck J. P. Interfacing MATLAB with a parallel virtual processor for matrix algorithms / J. P. Hoffbeck, M. Sarwar, E. J. Rix // *Journal of Systems and Software*. — 2001. — Vol. 56, Iss. 1. — P. 77—80.
22. Rahman T. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Nodal elements / T. Rahman, J. Valdman // *Applied Mathematics and Computation*. — 2013. — Vol. 219, Iss. 13. — P. 7151—7158.
23. Romanuke V. V. Method of practicing the optimal mixed strategy with innumerable set in its spectrum by unknown number of plays / V. V. Romanuke // *Measuring and Computing Devices in Technological Processes*. — 2008. — N. 2. — P. 196—203.

REFERENCES

1. Osborne M. J. An introduction to game theory, Oxford, Oxford University Press, Incorporated, 2003.
2. Nisan N., Roughgarden T., Tardos É., Vazirani V. V. Algorithmic Game Theory, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2007.
3. Harsanyi J. C., Selten R. A General Theory of Equilibrium Selection in Games, Cambridge Mass., The MIT Press, 1988.
4. Gąsior D., Drwal M. Pareto-optimal Nash equilibrium in capacity allocation game for self-managed networks, Computer Networks, 2013, Volume 57, Issue 14, pp. 2817 — 2832.
5. Vorob'yov N. N. Game theory fundamentals. Noncooperative games, Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
6. Bajoori E., Flesch J., Vermeulen D. Perfect equilibrium in games with compact action spaces, Games and Economic Behavior, 2013, Volume 82, pp. 490 — 502.
7. Han D., Zhang H., Qian G., Xu L. An improved two-step method for solving generalized Nash equilibrium problems, European Journal of Operational Research, 2012, Volume 216, Issue 3, pp. 613 — 623.
8. Chen X., Deng X. Recent development in computational complexity characterization of Nash equilibrium, Computer Science Review, 2007, Volume 1, Issue 2, pp. 88 — 99.
9. Vorob'yov N. N. Game theory for economist-cyberneticians, Moscow, Nauka, 1985 (in Russian).
10. Browning L., Colman A. M. Evolution of coordinated alternating reciprocity in repeated dyadic games, Journal of Theoretical Biology, 2004, Volume 229, Issue 4, pp. 549 — 557.
11. Lemke C. E., Howson J. T. Equilibrium points of bimatrix games, SIAM Journal on Applied Mathematics, 1964, Volume 12, Issue 2, pp. 413 — 423.
12. Kukushkin N. S. Nash equilibrium in compact-continuous games with a potential, International Journal of Game Theory, 2011, Volume 40, Issue 2, pp. 387 — 392.
13. Moulin H. Théorie des jeux pour l'économie et la politique, Paris, Hermann, 1981 (in French).
14. Bernhard P., Shinar J. On finite approximation of a game solution with mixed strategies, Applied Mathematics Letters, 1990, Volume 3, Issue 1, pp. 1 — 4.
15. Kontogiannis S. C., Panagopoulou P. N., Spirakis P. G. Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games, Theoretical Computer Science, 2009, Volume 410, Issue 17, pp. 1599 — 1606.
16. Mallozzi L., Pusillo L., Tijs S. Approximate equilibria for Bayesian games, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, Volume 343, Issue 2, pp. 1098 — 1102.
17. Reny P. J. On the Existence of Pure and Mixed Strategy Equilibria in Discontinuous Games, Econometrica, 1999, Volume 67, pp. 1029 — 1056.
18. Romanuke V. V. Sampling of the continuous antagonistic game on unit hypercube and reshaping multidimensional matrix for solving the corresponding matrix game, Problems of Control and Informatics, 2015, N. 1, pp. 118 — 126.
19. Stoltz G., Lugosi G. Learning correlated equilibria in games with compact sets of strategies, Games and Economic Behavior, 2007, Volume 59, Issue 1, pp. 187 — 208.
20. Gabarró J., García A., Serna M. The complexity of game isomorphism, Theoretical Computer Science, 2011, Volume 412, Issue 48, pp. 6675 — 6695.

21. Hoffbeck J. P., Sarwar M., Rix E. J. Interfacing MATLAB with a parallel virtual processor for matrix algorithms, *Journal of Systems and Software*, 2001, Volume 56, Issue 1, pp. 77 — 80.
22. Rahman T., Valdman J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Nodal elements, *Applied Mathematics and Computation*, 2013, Volume 219, Issue 13, pp. 7151 — 7158.
23. Romanuke V. V. Method of practicing the optimal mixed strategy with innumerable set in its spectrum by unknown number of plays, *Measuring and Computing Devices in Technological Processes*, 2008, N. 2, pp. 196 — 203.

УДК 539.373

РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЦИЛИНДРА ПРИ МНОГОСЛОЙНОМ НАРАЩИВАНИИ ЖИДКИМ МЕТАЛЛОМ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОСЛЕДУЮЩЕМ ЦИКЛИЧЕСКОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

¹Сенченков И. К., д. ф.-м. н., с. н. с., ¹Червинко О. П., к. ф.-м. н., с. н. с.,
²Доля Е. В., к. ф.-м. н., доцент

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина*

²*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Воздухофлотский проспект, 31, г. Киев, 03680, Украина*

term@inmech.kiev.ua

Развита методика расчета остаточных напряжений в цилиндре при многослойной наплавке, эксплуатационного термомеханического состояния и долговечности при последующем циклическом термомеханическом нагружении. Получены количественные оценки указанных параметров.

Ключевые слова: многослойное наращивание, численное моделирование, микроструктура, остаточные напряжения, циклическое нагружение, долговечность.

РОЗРАХУНОК ВТОМНОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ЦИЛІНДРА ПРИ БАГАТОШАРОВОМУ НАРОЩУВАННІ РІДКИМ МЕТАЛОМ ПО БОКОВІЙ ПОВЕРХНІ І НАСТУПНОМУ ЦИКЛІЧНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

¹Сенченков І. К., д. ф.-м. н., с. н. с., ¹Червинко О. П., к. ф.-м. н., с. н. с.,
²Доля О. В., к. ф.-м. н., доцент

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрянофлотський проспект, 31, м. Київ, 03680, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Розвинуто методику розрахунку залишкових напружень у циліндрі при багатошаровому наплавленні, термомеханічного стану та довговічності при наступному циклічному термомеханічному навантаженні. Отримано кількісні оцінки вказаних параметрів.

Ключові слова: багатошарове нарощування, чисельне моделювання, микроструктура, залишкові напруження, циклічне навантаження, довговічність.

CALCULATION OF FATIGUE DURABILITY OF CYLINDER UNDER MULTILAYERED DEPOSITION OF LIQUID METAL ON LATERAL SURFACE AND SUBSEQUENT CYCLIC THERMOMECHANICAL LOADING

Senchenkov I. K., D.Sc. in Physics and Maths, Chervinko O. P., Ph.D. in Physics and Maths,
Dolya H. V., Ph.D. in Physics and Maths

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NASU,
Nesterova str., Kiev, 03057, Ukraine*

*Kiev National University of Construction and Architecture,
Vozduhoflotsky ave., Kiev, 03680, Ukraine*

term@inmech.kiev.ua

The paper deals with the numerical simulation of residual and current thermo-mechanical and microstructural state of cylindrical parts subjected a multi-layer surfacing as well as their durability under subsequent thermal and mechanical loading. Statement of the problem is based on the quasi-static thermal mechanics of inhomogeneous inelastic bodies. As constitutive equations the unified flow model Bodner-Partom is utilized. The experimentally defined dependences of model parameters on temperature and phase composition are taken into account. The calculation of the structural state is performed using thermo-kinetic diagrams of decay of super cooled austenite and Koistinen-Marburger equation of phase accumulation during microstructure transformations is applied. The process of a multi-layer surfacing of cylindrical bodies is simulated within the model of growing bodies. To meet the conditions on the surface of metal deposition the concept of "eigen strain and temperature" is implemented. Scheme of "layer by layer" deposition is employed. To solve the problem of three-dimensional spiral surfacing and subsequent operational loading an approximate scheme is developed. The proposed scheme uses an axisymmetric formulation of the problem of the modeling of process of surfacing residual stresses formation, as well as formulation of the problem of generalized plane strain of long cylinder under operational loading with accounting of the residual strains is used. Finite element method developed is combined with the implicit time stepping scheme for integrating the unsteady equations and iterative schemes for solving nonlinear boundary value problems of thermomechanics at each time step. Isoparametric quadrilateral element is utilized. The calculation method is being tested on the example of the roller for hot rolling of 50HFM steel with two-layer surfacing of working side surface of the first layer (sub-layer) is surfaced steel 08kp, and the second (external) layer is 25H5FMS steel. To determine the characteristics of that steel wire used in the embodiment, 4H5FMS tool steel properties are being utilized. Being calculated the average and peak values of the parameters of the stress state in conjunction with the original properties of the material are used in the Manson-Birger equation of the fatigue life to make an estimate of the durability of the surface layer, sublayer, and the base metal. The calculations revealed that conditional critical damage level occurs in the outside layer, in which there are maximum values of temperature and equivalent stress amplitudes. The sub-layer and the base metal therewith have a substantial margin of durability.

Key words: multilayered surfacing, numerical simulation, microstructures, residual stresses, cyclic loading, durability.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд элементов конструкций, таких, как ролики МНРЗ, валки горячей прокатки, штампы горячего деформирования металла и т. п. при изготовлении или восстановительном ремонте подвергаются многослойной наплавке и последующему циклическому эксплуатационному нагружению [1, 2].

При разработке технологии наплавки и оценке усталостной долговечности деталей используются методы численного моделирования термомеханических процессов на указанных стадиях жизни детали. Сущность процесса наплавления состоит в нанесении расплавленного металла на поверхность тела. С точки зрения механики деформируемого твердого тела такие процессы описываются в рамках неклассических моделей т. н. растущих тел [3]. Применительно к наплавлению и родственным технологиям такие модели развиты в работах [4-7].

Процесс наплавления реализуется в широком интервале гомологических температур, в котором материал проявляет термоупруговязкопластические свойства. В настоящее время для описания такого неупругого поведения материала широко применяются модели, основанные на унифицированном подходе, использующем переменные состояния. Унифицированные модели деформирования учитывают зависимость напряжений от скорости деформации и не содержат отдельного описания пластичности и ползучести.

Экспериментальные и теоретические исследования показали, что определяющие уравнения для неупругого деформирования развиваются на основе унифицированных моделей [8]. Одной из них является модель Боднера-Партома [9], хорошо обоснованная экспериментами и широко используемая в приложениях. Адаптация этой модели к процессам, характерным для наплавления, дана в работе [10].

В термомеханических процессах материал детали при ее изготовлении и эксплуатации может иметь различные температурные истории. На стадии достаточно высокого нагрева исходные фазы материала, в частности, стали, превращаются в аустенит, который на стадии охлаждения может распадаться на перлит, бейнит и мартенсит. Превращения фаз сопровождаются изменениями физико-механических характеристик, скрытыми теплотами, изменениями объема, появлением термофазовых деформаций и т. д.

Указанные факторы отражены в алгоритме анализа термомеханических процессов, изложенном в работах [6, 7, 11, 12]. При расчете кинетики концентрации фаз используются термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита [13] в сочетании с уравнением Коистинена-Марбургера [14].

Для решения рассматриваемого класса задач в работах [5-7, 11] развита конечно-элементная методика в сочетании с неявными временными шаговыми схемами интегрирования нестационарных уравнений, а также итерационными методами решения нелинейных краевых задач термомеханики на каждом временном шаге. В целом современный уровень численного моделирования рассматриваемых процессов зафиксирован в монографиях [2, 15, 16].

Расчет остаточного и текущего эксплуатационного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния является важным, но не окончательным этапом решения задачи. Определяющим является оценка долговечности наплавленного элемента конструкции и ее связь с выбором наплавочных материалов и технологических параметров наплавления.

В настоящей работе развита методика оценки усталостной долговечности цилиндрических деталей при многослойном наплавлении по боковой поверхности с учетом остаточных напряжений при действии циклического термомеханического нагружения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является валок горячей прокатки НКМЗ (рис. 1) из стали 50ХФА, наплавленный подслоем низкоуглеродистой стали 08кп и наружным слоем мартенситной стали 25Х5ФМС (рис. 2). Диаметр бочки вала 1435 мм.

После наплавления валок подвергается эксплуатационному нагружению в условиях термомеханического цикла. Предполагается, что валок подпирается жестким валком и не испытывает деформаций изгиба.

Задача о спиральном наплавлении и последующем циклическом нагружении вала является трехмерной (3D-задача). На настоящем этапе развития ЭВМ такая постановка не может быть эффективной для практических расчетов.

Учитывая двухстадийный характер процесса – наплавка и эксплуатация, а также осевую протяженность геометрии вала, предлагается следующий подход к решению задачи.

1. Стадия наплавления моделируется в рамках осесимметричной постановки задачи.
2. Стадия эксплуатации, характеризующаяся высоко локализованными контактными температурно-механическими нагрузками, описывается в рамках задачи о плоской деформации для осевого сечения цилиндра А–А (рис. 1).

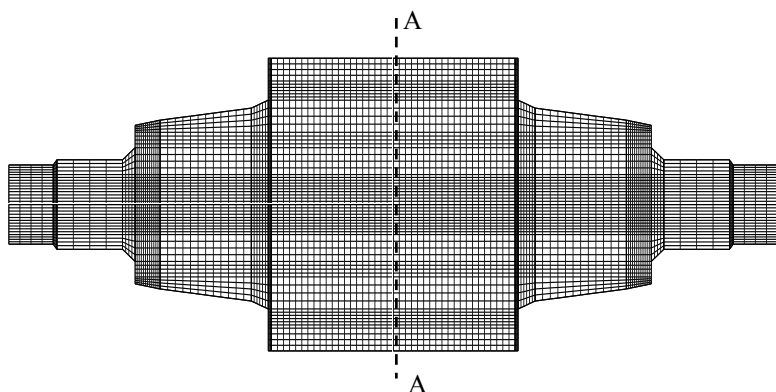


Рис. 1. Конечно-элементная разбивка прокатного вала

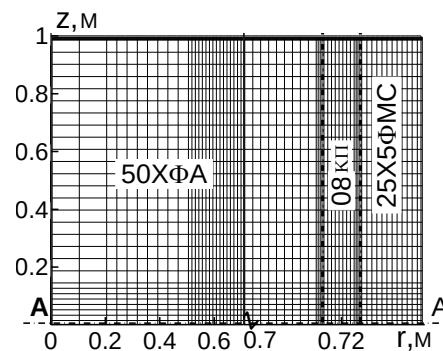


Рис. 2. Конечно-элементная разбивка наплавленной бочки вала

При этом постановка задачи для стадии 2 должна учитывать остаточные деформации ($\varepsilon_{zz} \neq 0$), сформированные на стадии наплавления. В этом аспекте такая постановка отличается от классической задачи о плоской деформации, в которой остаточные деформации отсутствуют ($\varepsilon_{zz} = 0$).

Механическое поведение материала описывается моделью Боднера-Партома, которая включает следующие соотношения в цилиндрической системе координат $Orz\phi$:

– закон течения и уравнение пластической несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0, \quad i, j = r, z, \phi; \quad (1)$$

– закон течения Прандтля-Рейсса

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{D_0}{J_2^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{K_0 + K}{\sqrt{3} J_2} \right)^{2n} \right] s_{ij}, \quad (2)$$

где $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$;

– эволюционное уравнение для параметра изотропного упрочнения K

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K) \dot{W}_p, \quad K(0) = 0, \quad (3)$$

где $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$; D_0, K_0, K_1, m_1, n – параметры модели,

– закон Гука

$$\sigma_{kk} = 3K_v (\varepsilon_{kk} - 3\alpha(\theta - \theta_0)), \quad s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (4)$$

где G, K_v, α – модули сдвига, объемного сжатия и коэффициент линейного теплового расширения.

Соотношения дополняются универсальными уравнениями квазистатического равновесия и теплопроводности для осесимметричной задачи

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$c_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Q, \quad (6)$$

где c_v и λ – коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности, Q – источник тепла, $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$, а также граничными и начальными (для температуры) условиями:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad -\lambda \frac{\partial\theta}{\partial r} = \alpha(\theta - \theta_c) + cc_0(T^4 - T_c^4), \quad r = R, R+h, \quad 0 < z < L, \quad t \neq t_{1,2}^*; \\ \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \pm \lambda \frac{\partial\theta}{\partial r} = \alpha(\theta - \theta_c) + c\tilde{n}_0(T^4 - T_c^4), \quad z = 0, \quad r = R, R+\tilde{h}, \quad t > 0; \quad (7)$$

$$\theta = \theta_c, \quad t = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{h} = h_1, h_1 + h_2$; $h_{1,2}$ – толщины первого и второго наплавленного слоя; $t_{1,2}^*$ – время наложения наплавленных слоев; λ – коэффициент теплопроводности; c – коэффициент черноты; $\tilde{n}_0$ – постоянная Больцмана; α – коэффициент теплоотдачи; θ_c – температура окружающей среды.

Рассмотрим процесс наплавления ($t = t_{1,2}^*$) и модификацию соотношений (2)-(4) с учетом процесса наращивания. Задача решается методом конечных элементов. Пусть процесс наращивания является контролируемым, т.е., известны скорость наращивания и конечная конфигурация тела. Простейший вариант алгоритма решения состоит в следующем. Конфигурация наращиваемого тела покрывается фиксированной КЭ-сеткой. КЭ-сетка покрывает как наращиваемое тело в исходной конфигурации, так и все наращиваемые в будущем слои. Таким образом, сетка (количество узлов) не изменяется в процессе численного моделирования. В области, занимаемой исходным телом, свойства определяются материалом тела. Материалу наращивания первоначально приписываются свойства материала «пустоты», который считается термоупругим с характеристиками $E = 0$, $\nu = 0$, $\alpha = \alpha_f$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_f – коэффициент линейного теплового расширения материала наращивания. Теплофизические свойства «пустоты» принимаются такими же, как у материала, который наращивается. Следовательно, элемент «пустой» только с точки зрения механики. В процессе заполнения, который рассматривается как процесс, развивающийся во времени, «пустые» элементы КЭ-сетки будут заполняться наращиваемым материалом. Важно иметь в виду, что в процессе заполнения элементов (наращивания) деформируется вся КЭ-сетка, как покрывающая исходное тело, так и примыкающие к телу «пустые» элементы.

Пусть в момент заполнения t^* некоторый пустой элемент сетки $\Delta V(t^*)$ имеет деформацию ε_{ij}^* и пусть он заполняется материалом, имеющим температуру θ^* . Предполагается, что материал наращиваемого слоя вплоть до контакта с поверхностью тела является ненапряженным

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad t = t^*. \quad (9)$$

В рамках рассматриваемой модели наращивание есть заполнение элемента, имеющего предварительную деформацию ε_{ij}^* , материалом наращивания с температурой θ^* . Таким образом, условия (9), по сути, означают, что

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^*, \theta^*) = 0 \quad \text{в} \quad \Delta V(t^*). \quad (10)$$

Для того, чтобы определяющие уравнения наращиваемого материала (2), (4) согласовывались с условием (9), (10), необходимо и достаточно модифицировать уравнения (2) и (4) следующим образом:

$$s_{ij} = 2G_f (e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_f (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^* - 3\alpha_f (\theta - \theta^*)); \quad t > t^*,$$

$$\varepsilon_{ij}^p(t^*) = 0, \quad K_0(t^*) = K_{0f}(\theta^*).$$
(11)

Здесь нижний индекс f показывает, что параметры относятся к материалу наращиваемого объема. Таким образом, чтобы удовлетворить условие наращивания (9), все элементы, которые наращиваются, будут иметь определяющие уравнения, индивидуализированные теми конкретными значениями деформации ε_{ij}^* и температуры θ^* , при которых происходило их заполнение. Поэтому состояние $(\varepsilon_{ij}^*, \theta^*)$ можно трактовать, как «собственное», поскольку оно не вызывает напряжений.

В настоящей работе для расчета микроструктурного состояния металла используются термокинетические диаграммы (ТКД). Они описывают распад переохлажденного аустенита в режиме непрерывного охлаждения. ТКД для стали 50ХФА и 25Х5ФМС приведены на рис. 3 и 4 [13].

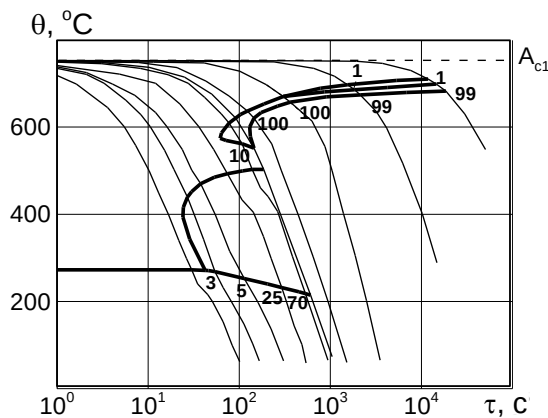


Рис. 3. ТКД для стали 50ХФА

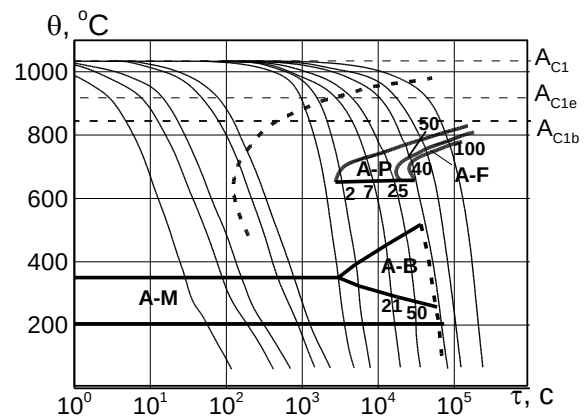


Рис. 4. ТКД для стали 25Х5ФМС

Эти диаграммы отображают аллотропические превращения в твердом теле, обусловленные распадом аустенита ($\xi = A$) в сталях в фазы феррита ($\xi = F$), перлита ($\xi = P$), бейнита ($\xi = B$) и мартенсита ($\xi = M$) при охлаждении. Жирными линиями ограничены области превращения, а тонкие линии отвечают кривым охлаждения. Цифры показывают объемные проценты распавшегося аустенита на выходе из областей превращений.

Закон накопления новой фазы ξ в соответствующих областях вдоль траектории охлаждения дается феноменологическим уравнением Коистинена-Марбургера [14]

$$p_{\xi} = \left[1 - \exp \left(-k \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e} \right) \right] p_{\xi e},$$
(12)

где θ_s, θ_e — температуры начала и конца превращения, $p_{\xi} = C_{\xi} \cdot 100\%$, $p_{\xi e}$ — максимальное значение новой фазы для данной траектории, C_{ξ} — объемная доля фазы, $0 \leq C_{\xi} \leq 1$, $\sum_{\xi} C_{\xi} = 1$.

Материальные свойства каждой фазы Y_{ξ} рассчитываются с учетом зависимости от температуры $Y_{\xi} = Y_{\xi}(\theta)$. Для расчета макрохарактеристик Y для произвольного фазового состава используется линейное правило смесей. Общая формула записывается в виде:

$$Y(\theta, t) = \sum_{\xi} C_{\xi}(\theta, t) Y_{\xi}(\theta).$$
(13)

Физическими величинами, рассчитанными по правилу смесей, могут быть: c_v – теплоемкость; k – теплопроводность; E – модуль Юнга; α – коэффициент линейного термического расширения; ν – коэффициент Пуассона.

В широком интервале температур правило смесей (13) используется и сопоставляется с экспериментами в работах [5, 16, 17].

Для оценки усталостной долговечности используем модель Мэнсона-Биргера [18]. При асимметричном цикле нагружения с использованием уравнения Гудмана [19] имеем

$$\Delta \varepsilon = \left(\ell n \frac{1}{1-\psi} \right)^{0,6} N^{-0,6} + \frac{2\sigma_{-1}}{E} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) \left(\frac{N}{N_0} \right)^k, \quad (14)$$

где σ_{-1} – предел выносливости, N_0 – база определения предела выносливости, E – модуль Юнга, ψ – пластичность при разрушении, k – параметр, определяющий угол наклона кривой усталости, σ_B – временное сопротивление, σ_m и σ_a – среднее и амплитудное значения напряжения в цикле.

При отсутствии циклической пластической деформации $\Delta \varepsilon^p = 0$, первым слагаемым в (14) можно пренебречь. В результате с учетом соотношений $\Delta \varepsilon = \Delta \sigma / E$, $\Delta \sigma = 2\sigma_a$, получаем:

$$\ell n N = \frac{1}{k} \ell g \left[\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \left(\frac{\sigma_B - \sigma_m}{\sigma_a} \right) N_0^k \right]. \quad (15)$$

Переход от одноосного уравнения (15) к многоосному напряженному состоянию осуществляется с использованием эквивалентного напряжения σ_i [18],

$$\sigma_i = \sqrt{3} s_i = \left(2/3 s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}.$$

С учетом соотношений $\sigma_{ia} = \sqrt{3} s_{ia}$ и $\sigma_m = \sqrt{3} s_{im}$, после некоторых преобразований, получаем:

$$\ell n N = \frac{1}{k} \ell g \left[\chi \left(\frac{\sigma_B - \sqrt{3} s_{im}}{s_{ia}} \right) \right], \quad (16)$$

где

$$\chi = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \frac{N_0^k}{\sqrt{3}}. \quad (17)$$

Значения величин $\sigma_B = \sigma_B(\theta)$, $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(\theta)$, $N_0(\theta)$ и $k(\theta)$ для каждого материала выбирались из справочной литературы [19-21], а значения s_{ia} , s_{im} и θ рассчитывались с использованием численных методов в каждой точке цилиндра.

Для конкретизации соотношения (16) применялись следующие упрощающие допущения: (1) отношение $\sigma_{-1}(\theta)/\sigma_B(\theta) = \text{const}$, $k = \text{const}$ и $N_0 = \text{const}$ для всех температур; (2) предел прочности σ_B зависит от температуры и в соотношении (16) рассчитывается для максимального значения температуры в цикле.

Указанные допущения приводят к некоторому обобщению многоциклового варианта универсального уравнения Мэнсона. Значения параметров в (16) и (17) приводятся ниже.

Задача эксплуатационного нагружения цилиндра формулируется в рамках плоской деформации для срединного сечения $z = L/2$. В полярной системе координат $Or\varphi$ типичное

распределение температуры и давления в развертке $\varphi^* = \varphi - \omega t$, где ω – круговая частота вращения валка, показана на рис. 5.

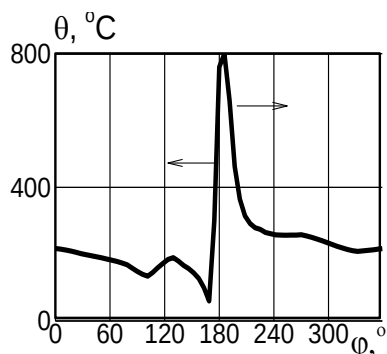


Рис. 5. Распределение температуры и давления по окружной координате на поверхности валка при $\theta_{\max} = 800^\circ\text{C}$

В области контакта с горячей полосой граничные условия принимаются в виде:

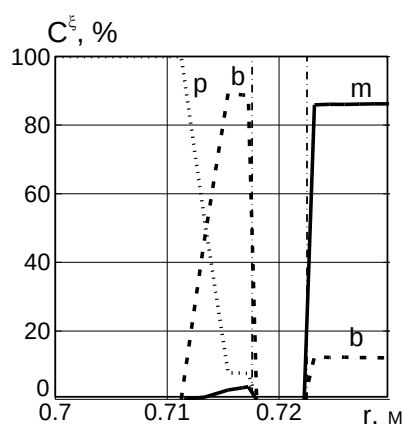
$$\sigma_{rr} = \sigma(\varphi^*), \quad \sigma_{rz}(\varphi^*) = 0, \quad |\varphi^*| < \varphi_0^* \quad (18)$$

Здесь $\varphi^* = \varphi - \omega t$; распределение $\theta(\varphi^*)$ приведено на рис. 5, а $\sigma(\varphi^*) = p_0 \sqrt{1 - (\varphi^* / \varphi_0^*)^2}$, где $2\varphi_0^*$ – область действия нагрузки.

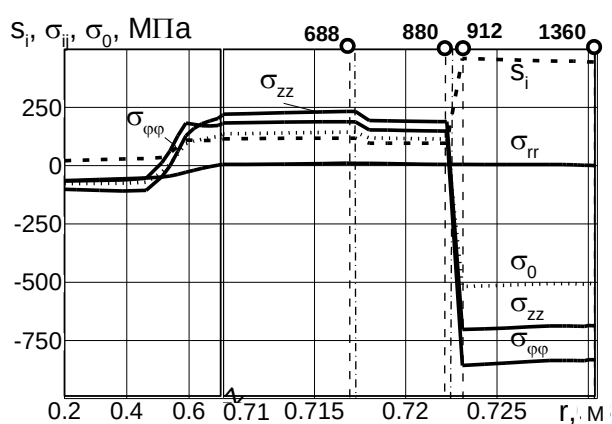
Функция $\sigma(\varphi^*)$ отвечает распределению нормального напряжения в задаче Герца о гладком контакте [22]. Аналогичное (18) условие ставится на границе контакта с подпирющим валком.

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Упрощенная схема мгновенной наплавки по слоям реализовывалась в следующем режиме. Поверхность бочки валка в течение 2,8 с разогревалась до 1800°C , после чего на нее наплавлялся первый слой стали 08 кп наплавки (подслой) толщиной $h_1 = 5\text{ мм}$ температуры 1800°C . После остывания детали до 300°C ее поверхность снова за 2,6 с разогревалась до 1800°C , после чего накладывался второй слой наплавки толщиной $h_2 = 8\text{ мм}$ из стали 25Х5ФМС. Затем деталь остывала до комнатной температуры 20°C . На рис. 6 показано остаточное микроструктурное (рис. 6,а) и напряженно-деформированное (рис. 6,б) состояние наплавленного цилиндра. Штрихпунктирные линии показывают границы слоев. Видно, что наружный слой имеет преимущественно мартенситную фазу, а приграничная зона основного металла – бейнитную. Поскольку мартенситная фаза имеет максимальный объем, то остаточные напряжения в наружном слое сжимающие, а в подслое и основном металле – растягивающие (рис. 6 б). Здесь $\sigma_0 = 1/3\sigma_{kk}$.



а



б

Рис. 6. Остаточное состояние наплавленного цилиндра, а – микроструктура, б – НДС. Цифры в верхней части рисунка б б отвечают номерам точек на рис. 7 б

РАСЧЕТ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

На рис. 7,а показана КЭ-сетка сечения цилиндра $z = L/2$ (сечение А–А на рис. 1), а на рис. 8,б – фрагмент сетки, выделенный штриховым квадратом. Цифрами здесь (и на рис. 7) показаны номера точек.

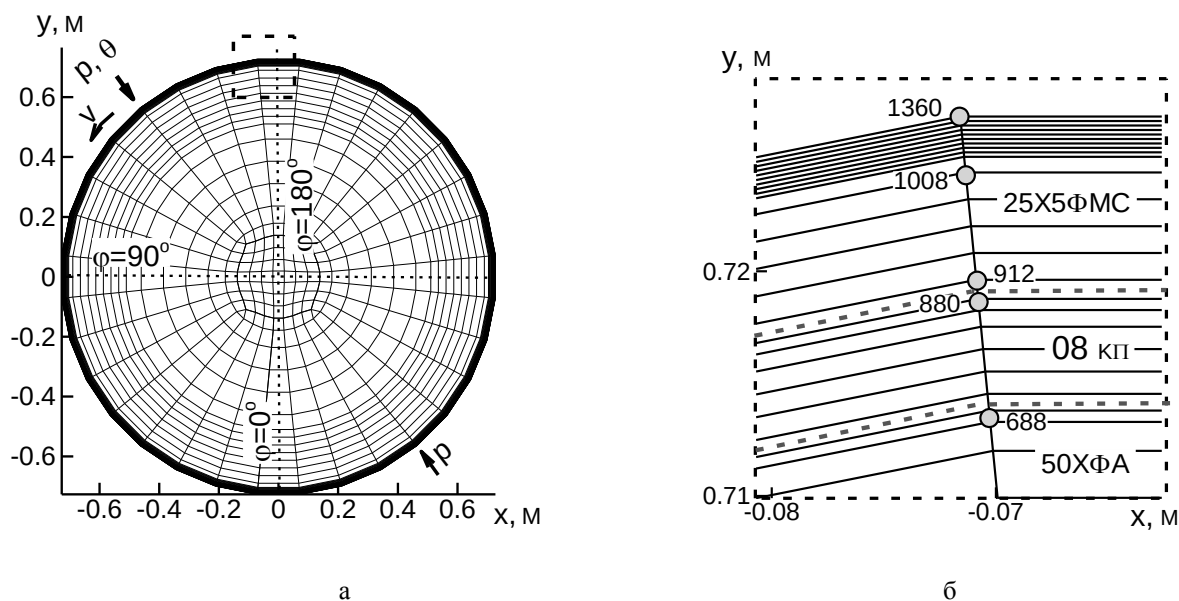


Рис. 7. КЭ-сетка и схема нагрузки вала, а – полный круг, б – фрагмент сетки и номера точек

Стрелками показаны подвижные нагрузки, v – линейная скорость точек поверхности.

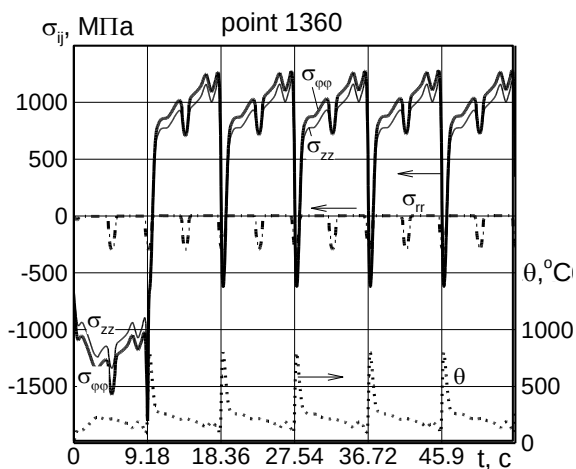


Рис. 8. Эксплуатационное НДС в точке 1360 во внешнем наплавленном слое.

$$p_0 = 300 \text{ МПа}, \theta_{\max} = 800^\circ\text{C}$$

Для $v = 0,5 \text{ м/с}$ временные зависимости компонент напряжений и температуры для точки 1360 вблизи поверхности цилиндра показаны на рис. 8.

Видно, что в области контакта с горячей полосой ($\theta = \theta_{\max}$) напряжения в поверхностном слое сжимающие, а при остывании они становятся растягивающими. Расчеты показывают, что при $p_0 < 300 \text{ МПа}$ влияние механической составляющей нагрузки не существенно, и НДС формируется за счет тепловой нагрузки.

ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Долговечность рассчитывается по формулам (16), (17) в каждой точке сечения цилиндра (рис. 7,а).

На рис. 9 показано радиальное распределение долговечности $\lg N$, а также среднего s_{im} и амплитудного s_{ia} значений интенсивности s_i для цикла $p_0 = 0$, $\theta_{\max} = 500^\circ\text{C}$. Видно, что минимальной долговечностью $N \approx 10^4$ обладают поверхностные слои наружного наплавленного слоя. При этом долговечность приповерхностного слоя существенно зависит от температуры (рис. 10).

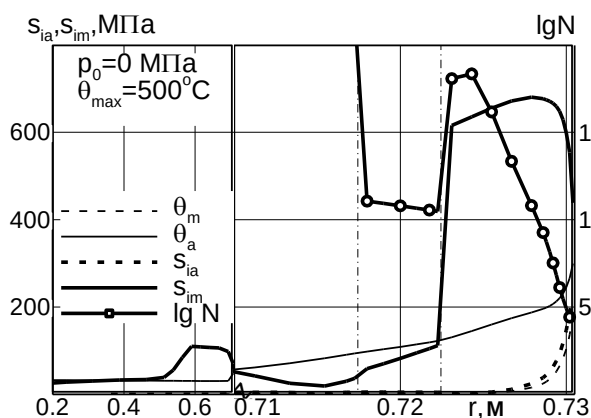


Рис. 9. Распределение параметров для цикла
 $p_0 = 0$, $\theta_{\max} = 500^\circ\text{C}$

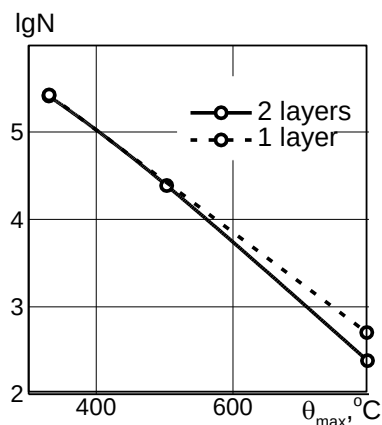


Рис. 10. Температурная зависимость минимальной долговечности, сплошная линия – наплавка с подслоем, штриховая – без подслоя

Подслой и основной металл имеют существенно более высокую долговечность. Влияние давления p_0 на долговечность проявляется при повышенных температурах $\theta_{\max} \geq 500 \div 600^\circ\text{C}$ при $p_0 \geq 300 \text{ МПа}$.

Таким образом, в работе развита методика расчета остаточных напряжений в цилиндре при многослойной наплавке, термомеханического состояния и долговечности при последующем эксплуатационном циклическом термомеханическом нагружении. Получены количественные оценки указанных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябцев И. А. Наплавка машин и механизмов / И.А. Рябцев. – К. : Экотехнология, 2004. – 160 с.
2. Рябцев И. А. Теория и практика наплавочных работ / И.А. Рябцев, И.К. Сенченков. – К. : Экотехнология, 2013. – 400 с.
3. Арутюнян Н. Х. Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н.Х. Арутюнян, А.Д. Дроздов, В.Э. Наумов. – М. : Наука, 1987. – 472 с.
4. Сенченков И. К. Закономерности относительных продольных смещений пластины при стыковой электросварке / И.К. Сенченков, Л.М. Лобанов, О.П. Червинко, Н.А. Пашин // ДАН НАНУ. – 1998. – С. 66-70.
5. Сенченков И. К. Термомеханические модели растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов / И.К. Сенченков // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 118-126.
6. Senchenkov I. K. Modeling of thermomechanical process in growing viscoplastic bodies with accounting of microstructural transformation / I.K. Senchenkov, O.P. Chervinko, M.V. Banyas // Encyclopedia of Thermal Stresses. R.B.Hetnarsky (ed.). Springer Reference. – 2013. – V. 6. – P. 3147-3157.
7. Senchenkov I. K. Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels / I.K. Senchenkov, O.P. Chervinko, E. Turyk, I.A. Ryabtsev // Weld. Int. – 2008. – V. 22, N 7. – P. 457-464.
8. Krempl E. Viscoplastic models for high temperature applications / E. Krempl // Int. J. of Solids and Structures. – 2000. – V. 37. – P. 279-291.
9. Bodner S. R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report) / S.R. Bodner // Faculty of Mech. Eng., Technion – Israel Inst. of Tech. – Haifa 32000, Israel. – 2000. – 106 p.

10. Сенченков И. К. Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности / И.К. Сенченков, Я.А. Жук, Г.А. Табиева // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 4. – С. 53-60.
11. Сенченков И. К. Расчет остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при многослойном наращивании по боковой поверхности / И.К. Сенченков, О.П. Червинко, М.В. Баняс // Прикл. механика. – 2011. – 48, № 2. – С. 7-12.
12. Сенченков И. К. Моделирование остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при наращивании по боковой поверхности слоями расплавленного металла / И.К. Сенченков, О.П. Червинко, Е.В. Доля // Теор. и прикл. механика, 2014. – Вып. 8(54). – С. 34-44.
13. Попов А. А. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита / А.А. Попов, Л.Е. Попова. – Москва-Свердловск : ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
14. Koistinen D. R. A general equation prescribing the extent of austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steel / D.R. Koistinen, R.E. Marburger // Acta Metall. – 1959. – V. 7. – P. 56-60.
15. Radaj D. Welding residual stresses and distorsion / D. Radaj // Calculation and measurement. – Dusseldorf : DVs Verlag GmbH, 2003. – 396 p.
16. Lindgren L.-E. Computational welding mechanics. Thermomechanical and microstructural simulations / L.-E. Lindgren. – Cambridge : CRC Press, 2007. – 222 p.
17. Inone T. Mechanics and characteristics of transformation plasticity and metallo-thermo-mechanical process simulations / T. Inone // Procedia Engineerin. – 2011, № 10. – P. 3793-3798.
18. Дульнев П. А. Термическая усталость металлов / П.А. Дульнев, П.И. Котов. – М. : Машиностроение, 1980. – 200 с.
19. Трощенко Б. Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник. Ч. 1. / Б.Т. Трощенко, Л.А. Сосновский. – К. : Наук думка, 1987. – 506 с.
20. Безухов Н. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / [Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.]. – М. : Машиностроение, 1965.– 568 с.
21. Марочник сталей и сплавов / Под. ред. А.С. Зубченко. – М. : Машиностроение - 1, 2003. – 782 с.
22. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. - М. : Мир, 1989. - 510 с.

REFERENCES

1. Ryabtsev, I.A. (2004), *Naplavka mashin i mehanizmov* [Surfacing machines and mechanisms], Ekotehnologiya, Kiev, Ukraine.
2. Ryabtsev, I.A. and Senchenkov, I.K. (2013), *Teoriya i praktika naplavochnyih rabot* [Theory and practice of surfacing works], Ekotehnologiya, Kiev, Ukraine.
3. Arutyunyan, N.H., Drozdov, A.D. and Naumov, V.E. (1987), *Mehanika rastuschih vyazkouprugoplasticheskikh tel* [Mechanics growing viscoelastoplastic bodies], Nauka, Moscow.

4. Senchenkov, I.K., Lobanov, L.M., Chervinko, O.P. and Paschin, N.A. (1998), “Laws relative longitudinal displacement in the butt plate electric welding”, *DAN NANU*, pp. 66-70.
5. Senchenkov, I.K. (2005), “Thermomechanical model growing cylindrical bodies of physically nonlinear materials”, *Prikl. Mekhanika*, 41, no. 9, pp. 118-126.
6. Senchenkov, I.K., Chervinko, O.P. and Banyas, M.V. (2013), “Modeling of thermomechanical process in growing viscoplastic bodies with accounting of microstructural transformation”, *Encyclopedia of Thermal Stresses*, R.B. Hetnarsky (ed.), *Springer Reference*, vol. 6, pp. 3147-3157.
7. Senchenkov, I.K., Chervinko, O.P., Turyk, E. and Ryabtsev, I.A. (2008), “Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels”, *Weld. Int.*, vol. 22, no. 7, pp. 457-464.
8. Krempl, E. (2000), “Viscoplastic models for high temperature applications”, *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 279-291.
9. Bodner, S.R. (2000), “Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report)”, *Faculty of Mech. Eng., Technion – Israel Inst. of Tech.*, Haifa 32000, Israel.
10. Senchenkov, I.K., Zhuk, Ya.A. and Tabieva, G.A. (1998), “Termodinamicheski soglasovannyie modifikatsii obobschennyih modeley termovyazkoplastichnosti”, *Prikl. Mekhanika*, 34, no. 4, pp. 53-60.
11. Senchenkov, I.K., Chervinko, O.P. and Banyas, M.V. (2011), “Calculation of residual stress-strain state and microstructural cylinder with multi-layer build-up on the lateral surface”, *Prikl. Mekhanika*, 48, no. 2, pp. 7-12.
12. Senchenkov, I.K., Chervinko, O.P. and Dolya, E.V. (2014), “Simulation of the residual stress and strain and microstructural state of the cylinder while building on the lateral surface layers of molten metal”, *Teor. i prikl. mehanika*, issue 8(54), pp. 34-44.
13. Popov, A.A. and Popova, L.E. (1961), *Spravochnik termista. Izotermicheskie i termokineticheskie diagrammyi raspada pereohlazhdennogo austenita* [Directory treatise. Isothermal and Thermokinetic chart collapse of supercooled austenite], GNTI Mashinostr. lit., Moscow-Sverdlovsk.
14. Koistinen, D.R. and Marburger, R.E. (1959), “A general equation prescribing the extent of austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steel”, *Acta Metall.*, vol. 7, pp. 56-60.
15. Radaj, D. (2003), “Welding residual stresses and distortion. Calculation and measurement”, DVs Verlag GmbH, Dusseldorf.
16. Lindgren, L.-E. (2007), “Computational welding mechanics. Thermomechanical and microstructural simulations”, CRC Press, Cambridge.
17. Inoue, T. (2011), “Mechanics and characteristics of transformation plasticity and metal-thermo-mechanical process simulations”, *Procedia Engineering*, no. 10, pp. 3793-3798.
18. Dulnev, P.A. and Kotov, P.I. (1980), *Termicheskaya ustalost metallov* [Thermal fatigue], Mashinostroenie, Moscow.
19. Troschenko, B.T. and Sosnovsky, L.A. (1987), *Soprotivlenie ustalosti metallov i splavov. Spravochnik* [Fatigue resistance of metals and alloys. Directory], part 1, Nauk. dumka, Kiev.
20. Bezuhov, N.I., Bazhanov, V.L., Goldenblat, I.I., Nikolaenko, N.A. and Sinyukov, A.M. (1965), *Raschetyi na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyah vyisokih temperature* [Calculations of strength, stability and vibration at high temperatures], Mashinostroenie, Moscow.

21. Marochnik staley i spлавov [Database of steels and alloys], Pod. red. A.S. Zubchenko (2003), Mashinostroenie 1, Moscow.
22. Dzhonson, K. (1989), Mehanika kontaktnogo vzaimodeystviya [The mechanics of contact interaction], Mir, Moscow.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Склепус С. Н., к. ф.-м. н.

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

ssklepus@rambler.ru

Рассмотрена задача расчета напряженно-деформированного состояния и ползучести многослойных пластин сложной формы. Вариационная постановка выполнена в рамках уточненной теории пластин и оболочек. Для решения нелинейной начально-краевой задачи ползучести используется сочетание методов R-функций, Ритца и Рунге-Кутты-Мерсона. Приведены примеры расчета ползучести квадратной двухслойной пластины и пластины сложной формы с угловыми круговыми вырезами, моделирующей термобарьерное покрытие.

Ключевые слова: многослойные пластины, термобарьерное покрытие, ползучесть, метод R-функций

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЗУЧОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Склепус С. М., к. ф.-м. н.

*Институт проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

ssklepus@rambler.ru

Розглянута задача розрахунку напружено-деформованого стану та повзучості багатошарових пластин складної форми. Варіаційну постановку виконано в рамках уточненої теорії пластин та оболонок. Для розв'язання нелінійної початково-крайової задачі повзучості використовується поєднання методів R-функцій, Рітца та Рунге-Кутта-Мерсона. Наведено приклади розрахунку повзучості квадратної двошарової пластины і пластини складної форми з кутовими круговими вирізами, що моделюють термобар'єрне покриття.

Ключові слова: багатошарові пластини, термобар'єрне покриття, повзучість, метод R-функцій

INVESTIGATION OF CREEP OF MULTILAYER PLATES WITH COMPLEX SHAPE

Sklepus S. N., Ph. D. in Physics and Maths

*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,
Pozharsky str., 2/10, Kharkov, 61000, Ukraine*

ssklepus@rambler.ru

The problem of calculating the stress-strain state and creep of laminated plate with complex form is considered. A variational formulation of the problem is made in the terms of refined theory of plates and shells, which takes into account the non-linear distribution of transverse shear stresses. To solve the nonlinear initial-boundary creep problem proposes to use a combination of R-functions, Ritz and Runge-Kutta-Merson methods. The R-functions method allows to taken into account exactly the geometry of the domain and the boundary conditions of the most general form. The solution of the boundary value problem is represented as a formula - structure of the solution that exactly satisfies all (general structure of the solution) or part (partial structure of the solution) boundary conditions. Structure of solution is invariant with respect to the shape of the domain. An example of calculating of creep of double-layer square plate has been shown. The first, or top layer of the plate is made from yttria partially stabilized zirconia (8YSZ). This ceramic

material is often used for thermal barrier coatings (TBC), such as gas turbine engine blades. Second, the lower layer is made from a Ni-based superalloy René 80. It was shown that due to the difference of the coefficients of linear thermal expansion of the materials of layers in the plate, residual thermal stresses occur, which make a contribution to the stress state and under conditions of further loading plate by mechanical loads. It was established that during creep occurs redistribution of stresses. Thus, due to intense creep in layer made from a nickel alloy, in the second layer there is a growth of the absolute values of the stresses that can lead to premature failure. The results of calculations obtained without creep in a layer made from a ceramic material, and the results obtained with taking into account creep in two layers are shown. Critical time found from the condition of achievement of stress intensity at any point of the plate a certain limit value, which is characteristic of the material. Creep of double-layer plate with complex shape with circular angular notches has been investigated. It is shown that cut-outs have made the plate more rigid and increase the critical time.

Key words: multi-layer plates, thermal barrier coating (TBC), creep, the R-functions method (RFM)

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании слоистых конструкций часто приходится решать задачу длительной прочности, в том числе задачу высокотемпературной ползучести. Задачи ползучести и повреждаемости однородных пологих оболочек и пластин сложной формы рассматривались в работе [1, с.613] и др. Задачи нелинейного деформирования многослойных пластин сложной формы, в частности задачи ползучести, исследованы недостаточно. Это связано не только с математическими трудностями решения начально-краевых задач для многослойных конструкций сложной формы, но и со скудной информацией о поведении в условиях ползучести материалов, из которых состоят слои.

Цель работы – разработка метода расчета напряженно-деформированного состояния (НДС), высокотемпературной ползучести и длительной прочности многослойных пластин сложной формы, а также исследование качественных и количественных особенностей деформирования термобарьерных покрытий в условиях ползучести на примере расчета двухслойной пластины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим в декартовой системе координат Ox_1x_2z многослойную изотропную пластину постоянной толщины h и произвольной формы Ω в плане. Количество слоев равно m . Считаем, что отрыва и проскальзывания между слоями нет. Пусть пластина находится под действием поперечной нагрузки $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$, нормальных и касательных контурных нагрузок $P_n^0(x_1, x_2, t)$, $P_\tau^0(x_1, x_2, t)$, приложенных на части контура $\partial\Omega_p$, а также температурного поля $T = T(x_1, x_2, z, t)$. На оставшейся части контура $\partial\Omega_u$ заданы условия закрепления.

Для постановки задачи будем использовать уточненную теорию пластин и оболочек, учитывающую нелинейное распределение поперечных касательных напряжений σ_{i3} ($i=1, 2$) по толщине. Основные гипотезы уточненной теории записываются следующим образом [2, с.9]:

$$\sigma_{i3} = G_{i3}(z) f'(z) \psi_i(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial z} = v_{3,3} = 0, \quad v_3(x_1, x_2, z, t) = w(x_1, x_2, t).$$

Здесь $\psi_i(x_1, x_2, t)$, ($i=1, 2$) – искомые функции сдвига;
 $f(z) = B_k z^3 + C_k z^2 + D_k z + E_k$ ($k=\overline{1, m}$) – функция распределения поперечных касательных напряжений по толщине, коэффициенты которой зависят от номера слоя и учитывают изменение упругих характеристик по всей толщине многослойного пакета.

Компоненты тензора скоростей полных деформаций представим в виде суммы скоростей упругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$, скоростей температурных деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^T$ и скоростей необратимых деформаций ползучести $\dot{p}_{kl}$

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\varepsilon}_{kl}^T + \dot{p}_{kl}, \quad (k, l = \overline{1, 3}).$$

Здесь точка над символами обозначает полную производную по времени.

Температурные деформации вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{kl}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{kl},$$

где $\alpha = \alpha(z, T)$ – коэффициент линейного температурного расширения; T_0 – температура, при которой напряжения и деформации отсутствуют; δ_{kl} – символ Кронекера. Считаем, что закон изменения температуры $T = T(x_1, x_2, z, t)$ известен.

Задача ползучести многослойной пластины в фиксированный момент времени $t \neq 0$ может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа [3, с.4]

$$U(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = U_1 + U_2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[A_1 (\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2) + 2A_2 \dot{u}_{1,1} \dot{u}_{2,2} + A_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - \right. \\ & - 2B_1 (\dot{w}_{,11} \dot{u}_{1,1} + \dot{w}_{,22} \dot{u}_{2,2}) - 2B_2 (\dot{w}_{,11} \dot{u}_{2,2} + \dot{w}_{,22} \dot{u}_{1,1}) - \\ & - 2B_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \dot{w}_{,12} + D_1 (\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2 - \\ & - 2F_1 (\dot{w}_{,11} \dot{\psi}_{1,1} + \dot{w}_{,22} \dot{\psi}_{2,2}) - 2F_2 (\dot{w}_{,11} \dot{\psi}_{2,2} + \dot{w}_{,22} \dot{\psi}_{1,1}) - \\ & - 2F_3 \dot{w}_{,12} (\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}) + 2F_4 (\dot{u}_{1,1} \dot{\psi}_{1,1} + \dot{u}_{2,2} \dot{\psi}_{2,2}) + 2F_5 (\dot{u}_{1,1} \dot{\psi}_{2,2} + \dot{u}_{2,2} \dot{\psi}_{1,1}) + \\ & + 2F_6 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) (\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}) + F_7 (\dot{\psi}_{1,1}^2 + \dot{\psi}_{2,2}^2) + \\ & + F_8 \dot{\psi}_{1,1} \dot{\psi}_{2,2} + F_9 (\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1})^2 + F_{10} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) - \dot{q}_z \dot{w} \left. \right] dx_1 dx_2 - \\ & - \int_{\partial\Omega_p} \left[\dot{P}_n^0 (\dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2) + \dot{P}_\tau^0 (\dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2) \right] dS, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$, $\dot{w}(x_1, x_2, t)$ – скорости перемещений точек координатной поверхности пластины вдоль осей $0x_1, 0x_2, 0z$; $\dot{\psi}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_2(x_1, x_2, t)$ – скорости функций сдвига; n_1, n_2 – направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}$ к контуру пластины $\partial\Omega$. Формулы для вычисления коэффициентов жесткости $A_1, \dots, A_3, B_1, \dots, B_3, D_1, \dots, D_3, F_1, \dots, F_{10}$ приведены в работе [3, с.4].

Второе слагаемое в формуле (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} U_2 = & - \iint_{\Omega} \left(\dot{N}_{11}^F \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^F \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^F (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) - \dot{M}_{11}^F \dot{w}_{,11} - \dot{M}_{22}^F \dot{w}_{,22} - \right. \\ & - 2\dot{M}_{12}^F \dot{w}_{,12} + \dot{R}_{11}^F \dot{\psi}_{1,1} + \dot{R}_{22}^F \dot{\psi}_{2,2} + \dot{R}_{12}^F (\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}) + \dot{R}_{13}^F \dot{\psi}_1 + \dot{R}_{23}^F \dot{\psi}_2 \left. \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\dot{N}_{11}^F, \dots, \dot{N}_{12}^F, \dot{M}_{11}^F, \dots, \dot{M}_{12}^F, \dot{R}_{11}^F, \dots, \dot{R}_{13}^F$ – «фиктивные» силы, обусловленные температурными деформациями и необратимыми деформациями ползучести:

$$\begin{aligned}\dot{N}_{11}^F &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{11} + \nu \dot{\epsilon}_{22}) dz, \quad \dot{N}_{22}^F = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{22} + \nu \dot{\epsilon}_{11}) dz, \quad \dot{N}_{12}^F = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} dz, \\ \dot{M}_{11}^F &= \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{11} + \nu \dot{\epsilon}_{22}) dz, \quad \dot{M}_{22}^F = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{22} + \nu \dot{\epsilon}_{11}) dz, \quad \dot{M}_{12}^F = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} z dz, \\ \dot{R}_{11}^F &= \int_{(h)} \frac{Ef}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{11} + \nu \dot{\epsilon}_{22}) dz, \quad \dot{R}_{22}^F = \int_{(h)} \frac{Ef}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{22} + \nu \dot{\epsilon}_{11}) dz, \\ \dot{R}_{12}^F &= 2 \int_{(h)} Gf \dot{p}_{12} dz, \quad \dot{R}_{13}^F = 2 \int_{(h)} Gf' \dot{p}_{13} dz, \quad \dot{R}_{23}^F = 2 \int_{(h)} Gf' \dot{p}_{23} dz,\end{aligned}$$

где $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{p}_{11} + \dot{\epsilon}_{11}^T$, $\dot{\epsilon}_{22} = \dot{p}_{22} + \dot{\epsilon}_{22}^T$; $E = E(z, T)$, $\nu = \nu(z, T)$, $G = G(z, T)$ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига, которые зависят от номера слоя и являются в общем случае непрерывными функциями координаты z и температуры.

В представленном формулами (1)-(3) функционале функции $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$, $\dot{w}(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_1(x_1, x_2, t)$, $\dot{\psi}_2(x_1, x_2, t)$ должны удовлетворять кинематическим граничным условиям на $\partial\Omega_u$, а скорости деформаций ползучести считаются заданными и не варьируются.

Основные неизвестные начально-краевой задачи ползучести, в момент времени $t \neq 0$ могут быть найдены из решения задачи Коши по времени для системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \dot{u}_1, \quad \frac{du_2}{dt} = \dot{u}_2, \quad \frac{dw}{dt} = \dot{w}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \dot{\psi}_1, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \dot{\psi}_2, \\ \frac{d\epsilon_{11}}{dt} &= \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + f\dot{\psi}_{1,1}, \quad \frac{d\epsilon_{22}}{dt} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + f\dot{\psi}_{2,2}, \\ \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}), \\ \frac{d\gamma_{13}}{dt} &= f'\dot{\psi}_1, \quad \frac{d\gamma_{23}}{dt} = f'\dot{\psi}_2, \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\epsilon}_{11} + \nu\dot{\epsilon}_{22} - (\dot{\epsilon}_{11} + \nu\dot{\epsilon}_{22})], \\ \frac{d\sigma_{22}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\epsilon}_{22} + \nu\dot{\epsilon}_{11} - (\dot{\epsilon}_{22} + \nu\dot{\epsilon}_{11})], \quad \frac{d\sigma_{12}}{dt} = G(\dot{\gamma}_{12} - 2\dot{p}_{12}), \\ \frac{d\sigma_{13}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{13} - 2\dot{p}_{13}), \quad \frac{d\sigma_{23}}{dt} = G(\dot{\gamma}_{23} - 2\dot{p}_{23}), \\ \frac{dp_{11}}{dt} &= \dot{p}_{11}, \quad \frac{dp_{22}}{dt} = \dot{p}_{22}, \quad \frac{dp_{12}}{dt} = \dot{p}_{12}, \quad \frac{dp_{13}}{dt} = \dot{p}_{13}, \quad \frac{dp_{23}}{dt} = \dot{p}_{23}.\end{aligned}\tag{4}$$

Определяющие уравнения для скоростей деформаций ползучести, которые входят в уравнения (4), будут конкретизированы ниже.

Начальные условия для неизвестных функций в момент времени $t = 0$ находятся из решения задачи упругого деформирования пластины. Для решения упругой задачи может быть

использован приведенный выше функционал. При этом в формулах (2), (3) необходимо заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении «фиктивных» сил положить $\dot{p}_{11} = \dot{p}_{22} = \dot{p}_{12} = \dot{p}_{13} = \dot{p}_{23} = 0$.

Для интегрирования уравнений (4) будем использовать метод Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага. Вариационные задачи для функционала Лагранжа (1) в моменты времени, которые отвечают схеме метода РКМ, будем решать методом Ритца. Координатные функции, точно удовлетворяющие заданным граничным условиям, строятся с помощью метода R-функций [4]. Метод R-функций позволяет точно учитывать геометрию области и граничные условия самого общего вида. При этом решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничных условий. Структура решения является инвариантной по отношению к форме области.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим задачу ползучести квадратной двухслойной пластины и пластины сложной формы (рис. 1), находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, при температуре $T = 800^\circ\text{C}$. Температура, при которой напряжения и деформации отсутствуют – $T = 1000^\circ\text{C}$. Первый, или верхний слой выполнен из диоксида циркония, стабилизированного иттрием (8YSZ). Данный керамический материал часто применяется для термобарьерных покрытий (thermal barrier coating – TBC), например, лопаток газотурбинных двигателей. Второй, нижний слой выполнен из никелевого жаропрочного сплава René 80. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов слоев при температуре $T = 800^\circ\text{C}$ [5, с.172]: $E_1 = 1,539 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_1 = 0,27$, $E_2 = 1,458 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_2 = 0,3$. Предел прочности на сжатие материала 8YSZ при температуре $T = 800^\circ\text{C}$: $\sigma_g^- = 565 \text{ МПа}$ [6, с.236]. Коэффициенты линейного температурного расширения при температуре $T = 800^\circ\text{C}$ [5, с.172]: $\alpha_1 = 11,0 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_2 = 15,1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Толщины слоев $h_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h_2 = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Геометрические размеры: $a = b = 0,05 \text{ м}$, $r = 0,01 \text{ м}$. Интенсивность поперечной нагрузки $q_z = 75 \text{ МПа}$.

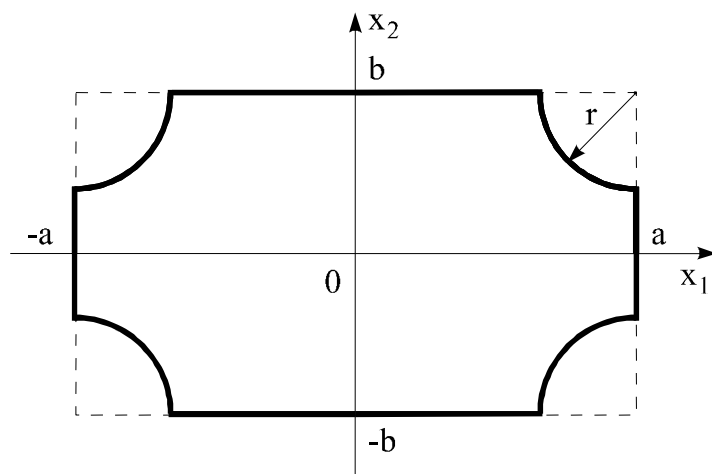


Рис. 1. Пластина сложной формы

Закон одноосной ползучести для материалов слоев, составляющих пластину, имеет вид [5, с.165]:

$$p^{(i)} = A t^{m_i} \sigma^{n_i}, \quad (i = 1, 2),$$

со следующими значениями констант [5, с.172]: $A_1 = 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ МПа}^{-n_1} \text{ ч}^{-m_1}$, $m_1 = 1$, $n_1 = 1,475$ (8YSZ) и $A_2 = 7,172 \cdot 10^{-20} \text{ МПа}^{-n_2} \text{ ч}^{-m_2}$, $m_2 = 0,246$, $n_2 = 6,328$ (René 80).

Для сложного напряженного состояния определяющие соотношения ползучести запишем в виде:

$$\dot{\rho}_{kl}^{(i)} = \frac{3}{2} m_i A_i t^{m_i-1} \sigma_i^{n_i-1} s_{kl},$$

где $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2}$ – интенсивность напряжений;
 $s_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22})\delta_{kl}$.

На краях пластин заданы условия закрепления, соответствующие свободному опиранию. Кинематическое граничное условие, соответствующее данным условиям закрепления, имеет вид:

$$\dot{w} = 0, \quad (5)$$

Структуру решения, удовлетворяющую условию (5), можно записать так:

$$\dot{w} = \omega \Phi_1,$$

где функция $\omega = \omega(x_1, x_2)$ строится с помощью R-функций, а Φ_1 – неопределенная компонента структуры решения.

Для квадратной пластины функция ω имеет вид:

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2,$$

где $\omega_1 \wedge_0 \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ – R-конъюнкция [4, с.123], $\omega_1 = \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2)$,
 $\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$.

Функцию ω для пластины сложной формы запишем в виде:

$$\omega = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 ((\omega_3 \wedge_0 \omega_4) \wedge_0 (\omega_5 \wedge_0 \omega_6)),$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2), \quad \omega_3 = \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2), \\ \omega_4 &= \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2), \quad \omega_5 = \frac{1}{2r}((x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2), \\ \omega_6 &= \frac{1}{2r}((x_1 - a)^2 + (x_2 + b)^2 - r^2). \end{aligned}$$

Построенные функции ω удовлетворяют условиям: $\omega = 0$, $\omega_n = -1$ на $\partial\Omega$, $\omega > 0$ внутри области Ω .

Структуры решения для остальных неизвестных функций имеют вид:

$$\dot{u}_1 = \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \Phi_3, \quad \dot{\psi}_1 = \Phi_4, \quad \dot{\psi}_2 = \Phi_5.$$

Здесь $\Phi_i (i = \overline{2,5})$ – неопределенные компоненты.

При численной реализации учитывалась симметрия задачи. Неопределенные компоненты представлялись в виде:

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^{N_i} C_k^{(i)} \varphi_k(x_1, x_2), \quad (i = \overline{1,5}),$$

где $C_k^{(i)}$ – неизвестные коэффициенты, а в качестве $\{\varphi_k\}$ были выбраны степенные полиномы вида $x_1^m x_2^n$. Максимальные степени полиномов в структурах решения: для Φ_1 – 14, для $\Phi_i (i = \overline{2,5})$ – 11. Для интегрирования по области Ω и по толщине использовались формулы Гаусса. При вычислении элементов матрицы Гаусса количество узлов интегрирования по четверти области равнялось 288 для квадратной пластины и 432 для пластины сложной формы. Точность решения задачи Коши по времени составляла $\delta = 0,01$.

Расчеты проводились как с учетом ползучести в слое, выполненном из керамического материала 8YSZ, так и без учета. На рис. 2 показан рост прогиба с течением времени в центре квадратной пластины. На рис. 3,4 представлены графики изменения со временем интенсивности напряжений σ_i в центре, на верхней и нижней поверхностях пластины. Пунктирной линией показаны результаты расчетов, полученные на верхней поверхности без учета ползучести в первом слое, сплошной – результаты, полученные с учетом ползучести в обоих слоях.

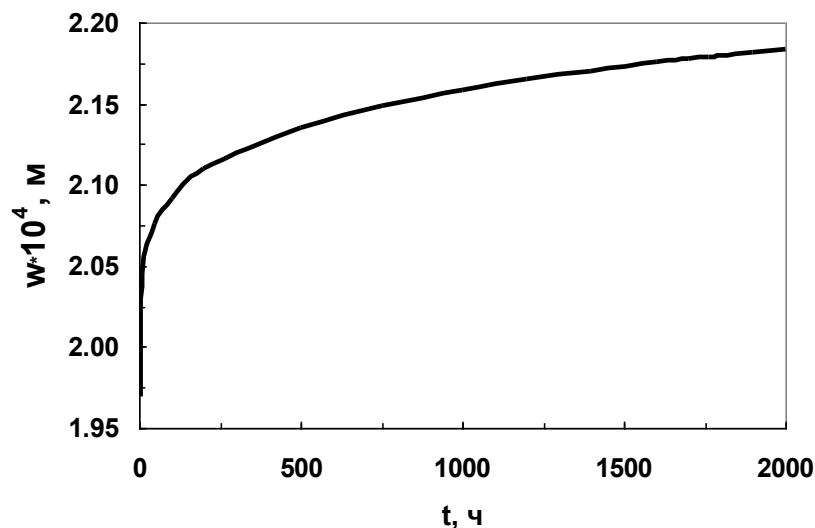


Рис. 2. Прогиб в центре квадратной пластины

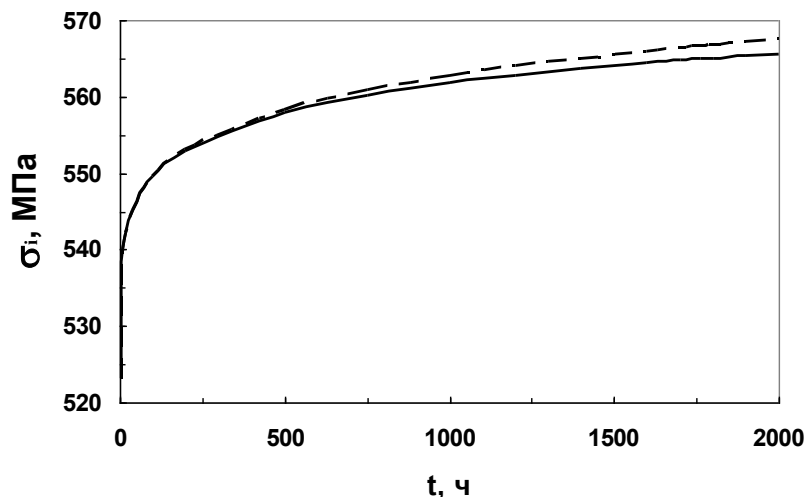


Рис. 3. Интенсивность напряжений в центре на верхней поверхности квадратной пластины

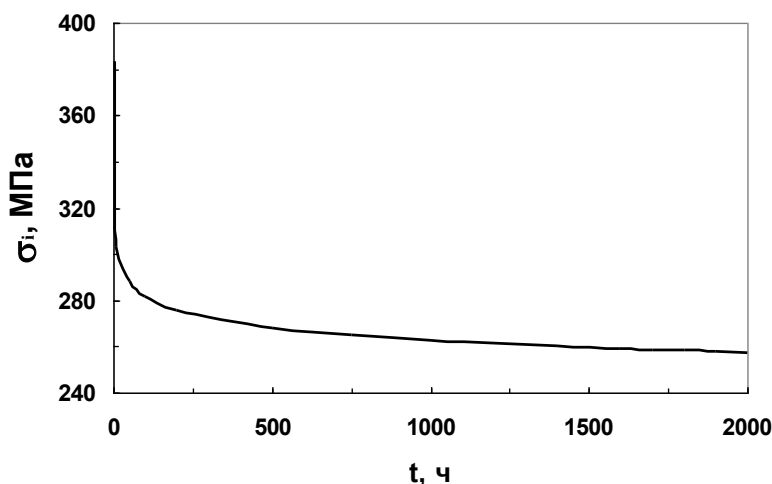


Рис. 4. Интенсивность напряжений в центре на нижней поверхности квадратной пластины

Будем определять критическое время t_* из условия достижения интенсивностью напряжений в какой-либо точке пластины некоторого предельного значения σ_* , которое является характеристикой материала: $\sigma_i = \sigma_*$. В нашем случае примем, что $\sigma_* = \sigma_g^- = 565$ МПа.

Из рис. 3, 4 видно, что на верхней поверхности пластины интенсивность напряжений возрастает, а на нижней – происходит релаксация. Было найдено критическое время: $t_* = 1800$ ч при учете ползучести в обоих слоях и $t_* = 1400$ ч без учета ползучести в верхнем слое (рис. 3).

На рис. 5 показано распределение нормальных напряжений σ_{11} по толщине в центре пластины. Здесь тонкой сплошной линией показаны остаточные температурные напряжения, возникающие в пластине за счет разницы коэффициентов линейного температурного расширения материалов. Остаточные напряжения возникают при охлаждении после технологических операций, связанных с изготовлением многослойного пакета. Эти напряжения будут присутствовать и при рабочих температурах, которые, как правило, ниже температуры технологических операций. Отметим, что при имеющемся уровне остаточных напряжений материалы слоев ползучести не проявляют. Пунктирной линией показаны напряжения в начальный момент времени, сплошной – в момент времени $t_* = 1800$ ч.

Из рисунка видно, что со временем происходит перераспределение напряжений по толщине пластины. В слое, выполненном из керамического материала 8YSZ, абсолютные значения напряжений возрастают по всей толщине. В слое из никелевого сплава René 80 напряжения на нижней поверхности и вблизи нее со временем уменьшаются, а напряжения в остальных точках незначительно возрастают.

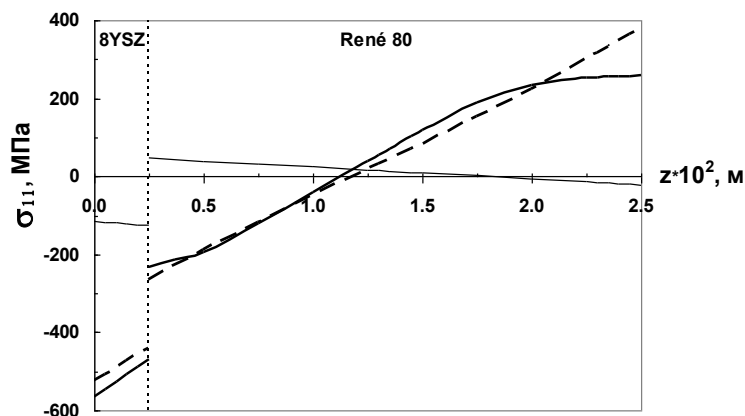


Рис. 5. Распределение напряжений по толщине в центре квадратной пластины

На рис. 6-8 представлены результаты для прогибов и интенсивности напряжений в центре пластины сложной формы. При учете ползучести в обоих слоях критическое время t_* для пластины сложной формы составило 3033 ч. (рис.7). Из сравнения результатов, приведенных на рис. 2-4 и рис. 6-8, можно сделать выводы, что круговые вырезы делают пластину более жесткой и увеличивают критическое время почти на 70%.

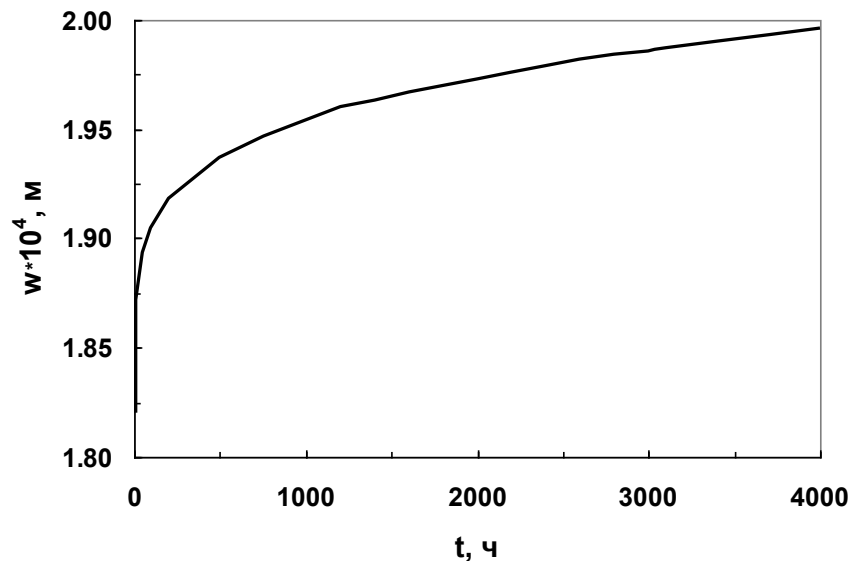


Рис. 6. Прогиб в центре пластины сложной формы

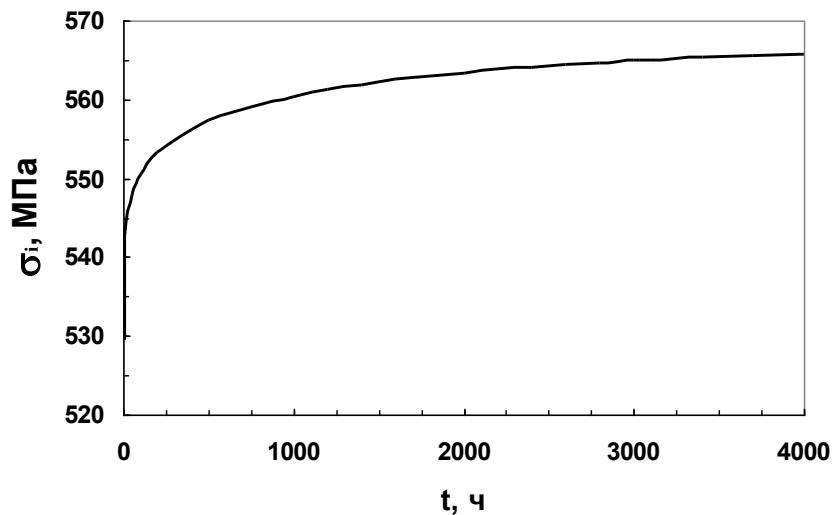


Рис. 7. Интенсивность напряжений в центре на верхней поверхности пластины сложной формы

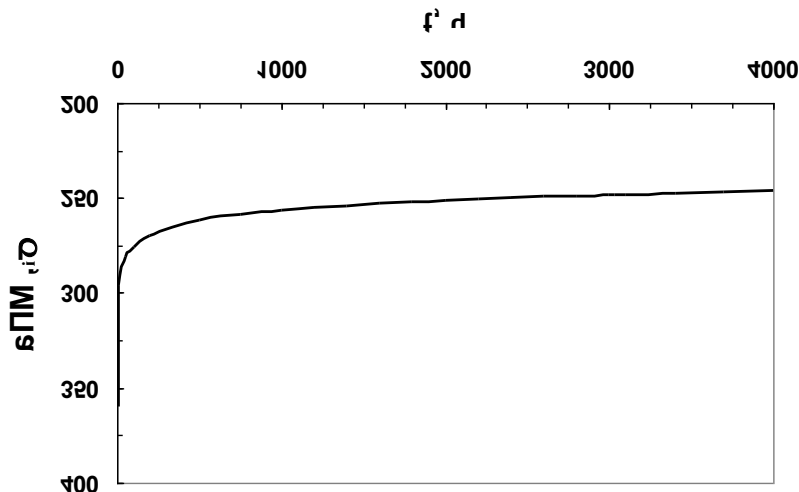


Рис. 8. Интенсивность напряжений в центре на нижней поверхности пластины сложной формы

ВЫВОДЫ

Разработан численно-аналитический метод решения задач ползучести слоистых пластин произвольной формы. Исследована ползучесть двухслойной пластины. Показано, что за счет разницы коэффициентов линейного температурного расширения материалов слоев в пластине возникают остаточные температурные напряжения, которые дают свой вклад в напряженное состояние и при дальнейшем нагружении пластины механическими нагрузками. В процессе ползучести происходит перераспределение напряжений. При этом, за счет интенсивной ползучести в одном из слоев, во втором слое происходит рост абсолютных значений напряжений, что может привести к преждевременному разрушению. Исследована ползучесть пластины сложной формы, с круговыми угловыми вырезами. Показано, что вырезы делают пластину более жесткой и увеличивают критическое время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золочевский А. А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Склепус, С.Н. Склепус. – Харьков : «Бізнес Інвестор Груп», 2011. – 720 с.
2. Рассказов А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К. : Вища шк., 1986. – 191 с.
3. Склепус С. Повзучість та пошкоджувальність багатослойових пологих оболонок середньої товщини / С. Склепус, О. Склепус // *Машинознавство*. – 2012. – № 2(176). – С. 3-7.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Zolochovsky A. Benchmark creep tests for thermal barrier coating / A. Zolochovsky, A. Galishin, S. Sklepus, L. Parkhomenko, V. Gnitko, A. Kühhorn, M. Kober, C. Leyens // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – 2013. – № 23(996). – С. 159-179.
6. Брусенцов В. П. Исследование прочности твердооксидных топливных элементов пластинчатой формы / В.П. Брусенцов, В.В. Куранов, А.В. Брусенцов, Е.А. Куранова, Ю.Н. Клещев, Д.И. Шестаков, Н.В. Ерошенкова // *Твердооксидные топливные элементы : Сборник научных статей*. – Снежинск : Изд-во РФ ЯЦ-ВНИИТФ, 2003. – С. 233-240.

REFERENCES

1. Zolochovsky, A.A, Sklepus, A.N. and Sklepus, S.N. (2011), *Nelineynaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Nonlinear mechanics of deformable solids], Biznes Investor Grup, Kharkov.
2. Rasskazov, A.O., Sokolovskaja, I.I. and Shulga, N.A. (1986), *Teoriya i raschet sloistyx ortotropnykh plastin i obolochek* [Theory and calculation of laminated orthotropic plates and shells], Vyshcha shkola, Kiev.
3. Sklepus, S.N. and Sklepus, A.N. (2012), “Creep and creep damage of laminated moderately thick shallow shells”, *Mechanical Engineering*, no. 2(176), pp. 3-7.
4. Rvachev, V.L. (1982), *Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya* [Theory of R-functions and some applications], Nauk. dumka, Kiev.
5. Zolochovsky, A., Galishin, A., Sklepus, S., Parkhomenko, L., Gnitko, V., Kühhorn, A., Kober, M., and Leyens, C. (2013), “Benchmark creep tests for thermal barrier coating”, *Visnik NTU “KHPI”*, no. 23, pp. 159-179.
6. Brusentsov, V.P., Kuranov, V.V., Brusentsov, A.V., Kuranova, E.A., Kleshev, Ju.N., Shestakov, D.I. and Eroshenkova, N.E. (2003), “Investigation of strength solid oxide fuel cells with planar shape”, *Tverdooksidnye toplivnye element*, pp. 233-240.

УДК 539.374

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ФОРМЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЫ РАЗРЫВА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Шевченко А. Г., аспирант

*Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара,
просп. Гагарина 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Исследуется вопрос о формировании периодической системы ограниченных полос разрыва перемещений (локализации пластической деформации) для материалов с площадкой текучести. Для двух моделей распределения напряжений вдоль полосы, построено ограниченное поле напряжений на продолжении полосы. Установлено, что длина полосы конечная и определяется в зависимости от действующего в теле максимального касательного напряжения, а также, верхнего и нижнего пределов текучести, которые характерны для диаграмм одноосного нагружения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

Ключевые слова: локализация пластической деформации, периодическая система полос, полосы Людерса-Чернова.

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ У ФОРМІ ОБМЕЖЕННЯ СМУГИ РОЗРИВУ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, Шевченко А. Г., аспірант

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Досліджується питання про формування періодичної системи обмежених смуг розриву переміщень (локалізації пластичної деформації) для матеріалів з полицею плинності. Для двох моделей розподілу напружень вздовж смуги побудовано обмежене поле напружень на продовженні смуги. Встановлено, що довжина смуги кінцева і визначається залежно від діючого в тілі максимального дотичного напруження, а також верхньої і нижньої меж текучості, які характерні для діаграм одноосного навантаження матеріалу з площинкою текучості при жорсткому навантаженні.

Ключові слова: локалізація пластичної деформації, періодична система смуг, смуги Людерса-Чернова.

LOCALIZATION OF PLASTIC DEFORMATION IN THE FORM OF A LIMITED BAND GAP DISPLACEMENT

Chernyakov Y. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Shevchenko A. G., Graduate Student

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

In the classical theory of plasticity accepted scheme perfectly plastic behavior of a material having clearly expressed yield plateau on the diagram uniaxial loading. However, in a number of experimental studies was shown that this behavior occurs only with the soft loading, whereas with the rigid loading on the diagram appears uniaxial loading "peak-tooth", as shown in Fig. 1 (curve OABE). The behavior of the material in the yield plateau is unstable, and the loss in stability occurs by "hopping" from elastic state (point A) in the hardening condition (point D). It is known that as a result of this loss of stability and localized shear bands appear Lüders-Chernoff.

Localization phenomenon has been widely studied in a number of theoretical and experimental studies [1-5]. However, the problem of localization of plastic deformation at a homogeneous stress state has been insufficiently studied.

In the article Novozhilov [6] was first given interpretation of brittle fracture, as the loss of stability "in the large" at the level of atomic bonds. The result is a separation crack length which depends on the current load. Localization of plastic deformation also is the result of loss of stability of this type, which in this case leads to the hopping of a homogeneous elastic state to a localized plastic shear. This raises the question: Is it possible the formation of a limited band localization shear in a homogeneous state of stress?

During plastic deformation of materials with yield plateau, in a homogeneous state of stress in an infinite plate is possible for instability, which leads to the hopping of a homogeneous elastic state to a localized plastic shear, and this shift is developed within a limited interval.

In the present work we investigate the periodic system of localization of plastic deformation in the form of a band of finite length in a plane stress state. We obtain a formula that relates the length of the localized region of the upper and

lower limits of yield and the dependence of the minimum distance between cracks, which would occur with the localization of plastic deformation bands in the periodic system.

At first we consider the infinite plate, located in a homogeneous plane stress. The material of the plate is characterized by pure shear diagram shown in Figure 1.

According to loading conditions, there are two types of diagrams: a yield plateau (curve OADE) and “peak-tooth” (curve OABCE). The stresses corresponding to the points A and B will be called the upper τ_s^{up} and lower τ_s^{low} yield points, respectively. Occurrence of the initial localization region in this interpretation is considered as a loss of stability “in the large” homogeneous deformation of the body in the form of the formation of localized band of plastic flow (similar to the effect of cotton in the shell). When the lower τ_s^{low} yield reaches plate can be in two states of equilibrium – in a homogeneous elastic or elastic band with localized plastic deformation, as shown in Fig. 2. We assume for simplicity that the localization within the band are only tangential stresses. Consider two schemes of loading the shores of the band - piecewise constant (Fig. 3a), and piecewise linear (Fig. 3b). This scheme of loading shores band reminds Leonov-Panasyuk and Dugdale [7, 8], but with the important difference that the stress within the band is not equal to zero. Next consider an infinite plate in which at the x-axis at intervals of W is located infinite numbers of bands localization of plastic deformation with length 2b. The localized area is represented as band part of which is located under the plastic flow at stresses corresponding to the yield plateau and the another part corresponding to the maximum yield strength.

These results demonstrate that the localized shear bands can have a finite length. Thus, the minimum length of the strip depends on the ratio between the actual load, the upper and lower limits of flowability. Similar conclusions can be drawn for the case of a limited length of the strip localization in tension, but in this case, you should not talk about the localization of the shear but on the localization of necking. And also obtained results make possible to determine the plastic deformation region in a sample of finite length.

Key words: localization of plastic deformation, the periodic system of bands, Luders-Chernof's strips.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории пластичности принята схема идеально-пластического поведения материала, имеющего явно выраженную площадку текучести на диаграмме одноосного нагружения. Однако, в целом ряде экспериментальных работ показано, что такое поведение реализуется только при мягком нагружении, тогда как при жестком нагружении на диаграмме одноосного нагружения появляется «пик-зуб», как показано на рис. 1 (кривая OABE). Поведение материала на площадке текучести является неустойчивым, причем потеря устойчивости происходит в результате «перескока» из упругого состояния (точка A) в состояние упрочнения (точка D). Известно, что в результате такой потери устойчивости и появляются локализованные полосы сдвига Людерса-Чернова.

Явление локализации широко изучалось в целом ряде теоретических и экспериментальных работ [1-5]. Однако, проблема локализации пластической деформации при однородном напряженном состоянии изучена недостаточно.

В работе В.В. Новожилова [6] впервые была дана трактовка хрупкого разрушения как потери устойчивости «в большом» на уровне атомных связей, в результате которой образуется трещина отрыва, равновесная длина которой зависит от действующей нагрузки. Локализация пластической деформации также является результатом потери устойчивости подобного типа, которая в данном случае приводит к перескоку из однородного упругого состояния к локализованному пластическому сдвигу. Возникает вопрос: возможно ли образование ограниченной полосы локализации сдвига при однородном напряженном состоянии? При пластическом деформировании материалов с площадкой текучести в условиях однородного напряженного состояния в неограниченной пластине возможна потеря устойчивости, которая приводит к перескоку из однородного упругого состояния к локализованному пластическому сдвигу, причем этот сдвиг развивается в пределах ограниченного отрезка.

В настоящей работе исследуется периодическая система локализации пластической деформации в форме полосы конечной длины в условиях плоского напряженного состояния. Получена формула, связывающая длину локализованной области с верхним и нижним пределами текучести, а также найдена зависимость для минимального расстояния между трещинами, при которых будет происходить локализация пластической деформации в периодической системе полос.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Постановка задачи. Рассмотрим для определенности бесконечную пластинку, находящуюся в условиях однородного плоского напряженного состояния. Свяжем пластинку с декартовой системой координат OXY и будем считать известными компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Материал пластинки характеризуется диаграммой чистого сдвига, показанной на рис. 1. В зависимости от условий нагружения, имеется два вида диаграммы: с площадкой текучести (кривая $OADE$) и с «пиком-зубом» (кривая $OABCE$). Напряжения, отвечающие точкам A и B , будем называть верхним τ_s^{up} и нижним τ_s^{low} пределами текучести, соответственно.

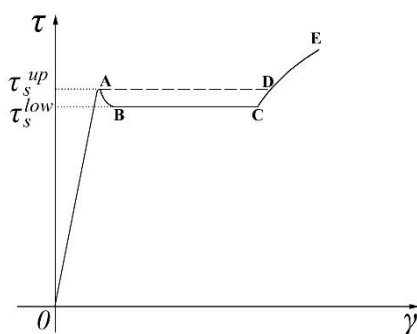


Рис. 1. Диаграмма материала

Возникновение начальной области локализации, в принятой здесь трактовке, рассматривается как потеря устойчивости «в большом» однородной деформации тела в форме образования локализованной полосы пластического течения (подобно эффекту хлопка в оболочке).

При достижении нижнего предела текучести τ_s^{low} пластинка может находиться в двух состояниях равновесия – в упругом однородном или в упругом с локализованной полосой пластической деформации, как показано на рис. 2.

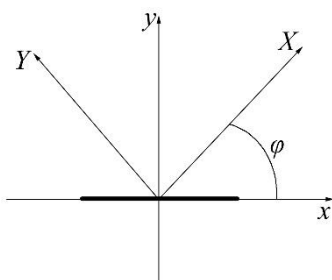


Рис. 2.

Свяжем с полосой локализации систему координат Oxy как показано на рис. 2. Примем, что направление оси Ox будет совпадать с направлением максимальных касательных напряжений τ_{max} для заданного напряженного состояния.

Будем считать, для упрощения, что в пределах полосы локализации действуют только касательные напряжения. Учитывая диаграмму $\tau \sim \gamma$ (рис. 1), можно допустить, что на берегах полосы локализации на участке $0 \leq |x| \leq l$ действуют только касательные напряжения τ_s^{low} , а на участках $l \leq |x| \leq b$ касательные напряжения могут изменяться от значения τ_s^{low} до τ_s^{up} . Рассмотрим две схемы нагружения берегов полосы – кусочно постоянной (рис. 3а), и кусочно линейную (рис. 3б). Такая схема нагружения берегов полосы напоминает модель

Леонова-Панасюка и Дагдейла [7, 8], но с тем существенным отличием, что напряжения в пределах полосы не равны нулю ($\tau_s^{low} > 0$).

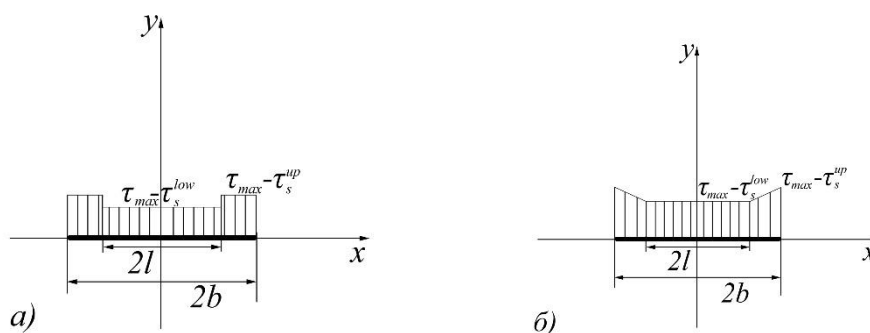


Рис. 3

Требуется определить длину полосы локализации b .

Решение задачи. Для решения задачи воспользуемся методом разрывных смещений, по которому полосу продольного сдвига представим в виде некоторой совокупности краевых дислокаций, с соответствующим вектором Бюргерса b_0 .

Известно [6], что если в начале координат существует разрыв смещений, в форме краевой дислокации с вектором Бюргерса b_0 , параллельным оси x , то поле напряжений в некоторой точке (x, y) будет определяться следующими соотношениями:

$$\vec{b} \parallel x \quad \sigma_x = -\frac{\mu b_0 y (3x^2 + y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{\mu b_0 y (x^2 - y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2}, \quad (52)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu b_0 x (x^2 - y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2},$$

где μ – упругий модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Пусть линия разрыва перемещений расположена вдоль оси x и дислокации, распределенные вдоль этой линии, имеют плотность $b_0 f(\xi)$. Разрыв перемещений, в пределах малого отрезка $d\xi$ в точке $(\xi, 0)$, вызывают напряжения в точке $(x, 0)$, которые могут быть представлены следующим образом:

$$d\tau_{xy} = \frac{\mu b_0}{2\pi(1-\nu)} \frac{f(\xi)}{\xi - x}. \quad (53)$$

На основании этого можно записать:

$$\int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{2\pi(1-\nu)\tau(x)}{\mu b_0}, \quad (54)$$

где $\tau(x)$ – распределение напряжений на оси x . В случае кусочно-постоянного распределения, $\tau(x)$ задаем в виде:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 = \tau_{\max} - \tau_s^{up}, & l < |x| < b; \\ \tau_0 = \tau_{\max} - \tau_s^{low}, & 0 < |x| < l. \end{cases} \quad (55)$$

В случае кусочно-линейного распределения имеем:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 = \tau_{\max} - \tau_s^{\text{low}} - (\tau_s^{\text{up}} - \tau_s^{\text{low}}) \frac{|x| - l}{b - l}, & l < |x| < b; \\ \tau_0 = \tau_0^{\text{up}} - \tau_s^{\text{low}}, & 0 < |x| < l. \end{cases} \quad (56)$$

Уравнение (3) является сингулярным уравнением первого рода с ядром Коши на ограниченном отрезке. Решение его при условии ограниченности функции $f(\xi)$

$$\int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0 \quad (57)$$

известно, и функция распределения разрывов смещений имеет вид:

$$f(x) = \frac{2(1-\nu)\sqrt{b^2 - x^2}}{\mu\pi b_0} \int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (58)$$

После подстановки в уравнение (6) распределения напряжений $\tau(x)$, из условия (4) и (5), получаем трансцендентное уравнение для определения относительного размера $\theta = b/l$:

$$\pi(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 1)F(\theta) = 0, \quad (59)$$

где обозначено $\beta = \tau_{\max}/\tau_s^{\text{up}}$, $\alpha = \tau_s^{\text{low}}/\tau_s^{\text{up}}$ и

$$F(\theta) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{\theta}\right), & \text{для кусочно-постоянного распределения;} \\ \sqrt{\frac{\theta+1}{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \arccos\left(\frac{1}{\theta}\right), & \text{для кусочно-линейного распределения.} \end{cases} \quad (60)$$

Из построенного решения следует, что длина полосы локализации остается пока неопределенной. Для формулировки дополнительного условия, которое позволит определить искомую длину, вспомним, что деформация в полосе должна быть ограничена величиной, связанной с длиной площадки текучести BC , т.к. приведенное выше решение допустимо только до достижения деформацией участка упрочнения в точке C . Для реализации этого условия определим скачек перемещения в полосе локализации.

Максимальный разрыв перемещений будет достигаться в средней точке полосы и определится по формуле:

$$\delta = b_0 \int_b^0 f(\xi) d\xi. \quad (61)$$

Если учесть построенные выше решения для функции распределения дислокаций, то для безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta} = \delta/b$ получим:

$$\bar{\delta} = \frac{4}{\pi} (1-\alpha)(1-\nu) \gamma_s \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \quad (62)$$

в случае кусочно-постоянного распределения, или

$$\bar{\delta} = \frac{2(1-\nu)\gamma_s}{\pi} \left[\frac{\beta-1}{\theta(\theta-1)} \left(\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}) - \theta\sqrt{\theta^2 - 1} \right) + 2(\beta-\alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \right] \quad (63)$$

для кусочно-линейного распределения. Здесь γ_s – предел текучести по деформациям.

На рис. 4 представлены зависимости величины безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ от параметра нагрузки $\beta = \tau_{\max}/\tau_s^{up}$ для некоторых фиксированных значений параметра $\alpha = \tau_s^{low}/\tau_s^{up}$, характеризующего различие верхнего и нижнего пределов текучести. Из приведенных графиков следует, что для каждого α существует два различных значения β для одного и того же отношения $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$. Кроме того, кривые, отвечающие фиксированному значению $\bar{\delta}$, имеют явно выраженный максимум. Это означает, что для каждого α можно найти максимальное отношение $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$, которое определит минимальную длину полосы локализации.

Дадим количественную оценку минимальной длины полосы локализации. Для этого представим δ в следующем виде:

$$\delta = h\gamma_C, \quad (64)$$

где h – условная толщина полосы, γ_C – деформация сдвига на площадке текучести (деформация Людерса). В таком случае длина линии разрыва будет определяться по формуле:

$$b = \frac{1}{(1-\nu)\bar{\delta}} \frac{\gamma_C}{\gamma_s} h. \quad (65)$$

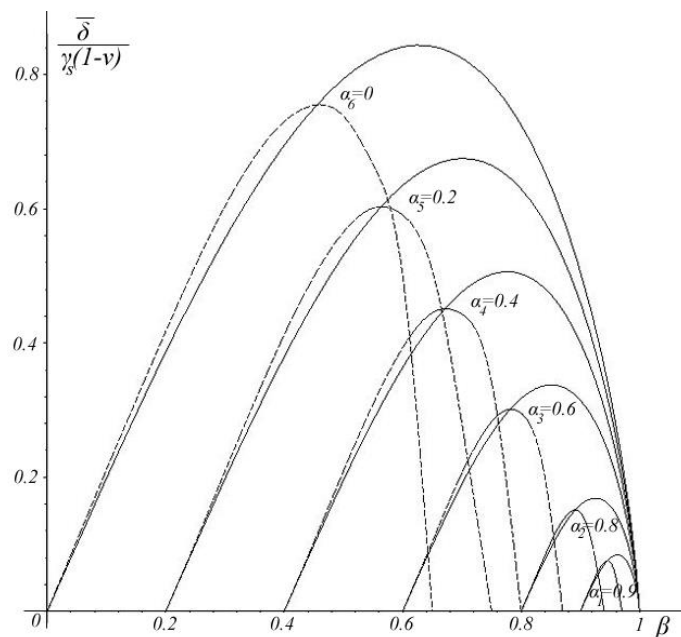


Рис. 4. Графики зависимости $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ от параметра $\beta = \tau_{\max}/\tau_s^{up}$ для различных значений $\alpha = \tau_s^{low}/\tau_s^{up}$.

Сплошные линии результаты – для кусочно-постоянного распределения, а пунктирные – кусочно-линейного

По данным для стали 1045, приведенным в работе [1], имеем $\gamma_C = 1,5 \times 10^{-2}$, $\gamma_s = 2,5 \times 10^{-3}$. Сложнее обстоит дело с величиной h . Для ее определения будем исходить из того, что характерная ширина полосы локализации материала определяется средним размером зерна поликристаллического материала, поскольку размер зерна оказывает большое влияние на деформацию Людерса и морфологию полос, особенно для малоуглеродистых сталей [4, 5]. В соответствии с данными, приведенными в статье [1], средний размер зерна стали 1045 порядка 10 мкм. Исходя из изложенного, принимаем $h \approx 10$ мкм. Тогда отношение $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$, к примеру, для $\alpha = 0$, будет порядка 0,848 и получаем длину полосы b порядка 100 мкм.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПОЛОС

Рассмотрим бесконечную пластинку, в которой по оси x через интервалы W расположено бесконечное число полос локализации пластической деформации длиной $2b$.

Локализованная область представляется в виде полосы, часть которой находится в условиях пластического течения при напряжениях, отвечающих площадке текучести, и остальная часть максимальному пределу текучести.

Из условия равновесия с периодическим распределением разрывов смещений получаем:

$$\int_{-b}^b \frac{\cos(\pi\xi/W) f(\xi) d\xi}{\sin(\pi x/W) - \sin(\pi\xi/W)} + \frac{W}{A\pi} p(x) = 0, \quad (15)$$

где $p(x)$ — распределение напряжений на оси x , $A = \mu b_0 / 2\pi(1 - \nu)$. Если воспользоваться подстановкой $x' = \sin(\pi x/W)$, $\xi' = \sin(\pi\xi/W)$, $b' = \sin(\pi b/W)$, $d\xi' = (\pi/W) \cos(\pi\xi/W) d\xi$, то (15) можно преобразовать к виду:

$$\int_{-b}^b \frac{H(\xi') d\xi'}{x' - \xi'} + \frac{p'(x')}{A} = 0,$$

где $p(x)$ задаем в виде:

$$p(x) = \begin{cases} -p_1 = \tau^{\max} - \tau_s^{up}, & l < |x| < b; \\ p_0 = \tau^{\max} - \tau_s^{low}, & 0 < |x| < l. \end{cases}$$

В вершине полосы $x' = \pm b'$ функция $H(\xi')$ должна быть ограничена, что обеспечивается при условии:

$$\int_{-b}^b \frac{p(x') dx'}{\sqrt{b'^2 - x'^2}} = 0. \quad (16)$$

Интегрируя (16), приходим к трансцендентному уравнению для определения параметра b'/l' , решая которое, получаем:

$$\sin \varphi = \frac{l'}{b'} = \cos \left(\frac{\pi(\tau^{\max} - \tau_s^{low})}{2(\tau_s^{up} - \tau_s^{low})} \right), \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\tau^{\max} - \tau_s^{low}}{\tau_s^{up} - \tau_s^{low}} \right),$$

$$\sin \alpha = \sin(\pi b/W), \quad \sin k = \frac{\sin(\pi x/W)}{\sin \alpha}. \quad (17)$$

Тогда функция распределения разрывов имеет вид:

$$H(x') = \frac{\sqrt{b'^2 - x'^2}}{\pi^2 A} \int_{-b}^b \frac{p(\xi')}{(\xi' - x') \sqrt{b'^2 - \xi'^2}} d\xi' =$$

$$= \frac{(\tau_s^{up} - \tau_s^{low})}{\pi^2 A} \left\{ \operatorname{arcch} \left(\left| \frac{b'^2 - l'x'}{b'(l' - x')} \right| \right) - \operatorname{arcch} \left(\left| \frac{b'^2 + l'x'}{b'(l' + x')} \right| \right) \right\}. \quad (18)$$

Далее положим $b' = \sin \alpha$, $l' = b' \sin \varphi$, $x' = b' \sin k$.

Получим, что максимальный разрыв перемещений будет определяться следующим образом:

$$\delta = b_0 \int_0^b H(x') \frac{dx'}{dx'} = \frac{2(1-\nu)}{\pi^2 \mu} (\tau_s^{up} - \tau_s^{low}) W \sin \alpha \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \frac{\cos k}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 k}} \ln \left| \frac{\sin(k + \varphi)}{\sin(k - \varphi)} \right| dk. \quad (19)$$

Полученные формулы (17) и (19) позволяют построить зависимость длины локализованной области от действующей нагрузки, а также верхнего и нижнего пределов текучести.

Формулу (19) можно записать в виде:

$$\bar{\delta} = \frac{2(1-\nu)(1-\theta)}{\pi \gamma_s} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos k}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 k}} \ln \left| \frac{\sin(k + \varphi)}{\sin(k - \varphi)} \right| dk, \quad (20)$$

где

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{b}, \quad \gamma_s = \frac{\tau_s^{up}}{\mu}, \quad \theta = \frac{\tau_s^{low}}{\tau_s^{up}}, \quad \beta = \tau_{\max} / \tau_s^{up}, \\ \sin \alpha = \sin(\pi b / W), \quad \sin k = \frac{\sin(\pi x / W)}{\sin \alpha}.$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы можем видеть, что параметр β принимает значения от θ до 1. Случаи, когда $\beta < \theta$ нас не интересуют с физической точки зрения, также как и случай, когда $\beta > 1$. Таким образом, для некоего материала, заданного параметром θ , меняя параметр нагрузки β , мы можем построить графики зависимости безразмерного раскрытия полосы локализации $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ от параметров W/b (ось x) для различных $\beta = [0,35; 0,4; 0,5]$ и фиксированного $\theta = 0,2$. На рисунке приведены графики зависимостей.

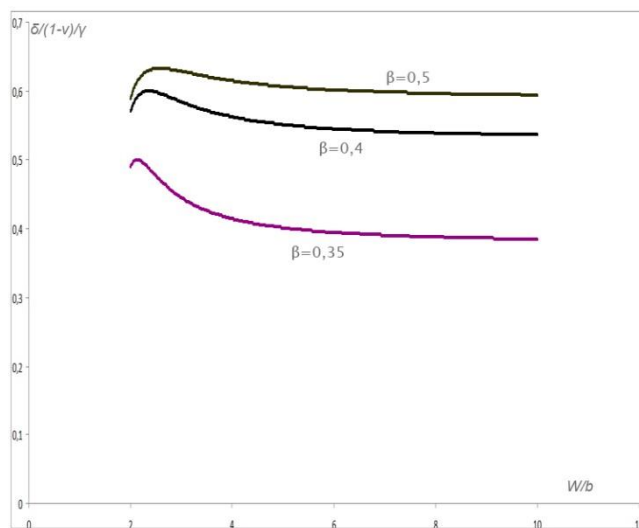


Рис. 5

Нас интересуют только максимальные точки, т.к. при них длина трещины будет минимальной.

Таким образом, можем построить график зависимости максимального безразмерного раскрытия $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ от параметра нагружения β (ось x). Мы видим, что максимальное раскрытие осуществляется при $\beta = 0,7$ и равняется 0,675057932. Это значение получается, когда $W/b = 19,23076923$.

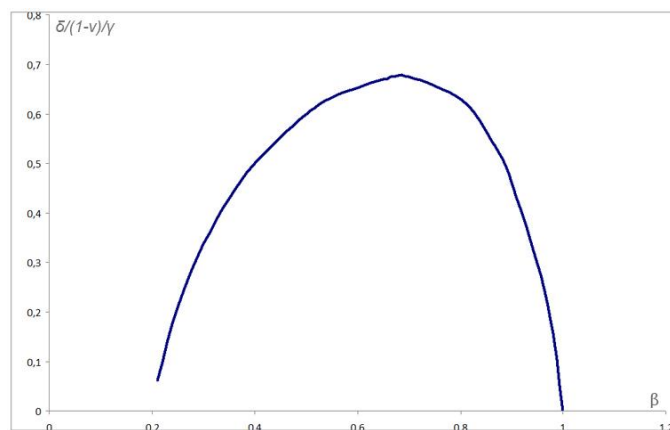


Рис.6

Таким образом, если использовать предыдущие предположения, что $\delta = h\gamma_c$, то можно найти минимальное расстояние между трещинами, при которых будет происходить локализация пластической деформации в периодической системе полос.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты показывают, что локализованная полоса сдвига может иметь конечную длину. При этом, минимальная длина полосы зависит от соотношения между действующей нагрузкой, верхним и нижним пределами текучести. Аналогичные выводы можно сделать и для случая ограниченной длины полосы локализации при растяжении, только в этом случае следует говорить не о локализации сдвига, а о локализации образования шейки. А так же полученные результаты дают возможность определять область пластической деформации в образце конечной длины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang J. Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state / J. Zhang, Y. Jiang // International Journal of Plasticity. –2005. – 21. – P. 651-670.
2. Bigoni D. The unrestrainable growth of a shear band in a prestressed material / D. Bigoni, F. Dal Corso // Proc. R. Soc. – 2008. – A 464. – P. 2365-2390.
3. Леонов М. Я. О разрывных деформациях твердого тела / М.Я. Леонов, Н.Ю. Швайко // Прикл. механика и техн. физика. – 1961. – № 2. – С. 96-103.
4. Hall E. O. The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results / E.O. Hall // Proc. Phys. Soc. – 1961. – B 64. – P. 742-753.
5. Morrison W. B. Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy / W.B. Morrison, R.C. Glenn // J. Iron Steel Inst. – 1968. – 206. – P. 611-612.
6. Новожилов В. В. К основам равновесных упругих трещин в упругих телах / В.В. Новожилов // ПММ. – 1969. – Т. 33. – Вып. 5. – С. 797-812.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К. : Наукова думка, 1968. – 246 с.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D.S. Dugdale, J. Mech // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – 8. – No 2. – P. 100-108.

REFERENCE

1. Zhang, J. and Jiang, Y. (2005), "Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state", *International Journal of Plasticity*, 21, pp. 651-670.

2. Bigoni, D. and Dal Corso, F. (2008), "The unrestrainable growth of a shear band in a prestressed material", *Proc. R. Soc., A* 464, pp. 2365-2390.
3. Leonov, M.Ya. and Shvajko, N.Yu. (1961), "Discontinuous deformation of a solid body", *Prikl. mexanika i texn. fizika*, no. 2, pp. 96-103.
4. Hall, E.O. (1961), "The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results", *Proc. Phys. Soc., B* 64, pp. 742-753.
5. Morrison, W.B. and Glenn, R.C. (1968), "Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy", *J. Iron Steel Inst.*, 206, pp. 611-612.
6. Novozhilov, V.V. (1969), "For the basics of the equilibrium elastic cracks in elastic bodies", *PMM*, vol. 33, issue 5, pp. 797-812.
7. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noe ravnovesie xrupkix tep s treshhinami* [Limit the heat balance of the fragile cracked], Naukova dumka, Kiev.
8. Dugdale, D.S. and Mech, J. (1960), "Yielding of steel sheets containing slits", *J. Mech. Phys. Solids*, 8, no. 2, pp. 100-108.

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НДС МНОГОСВЯЗНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Щербакова Ю. А., к. ф.-м. н., доцент, Шехватова Е. М.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, Украина*

k405@d4.khai.edu

Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния двухсвязного трансверсально-изотропного тела с различными упругими характеристиками. Обобщенным методом Фурье решена задача о действии нормальной сосредоточенной силы на полупространство с неподвижным параболоидальным основанием. Анализ результатов показывает, что распределение напряжений в большей степени зависят от корней характеристического уравнения, которые определяют «трансверсальность» материала, а также от геометрических параметров задачи.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, трансверсально-изотропный, обобщенный метод Фурье.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НДС БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ІЗОТРОПНИХ ТІЛ З РІЗНИМИ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Щербакова Ю. А., к. ф.-м. н., доцент, Шехватова О. М.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, Украина*

k405@d4.khai.edu

Проведені розрахунки напружено-деформованого стану двохзв'язного трансверсально-ізотропного тіла з різними пружними характеристиками. Узагальненим методом Фур'є розв'язана задача про дію нормальної зосередженої сили на півпростір з нерухомою параболоїдальною основою. Аналіз результатів показує, що розподіл напружень у більшості залежить від коренів характеристичного рівняння, які визначають «трансверсальність» матеріалу, а також від геометричних параметрів задачі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, трансверсально-ізотропний, узагальнений метод Фур'є.

COMPARATIVE ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF MULTICONNECTED TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLIDS WITH DIFFERENT ELASTIC CHARACTERISTICS

Shcherbakova Yu. A., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor, Shehvatova H. M.

National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute»,
str. Chkalov, 17, Kharkov, Ukraine

k405@d4.khai.edu

The analysis of the stress-strain state (SSS) of transversely isotropic half-space with a paraboloidal base is performed, when the boundary of the half-space undergoes normal concentrated force, coaxial with the axis of symmetry of the paraboloid. Transversely isotropic materials with different elastic properties are considered. The relevance of the problem is due to poor knowledge of multiconnected solids, the importance of analytical and numerical analysis of SSS in stress concentration zones, depending on the relative position of stress concentrators and boundary surfaces. A comparative analysis of SSS between the boundary surfaces, depending on the elastic properties of transversely isotropic materials and geometric parameters of the problem is carried out.

The problem is solved by a generalized Fourier method. As a result we obtain the analytical solutions. The solution is built as a linear combination of basic solutions in paraboloidal and cylindrical coordinates. Summation theorem for solutions in these coordinate systems allows to satisfy accurately the boundary conditions. The problem is reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind. In the numerical implementation of the system of integral equations the improper integrals are calculated using Laguerre quadrature formula with 10 nodes.

Stress calculations were carried out in the planes which are parallel to the half-space boundary between the top of the paraboloid and the boundary plane. The influence of geometrical parameters on the nature of the stress distribution is investigated. Stress concentration occurs in the environment of the point of load application. When the boundary surfaces are approached there is a concentration of stresses in the environment of the paraboloid vertex. The greater base curvature, the greater the stresses in the environment of the vertex.

The roots of the characteristic equation determine the degree of material anisotropy. The more difference between the roots, the more pronounced anisotropic properties. Analyzing the results it should be noted that for the materials with the near ratio of the roots of the characteristic equation (e.g., quartz and sandstone), the stress distribution is almost the same. Materials with different values of the ratio of the roots of the characteristic equation (eg, sandstone and siltstone, quartz and glass-fibre plastic) have significant differences in the stresses.

Also, there is a dependence of SSS of studied solid from of Poisson ratios in the longitudinal and transversal directions. The absolute values of the elastic constants which differ by several orders of magnitude have a smaller influence, because for calculations the shear modulus was used as normalizing factor.

Key words: stress-strain state, transversely isotropic, the generalized Fourier's method.

Проведен анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) трансверсально-изотропного полупространства с параболоидальным основанием, когда на границу полупространства действует нормальная сосредоточенная сила, соосная оси симметрии параболоида. Рассмотрены трансверсально-изотропные материалы с различными упругими характеристиками. Задача решается обобщенным методом Фурье (ОМФ), в результате чего мы получаем аналитические решения. Актуальность представленной задачи обусловлена малой изученностью многосвязных тел, важностью аналитического и численного анализа НДС в зонах концентрации напряжений в зависимости от взаимного расположения концентраторов напряжений и граничных поверхностей. В работах [1-3] рассматриваются односвязные трансверсально-изотропные тела. Исследование композитных материалов [4], в том числе с трансверсальной изотропией тела, является важным направлением исследований [5-7].

ОМФ в пространственных задачах теории упругости для канонических многосвязных тел был разработан А.Г. Николаевым [8, 9]. Аппарат и приложения ОМФ для трансверсально-изотропных тел, ограниченных координатными поверхностями в цилиндрических и параболоидальных координатах, разработан и обоснован в работах [10, 11]. Задача о действии сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением, где в качестве материала рассмотрен песчаник, решена в [12]. Исследованы напряжения между плоскостью и параболоидом вращения в зависимости от геометрических параметров (форма параболоида, расстояние между поверхностями).

Проведем сравнительный анализ НДС между граничными поверхностями в зависимости от упругих свойств трансверсально-изотропных материалов и геометрических параметров задачи. Трансверсально-изотропный материал характеризуют пять различных упругих постоянных C_{ij} , которые связаны с модулями Юнга, сдвига и упругости формулами:

$$\nu' = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, \quad E' = (C_{11} + C_{12}) \left(\frac{C_{33}}{C_{13}} \nu' - 2\nu'^2 \right), \quad G' = C_{44};$$

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} = (C_{11} - C_{12}) \frac{C_{33}}{C_{13}} \frac{\nu'}{E'}, \quad E = (C_{11} - C_{12})(1+\nu), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где ν и ν' – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении, в плоскости изотропии и перпендикулярном ей направлении соответственно; E и E' – модули Юнга в плоскости изотропии и перпендикулярном ей направлении соответственно; G и G' – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярном ей направлении соответственно.

Пусть ν_1^2 и ν_2^2 – действительные корни характеристического уравнения

$$C_{11}C_{44}\nu^2 - (C_{33}C_{11} - 2C_{13}C_{44} - C_{13}^2)\nu + C_{33}C_{44} = 0, \quad (1)$$

которые, как известно, являются положительными.

Коэффициенты ν_j ($j=1,2$) определяют степень анизотропии материала. Чем больше они отличаются друг от друга, тем более выражены анизотропные свойства. При построении математического аппарата обобщенного метода Фурье (ОМФ) для решения задач теории упругости для многосвязных тел на каждой граничной поверхности вводится пара соответствующих криволинейных систем координат, зависящих от ν_j . В каждой такой паре систем координат строятся соответствующие базисные решения [10]. Для связи между различными криволинейными системами координат получают теоремы сложения, позволяющие записывать общее решение задачи в каждой из рассматриваемых систем и удовлетворять граничным условиям на каждой граничной поверхности [10].

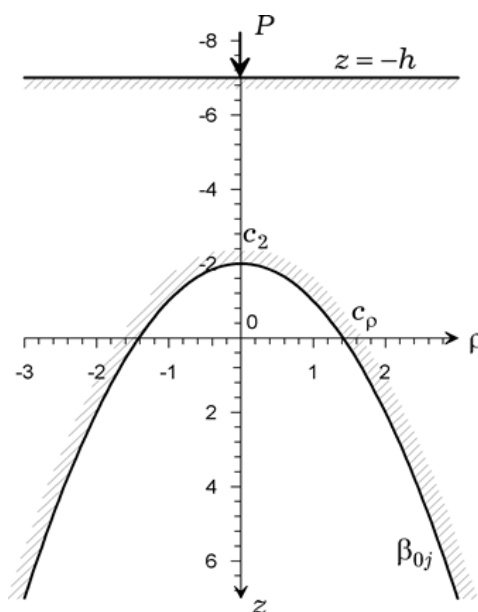


Рис. 1. Геометрия поставленной задачи

Введем две параболоидальные системы координат $(\beta_j, \alpha_j, \varphi)$ ($j=1,2$), которые связаны с цилиндрической системой координат формулами

$$\begin{cases} \rho = \rho_j, \\ z = v_j(z_j + \gamma_j), \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_j = a_j \alpha_j \beta_j, \\ z_j = \frac{a_j}{2}(\alpha_j^2 - \beta_j^2), \end{cases}$$

где $a_j > 0$, γ_j – параметры параболоидальных координат. Уравнение параболоидального основания можно представить в виде $\beta_j = \beta_{j0}$. При $v_j a_j = 2c_1$ на поверхности основания выполняется условие $\alpha_j = \rho$. Уравнение границы полупространства $z = -h$ в переменных z_j имеет вид:

$$z_j = -\frac{h}{v_j} - \frac{v_j}{4c_1} + \frac{c_2}{v_j} \equiv -h_j \quad (j=1,2).$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде:

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^\infty A_j(\lambda) U_{j,0,\lambda}^{-(2)}(\rho, z_j) d\lambda + \int_0^\infty B_j(t) U_{j,0,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j) dt \right\}, \quad (2)$$

где $A_j(\lambda)$, $B_j(\lambda)$ – неизвестные интегральные плотности; $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi)$, $\mathbf{U}_{s,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_s, \varphi)$ ($s=1,2$) – внутренние и внешние базисные решения уравнений равновесия трансверсально-изотропных тел в параболоидальных и цилиндрических координатах соответственно [10]:

$$\mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_j u_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi),$$

$$\mathbf{U}_{j,m,t}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = a_j \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{D}_j u_{j,m,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi),$$

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_j},$$

$$u_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \exp(\pm \lambda z_j + im\varphi) J_m(\lambda \rho),$$

$$u_{j,m,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \begin{Bmatrix} K_m(\lambda \beta_j) \\ I_m(\lambda \beta_j) \end{Bmatrix} J_m(\lambda \alpha_j) \exp(im\varphi),$$

$k_j = \frac{C_{11}v_j - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}$; $K_m(x)$ – функция Макдональда; $J_m(x)$, $I_m(x)$ – обычная и модифицированная функции Бесселя первого рода.

Для базисных перемещений в цилиндрических и параболоидальных координатах теоремы сложения имеют вид [10]:

$$\mathbf{U}_{j,m,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = - \int_0^\infty g_{j,m,t}^{(92)\lambda} \mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) d\lambda, \quad \begin{pmatrix} z_j < 0 \\ z_j > 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U}_{j,m,t}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \int_0^\infty g_{j,m,t}^{(29)\lambda} \mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{-(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) d\lambda, \quad (4)$$

где

$$g_{j,m,t}^{(92)\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{t^2}{2a_j\lambda}\right), \quad g_{j,m,\lambda}^{(29)t} = \frac{t}{\lambda a_j} \exp\left(-\frac{t^2}{2a_j\lambda}\right).$$

На поверхности параболоида $\beta_j = \beta_{j0}$ граничные условия имеют вид:

$$U_\rho(\beta_{j0}, \alpha) = U_z(\beta_{j0}, \alpha) = 0 \quad (\alpha > 0). \quad (5)$$

Пусть сосредоточенная сила P приложена в точке $\rho = 0$, $z = -h$ и направлена вдоль оси OZ . На плоскости $z = -h$ граничные условия запишем в виде:

$$\tau_{\rho z}|_{z=-h} = 0 \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad \sigma_z|_{z=-h} = f(\rho) = \begin{cases} -p(0 \leq \rho < \varepsilon), \\ 0(\varepsilon < \rho < \infty); \end{cases} \quad (6)$$

$$(p = \text{const}(p > 0), \quad P = \pi \varepsilon^2 p) \quad .$$

Представим распределение напряжений $\sigma_z|_{z=-h}$ обобщенным интегралом Ханкеля

$$f(\rho) = \int_0^\infty A(\lambda) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (0 \leq \rho < \infty).$$

По формуле обращения

$$A(\lambda) = \int_0^\infty f(\rho) \lambda J_0(\lambda \rho) d\rho = -p \int_0^\varepsilon \rho J_0(\lambda \rho) d\rho = -p \varepsilon \frac{J_1(\lambda \varepsilon)}{\lambda}.$$

Т.е., условия (4) имеют вид:

$$\sigma_z|_{z=-h} = f(\rho) = -p \varepsilon \int_0^\varepsilon J_1(\lambda \varepsilon) J_0(\lambda \rho) d\lambda. \quad (7)$$

Теоремы сложения (3), (4) решений (2), позволяют удовлетворить условиям на граничных поверхностях (5), (7). В результате преобразований задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода [12] относительно неизвестных функций $A_j(\lambda)$, $B_j(t)$. Оператор полученной системы является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей.

Напряжения при $z \in (-h; -c_2]$ можно вычислять по формуле:

$$\sigma_z = C_{44} \sum_{j=1}^2 (k_j + 1) \int_0^\infty (\alpha_j(\lambda) e^{\lambda z_j} - A_j(\lambda) e^{-\lambda z_j}) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (8)$$

где

$$\alpha_j(\lambda) = \int_0^\infty B_j(t) g_{t,j}^{(92)\lambda} dt.$$

Исследуем НДС различных трансверсально-изотропных материалов. Значения упругих свойств материалов представлены в таблицах 1-3.

Таблица 1 – Упругие постоянные

	кварц (па)	песчаник (па)	песчаный сланец (па)	алевролит (па)	стеклопластик (па)
C_{11}	$1,184 \cdot 10^{12}$	$5,8576 \cdot 10^{10}$	$0,19301 \cdot 10^{-9}$	$7,2924 \cdot 10^5$	4318,1818
C_{12}	$0,19 \cdot 10^{12}$	$2,5019 \cdot 10^{10}$	$0,33976 \cdot 10^{-9}$	$2,2023 \cdot 10^5$	681,8182
C_{13}	$0,32 \cdot 10^{12}$	$2,0793 \cdot 10^{10}$	$0,62965 \cdot 10^{-9}$	$2,2787 \cdot 10^5$	2500
C_{33}	$1,07 \cdot 10^{12}$	$6,1105 \cdot 10^{10}$	$0,13547 \cdot 10^{-8}$	$6,7738 \cdot 10^5$	22500
C_{44}	$0,358 \cdot 10^{12}$	$1,6584 \cdot 10^{10}$	$0,11921 \cdot 10^{-9}$	$2,29 \cdot 10^5$	300

Таблица 2 – Упругие модули

	кварц	песчаник	песчаный сланец	алевролит	стеклопластик
G (па)	$4,97 \cdot 10^{11}$	$1,67785 \cdot 10^{10}$	$2,1832 \cdot 10^{-10}$	$2,25 \cdot 10^5$	4000
G' (па)	$3,58 \cdot 10^{11}$	$1,6584 \cdot 10^{10}$	$0,11921 \cdot 10^{-9}$	$2,29 \cdot 10^5$	300
E (па)	$10,801 \cdot 10^{11}$	$4,5249 \cdot 10^{10}$	$5,231 \cdot 10^{-10}$	$6,21 \cdot 10^5$	4000
E' (па)	$9,209 \cdot 10^{11}$	$5,0761 \cdot 10^{10}$	$1,0741 \cdot 10^{-10}$	$5,68 \cdot 10^5$	20000
ν	0,087	0,3484	0,198	0,22	0,1
ν'	0,233	0,2487	0,431	0,24	0,5

Таблица 3 – Корни характеристического уравнения

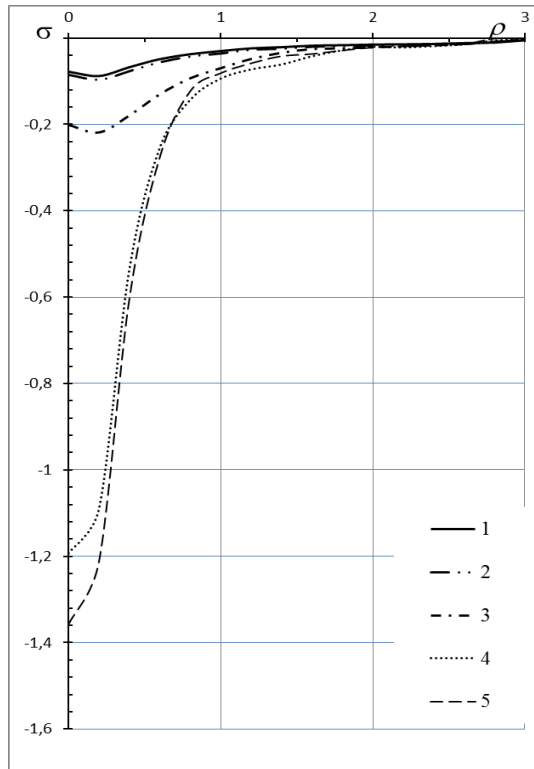
	Кварц	песчаник	песчаный сланец	алевролит	стеклопластик
ν_1	0,7371	0,7203	0,5032956855	0,8399	0,2749
ν_2	1,2897	1,4181	2,914433209	1,1474	8,3031

Характер распределения напряжений в зависимости от геометрических параметров (форма параболоидального основания (c_p) и расстояние между граничными поверхностями (L)) проанализирован в работах [10, 12] на примере песчаника. Расчеты напряжений проводились в плоскостях, параллельных границе полупространства между вершиной параболоида и граничной плоскостью. Отмечено, что концентрация напряжений наблюдается непосредственно под точкой приложения сосредоточенной силы и в окрестности вершины параболоида. Причем, абсолютная величина напряжений тем больше, чем больше кривизна основания. Уменьшение кривизны параболоида (увеличение параметра c_p) приводит к более равномерному распределению напряжений в плоскостях.

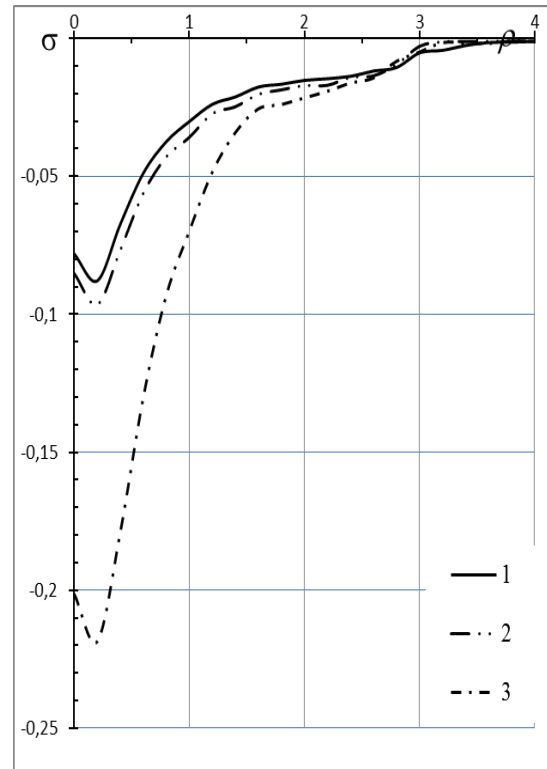
На приведенных ниже рисунках напряжения $\sigma = \frac{\sigma_z}{\sigma_0} \left(\sigma_0 = \frac{P}{2\pi} C_{44} \right)$ (P – абсолютная величина сосредоточенной силы, приложенной к границе полупространства) даны в зависимости от переменной ρ . Напряжения σ_z вычислены по формулам (8). Между граничными поверхностями параллельно границе полупространства проведено 5 равноудаленных друг от друга плоскостей, в каждой из которых исследовалось НДС.

На рисунках 2, 3 показана зависимость распределения напряжений между граничными поверхностями для различных трансверсально-изотропных материалов при некоторых значениях геометрических параметров. На представленных рисунках форма параболоида ($c_p = 1$) и расстояние между границей полупространства и вершиной параболоида ($L = 5$) постоянные; линия 1 соответствует напряжениям в *песчанике*, линия 2 – в *кварце*, линия 3 – в

песчаном сланце, линия 4 – в алевролите, а линия 5 – в стеклопластике. Значения напряжений $\sigma = \frac{\sigma_z}{G'}$ (2) в зависимости от координаты ρ на рис. 2 приведены в плоскости изотропии (параллельно граничной), проходящей через вершину параболоида, на рис. 3 – на расстоянии $\frac{1}{5}L$. Нормирующий множитель G' – свой для каждого материала.

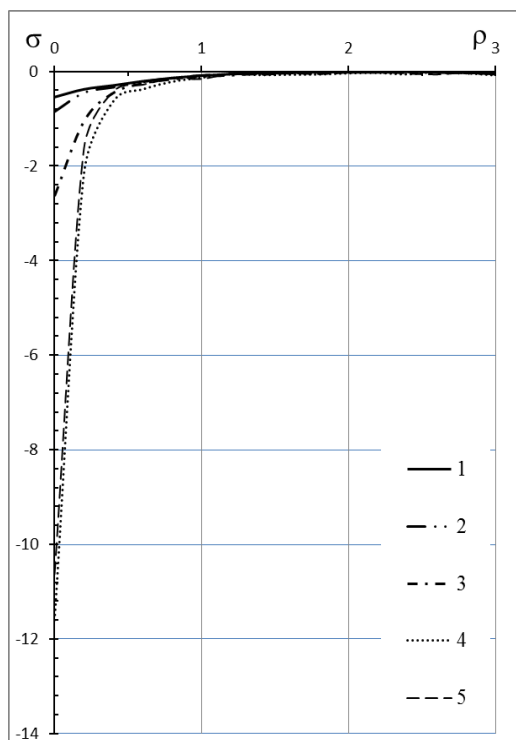


(a)

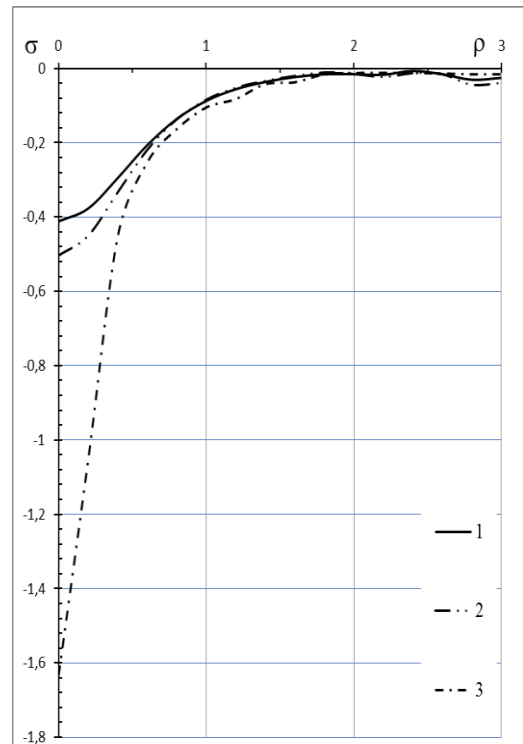


(b)

Рис. 2



(a)



(b)

Рис. 3

Корни характеристического уравнения (табл. 3) определяют степень анизотропии материала. Чем больше они отличаются друг от друга, тем более выражены анизотропные свойства. Анализируя полученные результаты, необходимо отметить, что для материалов, у которых отношение корней характеристического уравнения являются близкими (например, кварц и песчаник), распределение напряжений практически совпадают. Материалы, имеющие разные значения отношения корней характеристического уравнения (например, песчаник и алевролит, кварц и стеклопластик), имеют существенные различия в напряжениях.

Также имеет место зависимость НДС исследуемого тела от коэффициентов Пуассона в продольном и поперечном направлениях. Абсолютные величины упругих констант (табл. 2), которые отличаются на несколько порядков, в меньшей мере отражены, т.к. нормирующим множителем при расчетах напряжений выбран модуль сдвига G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Клиндухов В. В. Вдавливание гладкого осесимметричного штампа в трансверсально-изотропный слой / В.В. Клиндухов // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – №5. – С. 99-105.
2. Колмогоров Г. Л. Трансверсально изотропные характеристики сверхпроводниковых материалов / Г.Л. Колмогоров, М.В. Снигирева // Научный журнал. Научные исследования и инновации. – 2007. – №1. – С. 31-40.
3. Родионова З. Н. Напряженное состояние трансверсально-изотропного полупространства / З.Н. Родионова, Л.П. Есипенко, Е.Б. Шестакова // Вестник ВКГТУ. – Усть-Каменогорск, 2009. – №3. – С. 37-42.
4. Назаренко Л. В. Эффективные свойства трансверсально-изотропных композитных материалов при физической нелинейности компонентов / Л.В. Назаренко // Доп. НАНУ. – 2012. – №2. – С. 88-94.
5. Ding H. Elasticity of Transversely Isotropic Materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang // 1st edition. – 2006. – 435 p.
6. Gupta R. R. Reflection of plane waves in thermoelastic transversely isotropic half space / R.R. Gupta // Int. J. of Appl. Math and Mech. – 2012. – 8(10). – P. 71-82.
7. Prikazchikov D. A. On localised vibrations in incompressible pre-stressed transversely isotropic elastic solids / D.A. Prikazchikov, G.A. Rogerson, K.J. Sandiford // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – 301(3-5). – P. 701-717.
8. Николаев А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости для канонических многосвязных тел. : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04 ; защищена 13.07.97 ; утв. 20.09.97 / Николаев Алексей Георгиевич. – Х., 1997. – 331 с.
9. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе / А.Г. Николаев. – Х. : ХАИ, 1993. – 109 с. деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 – Ук 93.
10. Николаев А. Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 160-169.
11. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2010. – Вып. 48. – С. 180-190.
12. Николаев А. Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением / А.Г. Николаев, А.Ю. Щербакова, А.И. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Х. : НАКУ, 2006. – Вып. 2(45). – С.47-51.

REFERENCES

1. Klindukhov, V.V. (2009), "Indentation of a smooth axisymmetric punch into a transversely isotropic layer", *Mechanics of Solids*, vol. 5, pp. 737-743.
2. Kolmogorov, G.L. and Snigireva, M.V. (2007), "Transversely isotropic characteristics of superconducting materials", *Nauchnyj zhurnal. Nauchnye issledovaniya i innovacii*, vol. 1, pp. 31-40.
3. Rodionova, ZN, Yesipenko, L.P. and Shestakova, E.B. (2009), "Stress state transversely isotropic half-space", *Vestnik VKGTU*, vol. 3, pp. 37-42.
4. Nazarenko, L.V. (2012), "Effective properties of composite materials strengthened by orthotropic fibers with taking into account physical nonlinearity of components", *Dopovidi NANU*, vol. 2, pp. 88-94.
5. Ding, H., Chen, W. and Zhang, L. (2006), "Elasticity of Transversely Isotropic Materials", *1st edition*, 435 p.
6. Gupta, R.R. (2012), "Reflection of plane waves in thermoelastic transversely isotropic half space", *Int. J. of Appl. Math and Mech.*, 8(10), pp. 71-82.
7. Prikazchikov, D.A., Rogerson, G.A. and Sandiford, K.J. (2007), "On localised vibrations in incompressible pre-stressed transversely isotropic elastic solids", *Journal of Sound and Vibration*, 301(3-5), pp. 701-717.
8. Nikolaev, A.G. (1997), "Generalized Fourier method in the spatial problem of elasticity for canonical multiply bodies", Thesis abstract for D. Sc. (Physics and Maths), 01.02.04, Kharkiv, Ukraine.
9. Nikolaev, A.G. (1993), *Teoremy slozheniya reshenij uravneniya Lamé* [Addition theorems of solutions of Lamé], KHAI, Kharkov, Ukraine.
10. Nikolaev, A.G. and Shherbakova, Yu.A. (2009), "Apparatus and applications of generalized fourier method for transversally isotropic bodies bounded by surface and paraboloid of rotation", *Mat. metodi ta fiz.-mex. Polya*, vol. 52(3), pp. 160-169.
11. Nikolaev, A.G. and Shherbakova, Yu.A. (2010), "Justification of Fourier's method in axially symmetric elasticity problems for transversely isotropic bodies with paraboloidal surface", *Otkrytye informacionnye i komp'yuternye integrirovannye tehnologi*, vol. 48, pp. 180-190.
12. Nikolaev, A.G. and Shherbakova, Yu.A. (2006), "The action of a force on the transversely isotropic half-space with the inclusion of paraboloidal", *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstrukcij letatel'nykh apparatov*, vol. 2(45), pp. 47-51.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- f) для анотацій, виносів, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і не виділяється відступом або пустим рядком.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підпис до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з обтіканням «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядкові заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 228-76-28 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти: kpmf.mf@znu.edu.ua

ДЛЯ ПОДАТОК

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 2, 2015

Технічний редактор – *Л.А. Безугла*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 33

Замовлення №. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007