ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

В і с н и к
Запорізького національного університету

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон
для довідок:
(061) 228-76-28

Факс: (061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

№ 1, 2015

Запоріжжя 2015

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – 230 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Постанова президії ВАК України №1-05/4 від 14.10.09 р., бюлетень ВАК України №11, 2009 р.)

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 10 від «28» квітня 2015 р.)

ЗМІСТ

ДО 75-РІЧЧЯ ЗАВІДУВАЧА КАФЕДРИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ, ДОКТОРА ТЕХНІЧНИХ НАУК, ПРОФЕСОРА, ЗАСЛУЖЕНОГО ДІЯЧА НАУКИ І ТЕХНІКИ УКРАЇНИ
ГРИЩАКА ВІКТОРА ЗАХАРОВИЧА 5

БАРАНЕНКО В.О., ВОЛЧОК Д.Л.
НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗУ СТИСНЕНОЇ ОБОЛОНКИ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДАНИХ ТА ОБМЕЖЕНЬ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ 7

ВОРОБЬЕВ Ю.С., ОВЧАРОВА Н.Ю.
ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА СКОРОСТНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ 12

ВОРОБЬЕВ Ю.С., ОВЧАРОВА Н.Ю., КУЛАКОВ П.Н., КУЛИШОВ С.Б., СКРИЦКИЙ А.Н.
ДИНАМИКА КОМПРЕССОРНОГО ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ 22

ГРИГОРЕНКО Я.М., БЕСПАЛОВА О.І., УРУСОВА Г.П.
КОЛИВАННЯ СПОЛУЧЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ РІЗНИХ ФОРМ 32

ГРИШКЕВИЧ А.Д., ГРИНЮК С.И.
НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕЙ ИОННО-ПЛАЗМЕННОЙ ОБРАБОТКИ ВНУТРЕННИХ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАР ТРЕНИЯ 43

ЗЕМСКОВ А.В., ТАРЛАКОВСКИЙ Д.В.
МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ 51

КИРИЧОК И.Ф., КАРНАУХОВА Т.В.
РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ИХ ДЕМПФИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРОМ И АКТУАТОРОМ 59

КОСТРОВА М.М., НАУМОВА И.Ю., АХУНДОВ В.М.
ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ 66

КУБЕНКО В.Д., ЯНЧЕВСЬКИЙ І.В.
НЕСТАЦІОНАРНА ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЗГОДЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ .. 75

КУРПА Л.В., ШМАТКО Т.В.
ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА 89

МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО К.В., ШЕЙКО Т.И.
ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ТОПЛИВНОЙ КАССЕТЕ ТВЭЛОВ 97

МАХОРКІН М.І.
ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОКЛИНОВОГО КОМПОЗИТУ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ 107

ОНОПРІЄНКО О.Д., ЛОБОДА В.В.
ЕЛЕКТРОПРОВІДНА ТРІЩИНА МІЖ РІЗНОРІДНИМИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ 117

ОПАНАСОВИЧ В.К., СЛОБОДЯН М.С., ЗВІЗЛО І.С.
ДВОВІСНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА КРАЙОВОЮ РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ 127

ОПАНАСОВИЧ В.К., СЛОБОДЯН М.С., ЯРЕМА Є.Б.
ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ 135

ПОПОВ В.Г.
НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ АБО ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ 145

ПОШИВАЛОВ В.П., ДОЯР И.А.
СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ 154

СМЕТАНКІНА Н.В.
МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ 162

СТОРОЖУК Є.А., ЧЕРНИШЕНКО І.С., ХАРЕНКО С.Б.
КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОПЛАСТИЧНІЙ КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ........ 170

СУЛИМ Г.Т., ТУРЧИН І.М.
НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА ІЗ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛАДКАМИ ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ 178

ФИЛЬШТИНСКИЙ Л.А., ШРАМКО Ю.В., НОСОВ Д.Н., ЕРЕМЕНКО А.А., СУШКО Т.С.
ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕНТОЧНОГО ПЬЕЗОМАГНИТНОГО КОМПОЗИТА 188

ХАПКО Б.С.
ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВОХЕЛЕМЕНТНОЇ ПРИЗМАТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІЗНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ 199

ШАЦЬКИЙ І.П., ДАЛЯК Т.М.
ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИНИ З КОЛІНЕАРНОЮ ЩІЛИНОЮ ЗА ЗГИНУ ПЛАСТИНИ 210

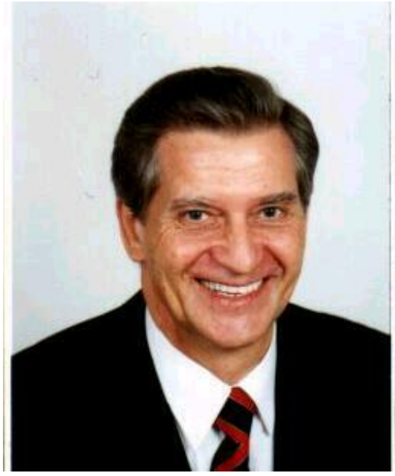
ШУЛЬЖЕНКО Н.Г., ЗАЙЦЕВ Б.Ф., РУДЕНКО Е.К., АСАЕНОК А.В.
ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ РОТОРА С ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ КОНТАКТИРОВАНИЯ БЕРЕГОВ 218

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ» *........ 227*

Вітаємо ювіляра!

До 75-річчя завідувача кафедри прикладної математики і механіки Запорізького національного університету, доктора технічних наук, професора, Заслуженого діяча науки і техніки України

ГРИЩАКА ВІКТОРА ЗАХАРОВИЧА



Учений-механік, фахівець у галузі стійкості та коливань конструкцій аерокосмічної техніки, застосування гібридних асимптотичних методів у прикладній математиці і механіці, нелінійній динаміці неоднорідного середовища та стохастичній механіці. У 1964-му з відзнакою закінчив фізико-технічний факультет Дніпропетровського національного університету (ДНУ), а в 1969-му (достроково) – аспірантуру кафедри теорії пружності ДНУ, яку очолював академік НАН України Мосаковський В.І., із подальшим захистом дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук за спеціальною тематикою. Згодом отримав вчене звання доцента і був обраний деканом механіко-математичного факультету ДНУ, а з організацією у 1984 р. нового факультету – деканом факультету прикладної математики, обов'язки якого виконував до 1992 р. У 1975-1976 роках – запрошений дослідник всесвітньовідомої наукової школи стійкості оболонок професора W.T. Koiter при Делфтському технологічному університеті (Голландія). З 1975 по 1985 рік – науковий керівник науково-дослідної лабораторії механіки неоднорідного та анізотропного середовища проблемної наукової лабораторії міцності і надійності конструкцій. З 1985 по 1986 роки – запрошений науковець за програмою IREX до університету Північного Техасу (м. Дентон, США) у наукову школу з прикладної математики професора John Newberger. У 1988 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, а в 1990-му році отримав вчене звання професора кафедри прикладної теорії пружності ДНУ. У 1991 році за програмою Фулбрайта був запрошений до наукової роботи у США, зокрема у Станфордський університет (у наукову школу професора Charles Steele), до якого запрошувався у 1995, 1998 та 2000 роках. У 1998 році був запрошений консультантом до Міжнародної Асоціації з аналізу аварій та катастроф (Менло Парк, Каліфорнія, США).

З 1993 по 2014 роки – проректор з наукової роботи та міжнародного співробітництва Запорізького національного університету. У 1994 році очолив кафедру математичного моделювання та інформаційних технологій у Запорізькому національному університеті, нині – завідувач кафедри прикладної математики і механіки ЗНУ.

Опублікував понад 250 наукових праць. За напрямком наукових досліджень опубліковано 2 монографії. Очолює і бере безпосередню участь у ряді національних та міжнародних програм і проектів.

Член бюро Президії Українського товариства інженерів-механіків, член низки закордонних наукових товариств, асоційований редактор міжнародного журналу «Огляди з прикладної механіки», Тимошенківський професор Станфордського університету, почесний член ради міжнародного біографічного центру в Кембриджі (Англія), член бюро радників Американського біографічного Інституту (США). Академік і член Президії Академії наук вищої освіти України. Нагороджений медалями Ярослава Мудрого та Володимира Великого, дипломом лауреата регіональної програми «Зоряний шлях» Запорізької області, почесними грамотами так медалями Міністерства освіти і науки України та ряду університетів України. Указом Президента України від 2 жовтня 2004 року присвоєно звання «Заслужений діяч науки і техніки України».

З щирими привітаннями,

редакційна колегія Вісника ЗНУ

УДК 539.3

НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗУ СТИСНЕНОЇ ОБОЛОНКИ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДАНИХ ТА ОБМЕЖЕНЬ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ

[1]Бараненко В. О., д. т. н., професор, [2]Волчок Д. Л. к. т. н., доцент

[1]*Український державний хіміко-технологічний університет, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна*

[2]*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

Розглядається задача знаходження геометричних параметрів радіуса і товщини ізотропної стислої циліндричної оболонки мінімальної маси. Проектування здійснюється в умовах неповної інформації про вихідні дані: величини навантаження, модуль пружності, довжині твірної циліндра, невизначеність можливого виконання умов міцності і стійкості. Тут розглядається нечітка невизначеність. У рамках ССР-моделей (chance constrained programming) за допомогою нечіткого моделювання обчислений поріг маси, який не може бути перевищений цільовою функцією із заданою наперед можливістю. Адекватною формою подання нечіткої інформації взято нечіткі числа з функцією належності трикутного виду.

Ключові слова: оболонка, моделювання, програмування з обмеженнями на шанс.

НЕЧЁТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СЖАТОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ НЕЧЁТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ И ОГРАНИЧЕНИЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

[1]Бараненко В. А., д. т. н., профессор, [2]Волчок Д. Л., к. т. н., доцент

[1]*Украинский государственный химико-технологический университет, просп. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, 49005, Украина*

[2]*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

Рассматривается задача нахождения геометрических параметров – радиуса и толщины изотропной сжатой цилиндрической оболочки минимальной массы. Проектирование осуществляется в условиях неполной информации об исходных данных: величинах нагрузки, модуля упругости, длине образующей цилиндра, неопределённости возможного выполнения условий прочности и устойчивости. Здесь рассматривается нечёткая неопределённость. В рамках ССР-моделей (chance constrained programming) с помощью нечёткого моделирования вычислен порог массы, который не может быть превышен целевой функцией с заданной заранее возможностью. Адекватной формой представления нечёткой информации взято нечёткие числа с функцией принадлежности треугольного вида.

Ключевые слова: оболочка, моделирование, программирование с ограничениями на шанс.

SYNTHESIS PROBLEM FUZZY MODELING OF COMPRESSED SHELL WITH FUZZY UNCERTAIN CONDITIONS AND LOAD BEARING CAPACITY RESTRICTIONS

[1]Baranenko V. A., D. of Technical Science, Professor,
[2]Volchok D. L., Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor

[1]*Ukrainian State University of Chemical Technology, Gagarin av. 8, Dnepropetrovsk, 49005, Ukraine*

[2]*Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture, Chernychevskiy str. 24a, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

bva0984387404@gmail.com, VolchokDL@yandex.ru

The mathematical programming formulation considered in the article. The problem use probabilistic constraints within CCP-models (chance-constrained programming) for mechanical systems optimal design. The consideration object is shells under conditions of uncertainty fuzzy data and limit bearing capacity (strength and stability). These models

include those optimization problem where you have to minimize some criterion threshold (mass shell) that can not be exceeded with a given objective function with given priori possibility. Application of the fuzzy set theory, theory of uncertain programming and simulation modeling give such models implementation in order researcher informational tools that allow you to formulate objective functions and constraints in terms of opportunities to achieve them and develop appropriate computational procedures.
Here considered the finding problem of geometrical parameters such as radius and thickness of compressed isotropic cylindrical shell with minimal mass. Design is provided with incomplete information of initial data which consists of load value, modulus of elasticity, cylinder guide length and uncertain possible realization of strength and steady state conditions. Here is fuzzy uncertainty. The purpose of such approach is to provide N cycles every one of which randomly create tree vectors with α and β set limits. The vectors obtained with normal law of the random variable. With the chance constrained programming with fuzzy modeling the mass limit is calculated. It can not be exceeded with objective function which possibility is given previously. Adequate form of fuzzy numbers is membership function of triangle view.
So taking into account uncertain information about the source data and the operation conditions makes it possible to adequately simulate real process of designing systems such as cylindrical shell.
Key words: shell, modeling, uncertain chance-constrained programming.

ВСТУП

У статті наводиться формулювання задачі математичного програмування [1] із можливісними обмеженнями в рамках ССР-моделей (chance-constrained programming) для оптимального проектування механічної системи типу оболонок в умовах нечіткої невизначеності вихідних даних та обмежень несучої здатності (міцності і стійкості). Ці моделі включають у себе ті задачі оптимізації, де треба виконати мінімізацію порога деякого критерію (маси оболонки), який не може бути перевищений цільовою функцією із заданою апріорі можливістю. Застосування теорії невизначеного програмування, теорії нечітких множин, імітаційного моделювання до реалізації таких моделей дає в розпорядження досліднику інформаційні засоби, які дозволяють формулювати цільові функції та обмеження в термінах можливості їх досягнення, а також розробляти відповідні обчислювальні процедури. Наукових праць з розглянутого тут питання нема. У детермінованій постановці задачі синтезу таких оболонок розглядалися в роботах [5-7].

ПОСТАНОВКА ДЕТЕРМІНОВАНОЇ ЗАДАЧІ

Розглядається задача синтезу стисненої осьовою силою $P*$ циліндричної кругової ізотропної оболонки – знаходження її геометричних характеристик: радіуса R і товщини h в умовах нечітко заданих вихідних даних і фізичних обмежень міцності оболонки на стиснення силою P_R і стійкості, які є наближеними виразами критичних зусиль [7] при шарнірному обпиранні оболонки в припущені достатньої зсувної жорсткості в трансверсальній площині і площині оболонки P_{KP}^{M}; для шарнірно обпертого стержня з кільцевим поперечним перетином P_{KP}^{C}, тобто

$$g_1(x) = P_{KP}^{M} \geq \mathrm{P}*; \quad g_2(x) = P_{KP}^{C} \geq \mathrm{P}*; \quad g_3(x) = P_R \geq \mathrm{P}*. \tag{1}$$

У співвідношеннях (1) уведено такі позначення

$$P_{KP}^{M} = Dx_1^{\,2}; \quad P_{KP}^{C} = Bx_1 x_2^{\,3}; \quad P_R = Cx_1x_2; \quad x_1 = h; \quad x_2 = R; \quad x = \{x_1, x_2\};$$

$$B = \pi^3 E / L^2; \quad C = 2\pi\sigma_T; \quad D = 2\pi E \Big/ \sqrt{3\left(1-\mu^2\right)}, \tag{2}$$

де L – довжина твірної циліндра; E, μ – відповідно модуль Юнга і Пуассона; σ_T – величина границі текучості матеріалу оболонки. На компоненти вектора x можуть бути накладені геометричні обмеження

$$x_i^- \leq x_i \leq x_i^+; \quad i = 1{,}2, \tag{3}$$

де x_i^-, x_i^+ – задані величини.

Вираз для обчислення маси такої оболонки матиме вигляд

$$G(x) = Ax_1x_2L; \quad A = 2\pi\rho, \tag{4}$$

де ρ – густина матеріалу, із якого планується виготовити конструкцію.

Перше обмеження в співвідношеннях (1) визначає можливість місцевої втрати стійкості оболонки, друге обмеження лімітує значення параметрів h і R з урахуванням можливості загальної втрати стійкості, третє обмеження в (1) установлює значення h і R з урахуванням можливості руйнування оболонки при стисненні її силою $P*$. Обмеження (3) є технологічними або можливими границями пошуку шуканих параметрів. У випадку, коли інформація про дані повна, задача синтезу змінних x за критерієм мінімуму маси (4) оболонки записується у вигляді такої моделі нелінійної оптимізації

$$x^{opt} = \arg\left\{ \min_{x^- \le x \le x^+} G(x) \,\middle|\, g_i(x) \ge P^*;\, i = 1, 2, 3 \right\}. \tag{5}$$

ПОСТАНОВКА НЕЧІТКОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Нехай у задачі (5) інформація про параметри ρ, μ, σ_T є чіткою, а параметри $P*$, E, L задано за допомогою такого оцінювання: «величина E близька до числа E_0», діюча сила $P*$ набуває значення «біля P_0», довжина твірної циліндра L дорівнює «приблизно L_0». Такий вид інформації – це нечіткий опис вихідних даних у вигляді словесних оцінок змінної «приблизно». Адекватною формалізацією таких даних можуть бути нечіткі числа (L-R) – типу, що описуються відповідно функціями належності $\mu_E(x)$, $\mu_P(x)$, $\mu_L(x)$ наприклад, трикутного виду [2, 3]. Позначимо через вектор ξ, компоненти якого, припустимо, будуть нечіткі числа $P*$, E, L, тобто

$$\xi = \xi(P*, E, L).$$

Тоді функції G, g_i будуть функціями змінних x і ξ, тобто

$$G = G(x, \xi); \quad g_i(x, \xi); \quad i = 1,2,3. \tag{6}$$

У припущені, що функції належності $\mu_P(x)$, $\mu_E(x)$, $\mu_L(x)$ визначені, сформулюємо таку оптимізаційну модель

$$\left(G_*^{opt}, x^{opt}\right) = \arg\left\{ \min_{x^- \le x \le x^+} G_* \,\middle|\, Pos\left(G(x,\xi) \le G_*\right) \ge \beta;\, Pos\left(g_i(x,\xi) \ge P_*\right) \ge \alpha;\, i = 1, 2, 3 \right\}, \tag{7}$$

де через $Pos(\cdot)$ позначено міру можливості [1, 4] виконання події, описаної нерівністю в (7). Величина G_* є шуканим порогом, а її мінімальне значення $G_*^{opt} = \min G_*$ представляє β-оптимістичну оцінку маси оболонки.

Модель (7) може бути розглянута і для іншого виду невизначеності – випадковості. Для цього необхідно замінити міру $Pos(\cdot)$ на імовірнісну $Prob(\cdot)$ [8].

РЕАЛІЗАЦІЯ НЕЧІТКОЇ МОДЕЛІ

Обчислення можливостей знаходження критичних значень G_*^{opt} та x^{opt} в (7) виконано за методом нечіткого статистичного моделювання. Суть цього підходу полягає в здійснені N циклів, у кожному з яких формуються випадковим чином вектори $u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ і $v = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ із α-рівневих множин для нечітких величин $\xi_1 = P*$, $\xi_2 = E$ і вектор

$w=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ для β-рівневої множини нечіткої величини L. Величини $x_1=h$, $x_2=R$, а також u, v, w розглядаються за рівномірним законом розподілу випадкової величини. Якщо виконуються обмеження задачі і $G<G_*$ для подальшого циклічного обчислення, слід вважати, що $G_*=G$.

ЧИСЛОВА ІЛЮСТРАЦІЯ

Наведений вище матеріал ілюстровано прикладом, у якому взято $\mu=0,3$; $\rho=8,01 г/см^3$; $\sigma_0=16,2\cdot10^3 H/см^2$; $R^-=4см$; $R^+=6см$; $\mathrm{n}=10^6$; $\mathrm{m}=10^2$; $\mathrm{N}=20\div50$; $h^-=0,01см$; $h^+=0,03см$. Нечіткі числа $\tilde{\tilde{P}}_0$, $\tilde{\tilde{E}}_0$, $\tilde{\tilde{L}}_0$ з трикутниковою функцією належності задаються так (рис. 1):

$$\tilde{\tilde{P}}_0(a,b,c);\quad a=8\cdot10^3 H;\quad b=10\cdot10^3 H;\quad c=13\cdot10^3 H;$$

$$\tilde{\tilde{E}}_0(a,b,c);\quad a=7,66\cdot10^6 H/см^2;\quad b=8,16\cdot10^6 H/см^2;\ c=8,56\cdot10^6 H/см^2;$$

$$\tilde{\tilde{L}}_0(a,b,c);\quad a=2,4\cdot10^2 см;\quad b=3\cdot10^2 см;\quad c=3,5\cdot10^2 см^2.$$

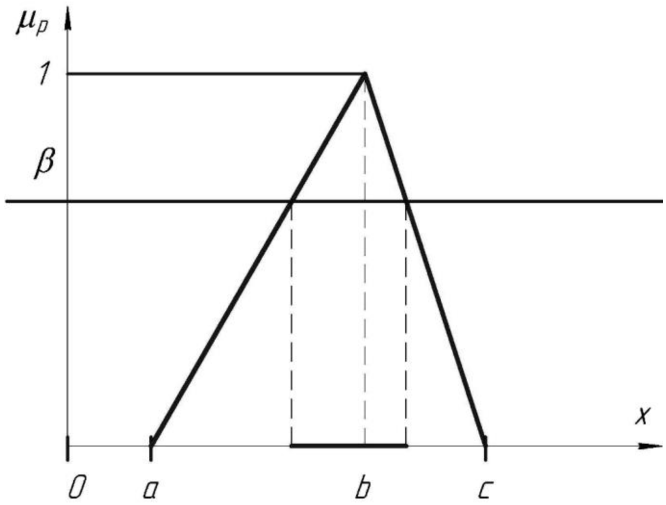


Рис. 1. Нечітке трикутникове число

Для перевірки вірогідності пропонованої процедури в результаті обчислень було отримано: $\min G_*=1582 г$; $x_1=0,018 см$; $x_2=5,83 см$ (при $L=300 см$; $E=8,16\cdot10^6 H/см^2$; $P^*=10 кH$; $\alpha=1$ і $\beta=1$ (детермінований варіант)). Результати співпадають з даними роботи [6]. На рис. 2-3 показана геометрична ілюстрація дослідження впливу значень рівнів можливостей α, β на величину G_*^{opt}. Вона збільшується майже лінійно від «розмитих» результатів до детермінованих. Наявність невизначеності $0\le\alpha<1$ і $0\le\beta<1$ призводить до зменшення величини порогу G_* за рахунок розгляду конкретних реалізацій нечітких чисел. Реалізація їх у реальному проекті пов'язана з можливими труднощами.

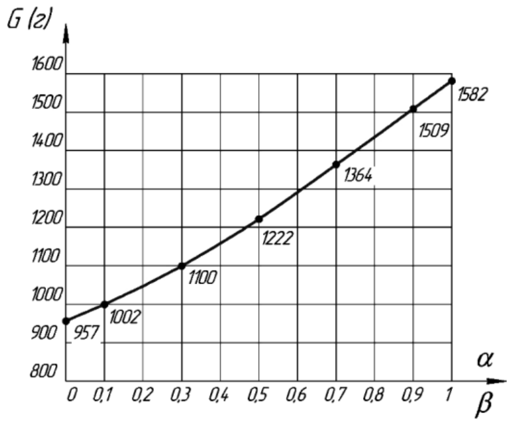


Рис. 2. Графік залежності порогу маси оболонки G_* від значень рівнів α , β

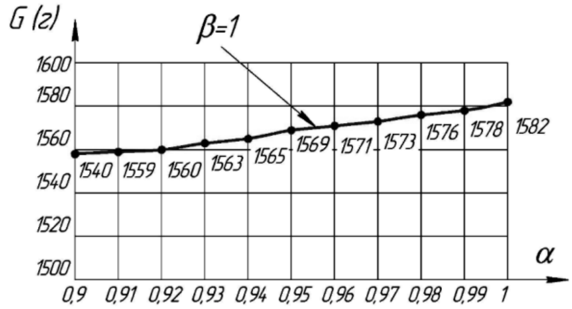


Рис. 3. Вплив «маленької» розмитості α на величину G_*

Наприклад, щоб отримати теоретичні дані при $\alpha = 0,92$ і $\beta = 1$ (майже детерміноване завдання): $G_* = 1560\,г$; $x_1 = 0,018\,см$; $x_2 = 5,812\,см$ треба взяти такі реалізації $L = 300\,см$; $E = 8186882,5\,H / см^2$; $P* = 9846,46\,H$.

Отже, урахування невизначеної інформації щодо вихідних даних і умов функціонування дає можливість адекватно моделювати процес реального проектування систем типу оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Liu B. Uncertain Programming / B. Liu. – New York : Wiley, 1999. – 201 с.
2. Борисов В. В. Основы нечёткой математики : Кн. 1 : Теория нечётких множеств / В.В. Борисов, А.С. Федулов, М.М. Зернов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2014. – 88 с.
3. Борисов В. В. Основы нечёткой математики : Кн. 2 : Теория нечётких множеств / В. В. Борисов, А.С. Федулов, М.М. Зернов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2014. – 94 с.
4. Дюбуа А. Теория вероятностей : Приложение к представлению знаний в информатике / А. Дюбуа, А. Прад. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.
5. Гинзбург И. Н. Об одном методе выбора оптимальных параметров тонкостенной конструкции / И.Н. Гинзбург, С.Н. Кан // «Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969». – М. : Наука, 1970. – С. 271-273.

6. Почтман Ю. М. Применение метода случайного поиска при оптимальном проектировании цилиндрических оболочек / Ю.М. Почтман, Г.В. Филатов // Изд. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – №5. – С. 149-201.

7. Тетерс Г. А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов / Г.А. Тетерс, Р.Б. Рикардс, В.Л. Нарусберг. – Рига : Зинатне, 1978. – 239 с.

8. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования / Д.Б. Юдин. – М. : Сов. Радио, 1979. – 392 с.

REFERENCES

1. Liu, B. (1999), “Uncertain Programming”, Wiley, New York, USA.

2. Borisov, V.V., Fedulov, A.S. and Zernov, M.M. (2014), *Osnovi nechetkoy matematiki* [Fuzzy mathematic bases], vol. 1: Teoriya nechetkikh mnozhestv, Telekom, Moskow, Russia.

3. Borisov, V.V., Fedulov, A.S. and Zernov, M.M. (2014), *Osnovi nechetkoy matematiki* [Fuzzy mathematic bases], vol. 2: Teoriya nechetkikh mnozhestv, Telekom, Moskow, Russia.

4. Dyubua, A. and Prad, A. (1990), *Teoriya veroyatnostey: Prilozhenie k predstavleniyu znaniy v invormatike* [Probability theory. Knowledge application for representation in computer science], Radio i svyaz, Moskow, Russia.

5. Ginzburg, S.N. and Kan S.N. (1970), “About one of the method to choose optimal parameters of thin walled structure”, *Trudy VI Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin. Dnepropetrovsk, 1969* [Conference proceedings of the 6 th soviet union conference of shells and plats], pp. 271-273.

6. Pochtman, Yu.M. and Filatov, G.V. (1971), “Random search method application to the optimal design of cylindrical shells”, *Mekhanika tverdogo tela*, vol. 5, pp. 149-201.

7. Teters, G.A., Rikards, R.B. and Narusberg, V.L. (1978), *Optimizatsiya obolochek iz sloistykh kompozitov* [Laminated composites shells optimization], Zinatne, Riga, Latviya.

8. Yudin, D.B. (1979), *Zadachi i metody stakhasticheskogo programmirovaniya* [Objectives and methods of stochastic programming], Sov. Radio, Moskow, Russia.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА СКОРОСТНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Воробьев Ю. С., д. т. н., профессор, Овчарова Н. Ю., ведущий инженер

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ,
ул. Дм. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина

vorobiev@ipmash.kharkov.ua

Рассматривается скоростное деформирование элементов современных конструкций под действием локальных ударных нагрузок. Трехмерные модели учитывают конечные динамические упругопластические деформации и динамические свойства материала. Задача решается вариантом метода конечных элементов, который учитывает специфику рассматриваемого процесса. Проведен численный анализ динамического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций под действием ударных нагрузок с учетом различных динамических свойств материалов.

Ключевые слова: скоростное деформирование, ударные нагрузки, динамические свойства материалов, МКЭ, упруго-пластические деформации.

ВПЛИВ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ НА ШВИДКІСНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Воробйов Ю. С., д. т. н., професор, Овчарова Н. Ю., провідний інженер

Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України, вул. Дм. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна,

vorobiev@ipmach.kharkov.ua,

Розглядається швидкісне деформування елементів сучасних конструкцій під дією локальних ударних навантажень. Тривимірні моделі враховують кінцеві динамічні пружно-пластичні деформації та динамічні властивості матеріалу. Завдання вирішується варіантом методу скінченних елементів, який враховує специфіку даного процесу. Проведено чисельний аналіз динамічного напружено-деформованого стану елементів конструкцій під дією ударних навантажень з урахуванням різних динамічних властивостей матеріалів.
Ключові слова: швидкісне деформування, ударні навантаження, динамічні властивості матеріалів, МСЕ, пружно-пластичні деформації.

INFLUENCE OF THE DYNAMIC PROPERTIES OF THE MATERIAL ON THE HIGH-RATE DEFORMATION OF STRUCTURAL ELEMENTS

Vorobiev Iu. S., D. of Technical Science, Professor, Ovcharova N. Iu., Principal Engineer

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, Ukraine,

vorobiev@ipmach.kharkov.ua, spe@machproekt.nikolaev.ua

Analysis of the dynamic stress-strain state of a number of modern structures, such as input and output devices, cases of gas turbine engines, safety boxes, process chambers, lining elements of vehicles, personal protective elements of energy systems, aerospace, transport and military equipment, under the influence of local shock and impulse loads is an actual and complex problem [1-6]. Identification of danger zones localization of stresses in impact places allows to find ways to reduce their level and increase the dynamic stability of elements of critical structures. This requires the construction of refined mathematical models. Together with intense impact loads, three dimensional dynamic stress-strain state develops in the elastic-plastic stage. Strength properties of most materials change depending on the value and rate of deformation. Therefore three-dimensional models with the dynamic properties of the material, which are determined on the basis of experimental studies are used [1-7]. In different papers different approaches and methods of accounting of the dynamic properties of materials are used. Influence of dynamic properties of materials in the process of high-rate deformation of structural elements is an actual and vital problem. If the equation of state reflects the elastic-plastic character of deformation and dynamic properties of the material, then the problem is physically nonlinear. Under intense loads finite displacement and deformation arises resulting in geometrical nonlinearity of problems.
A mathematical model for the analysis of the problem must take into account the heterogeneity of the material's structural elements as originally given as well as arisen during high-rate deformation. Therefore, all the material characteristics are variable in the spatial coordinates and time.
The problem is solved using the finite element method, which takes into account the specifics of the process. Boundary conditions in the element nodes must satisfy the equality movement as well as derivatives. The formed function allows to describe continuous and smooth stress changes. The numerical analysis of the dynamic stress-strain state of structural elements under impact loads, takes into account different dynamic properties of the materials. A series of numerical calculations allows to reveal the features of high-rate deformation elements of protective structures and makes recommendations to improve their dynamic strength under different loading conditions.
Key words: high-rate deformation, impact loads, dynamic material properties, FEM, elastic-plastic deformations.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Анализ динамического напряженно-деформируемого состояния ряда современных конструкций под действием локальных ударных и импульсных нагрузок является актуальной и сложной проблемой [1-6]. К таким конструкциям относятся входные, выходные устройства и корпуса ГТД, защитные боксы, технологические камеры, элементы облицовки транспортных средств, индивидуальные средства защиты элементы энергетических систем, авиационной, космической, транспортной и военной техники. Выявление зон опасной локализации напряжений в местах удара позволяет найти пути снижения их уровня и повышения динамической прочности элементов ответственных конструкций. Для этого необходимо построение уточненных математических моделей. При интенсивных ударных нагрузках возникает трехмерное динамическое напряженно-деформированное состояние, которое развивается в упруго-пластической стадии. Прочностные свойства большинства материалов изменяются в зависимости от величины и скорости деформации. Поэтому используются трехмерные модели с учетом динамических свойств материала, которые определяются на основе экспериментальных исследований [7-10]. В различных работах используется различные подходы и способы учета динамических свойств материалов. Учет влияния динамических свойств материалов на процесс скоростного деформирования элементов конструкций является актуальной задачей. Если уравнения состояния отражают упрогопластический характер деформирования и динамические свойства материала, то задача является физически нелинейной. При интенсивных нагрузках возникают конечные перемещения и деформации, что приводит к геометрической нелинейности задачи.

Математическая модель для анализа данной проблемы должна учитывать неоднородность материала элементов конструкций как изначально заданную так и возникшую в процессе скоростного деформирования. Поэтому все характеристики материала являются переменными по пространственным координатам и во времени. В методе конечных элементов задача решается в перемещениях. Уравнения динамики для трехмерного неоднородного элемента обычно представлены в напряжениях [9, 10]. Поэтому они должны быть дополнены зависимостями напряжений от деформаций и деформаций от перемещений. Зависимости напряжений от деформаций определяются на основе динамического варианта теории пластических деформаций.

Уравнение динамики для трехмерного неоднородного элемента конструкции в системе координат x y z имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_x, σ_y, σ_z – компоненты нормальных напряжений; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – компоненты касательных напряжений; u, v, w – компоненты перемещений; ρ – плотность материала; X, Y, Z – проекции массовых сил

Компоненты напряжений в уравнениях (1) определяются в зависимости от стадии деформирования

$$\begin{gathered}
\sigma_x-\sigma_0=\frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_x-\frac{1}{3}\varepsilon_0\right) \quad \tau_{xy}=\frac{1}{2\psi}\gamma_{xy},\\
\sigma_y-\sigma_0=\frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_y-\frac{1}{3}\varepsilon_0\right) \quad \tau_{yz}=\frac{1}{2\psi}\gamma_{yz},\\
\sigma_z-\sigma_0=\frac{1}{\psi}\left(\varepsilon_z-\frac{1}{3}\varepsilon_0\right) \quad \tau_{xz}=\frac{1}{2\psi}\gamma_{xz},\\
\sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right),\\
\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,
\end{gathered} \tag{2}$$

где ε_x, ε_y, ε_z – компоненты нормальных деформаций; γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} – компоненты касательных деформаций.

В случае упругих деформаций $\psi = \dfrac{1}{2\mu}$ и зависимости (2) переходят в закон Гука. В случае пластических скоростных деформаций $\psi = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$.

Динамическое упрочнение материалов отражает зависимости интенсивностей напряжений от интенсивностей деформаций и скоростей деформаций $\sigma_i = \sigma_i\left(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i\right)$ [7, 9]. Эта зависимость представлена в общем виде графически на рис. 1. Хорошо видно влияние деформации $\dot{\varepsilon}$ на динамический предел упругости.

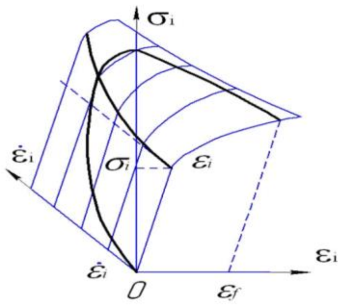


Рис. 1. Графическое представление зависимости $\sigma_i = \sigma_i\left(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i\right)$

На рис. 2 представлены некоторые зависимости относительного динамического предела упругости σ_{sd}/σ_s для ряда конструкционных материалов, полученные на основе экспериментальных данных [7]. На рис. 2 кривые соответствуют конструкционным материалам: 1 – сталь ЭИ 878 (Х15Н8А18), 2 – сталь Х18Н10Т, 3 – сплав ОТ41, 4 – сталь ЭП410 (Х15Н5Д2Т), 5 – сплав АМг2М.

Видно что наибольшее влияние скорость деформации оказывает на стальные сплавы и меньшее на алюминиевые.

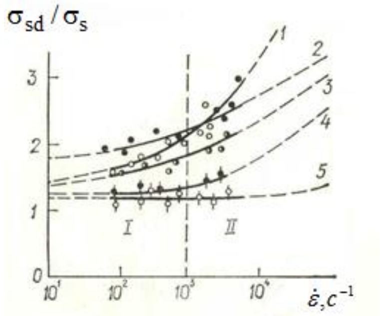


Рис. 2. Экспериментальные зависимости динамического предела упругости от скорости деформации

В области I эксперименты проводились в диапазоне скоростей $8 \cdot 10^1$-$6 \cdot 10^2$ с$^{-1}$, а в области II в пределах $1{,}3 \cdot 10^2$-$3{,}5 \cdot 10^3$ с$^{-1}$. Установлено что выражение $\sigma_{sd}/\sigma_s = \left[1 - \left(\dfrac{\dot{\varepsilon}}{D}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$ достаточно точно описывает зависимость динамического предела упругости от скорости деформации. Значение коэффициентов D, n для различных материалов приведены в работе [7]. В общем случае деформационное и скоростное упрочнение материала может быть описано в виде $\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^m \left[1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{D}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$. Однако могут быть использованы и другие зависимости [1-5].

Зависимости для конечных деформаций и перемещений имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right), \qquad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

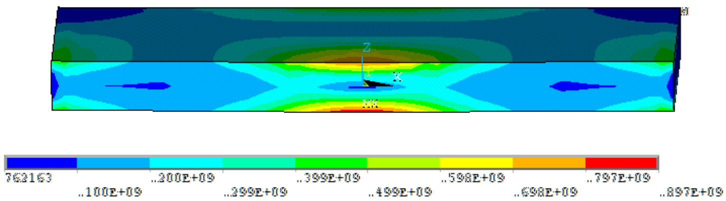
Аналогичные зависимости могут быть получены в цилиндрической системе координат.

Задача решается вариантом метода конечных элементов, который учитывает специфику рассматриваемого процесса. Важным требованием к выбору типа конечных элементов является учет всех указанных факторов. Граничные условия в узлах элементов должны удовлетворять равенству как перемещений, так и производных. Функции форм при этом позволяют описывать непрерывное и гладкое изменение напряжений.

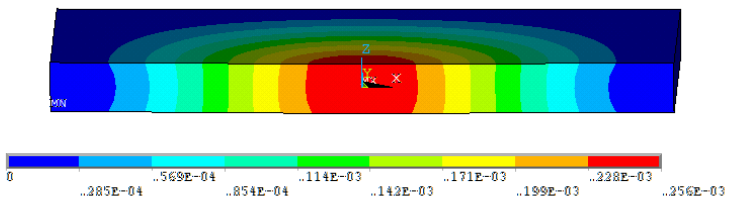
АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численный анализ на основе метода конечных элементов позволяет определять распределение, величины и изменение во времени динамических перемещений, деформаций и напряжений при различных видах нагрузки [8-10]. Однако результаты численных расчетов существенно зависят от способа учета динамических свойств материала. Для сравнения рассматривается воздействие на прямоугольный элемент стальной конструкции толщиной $h = 8$ мм ударника массой $m = 0{,}1$ кг со скоростью 200 м/с при различных способах учета динамических свойств материала.

Попытка решать задачу в упругой постановке при увеличении интенсивности нагрузки приводит, как и следовало ожидать к завышению максимальных напряжений (до 800 МПа) при заниженной оценки перемещений (рис. 3).



а)



б)

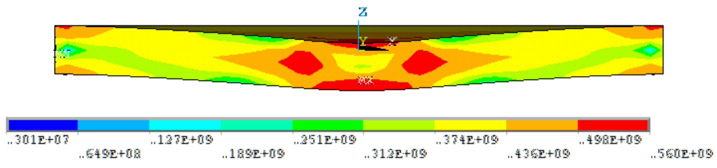
Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений а) и перемещений б) при воздействии ударника с учетом только упругих свойств материала

Используем учет динамических материала с помощью зависимости Пэжины [5]

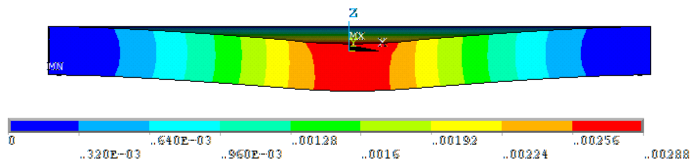
$$\sigma_i = \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{pl}}{\gamma}\right)^m\right] E\varepsilon_i, \tag{4}$$

где E – модуль упругости; m и r – коэффициенты чувствительности к скорости деформации; $\dot{\varepsilon}_i^{pl}$ – скорость деформации в пластической стадии.

При этом наблюдается снижение наибольших эквивалентных напряжений (500 МПа) и увеличение перемещений, кроме того меняется характер распределения эквивалентных напряжений (рис. 4).



а)



б)

Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений а) и перемещений б) при воздействии ударника с учетом динамических свойств материала согласно зависимости (4)

Данная модель может быть уточнена за счет учета конечных деформаций и увеличения числа степеней свободы в узлах. В этом случае величина максимальных эквивалентных напряжений еще более снижается (350 МПа), а величина перемещений увеличивается (рис. 5).

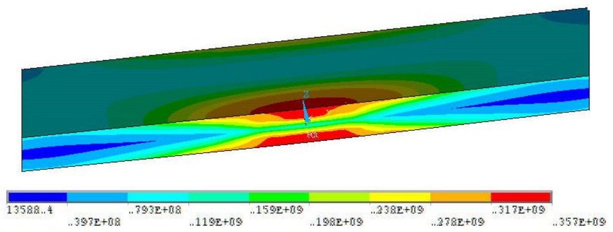


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений при воздействии ударника с учетом динамических свойств материала согласно зависимости (4)

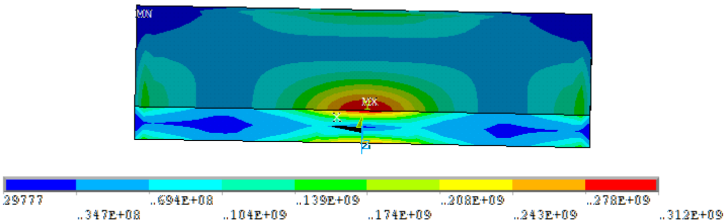
Динамические свойства материала могут быть учтены в несколько иной форме с помощью зависимости Пирса [4].

$$\sigma_i = \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{pl}}{\gamma}\right)\right]^m E\varepsilon_i\,. \tag{5}$$

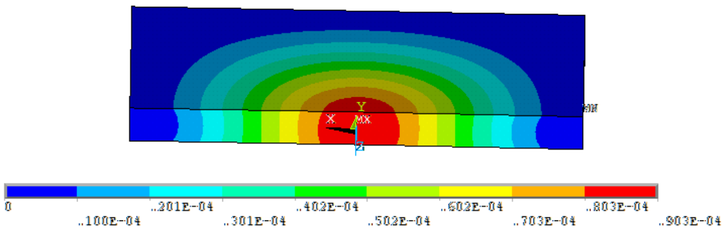
В этом случае также учитываются конечные перемещения и большое число степеней свободы в узлах (рис. 6).

При разгрузке наблюдается резкое снижение уровня напряжений и перераспределение динамического напряженно-деформированного состояния (рис. 7).

Видно, что по мере уточнения упругопластических и динамических свойств материала, а также конечных деформаций всё более проявляется нелинейный характер деформирования с увеличением перемещений и деформаций при более низких значениях напряжений.



а)



б)

Рис. 6. Распределение эквивалентных напряжений а) и перемещений б) при воздействии ударника с учетом динамических свойств материала согласно зависимости (5)

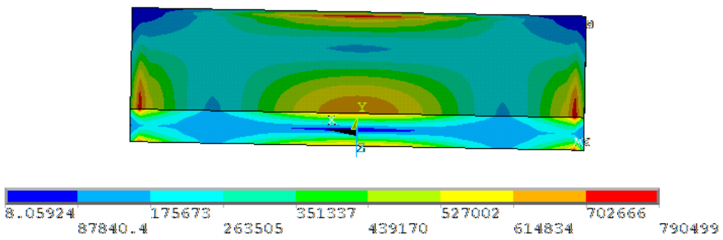


Рис. 7. Распределение эквивалентных напряжений при разгрузке с учетом динамических свойств материала согласно зависимости (5)

Представляет интерес исследования напряженно-деформированного состояния элементов легких конструкций, которые должны обладать необходимой динамической прочностью при заданной толщине и весе. Для сравнения рассматриваются элементы из различных материалов: стали, алюминиевого сплава, композита (рис. 8-10).

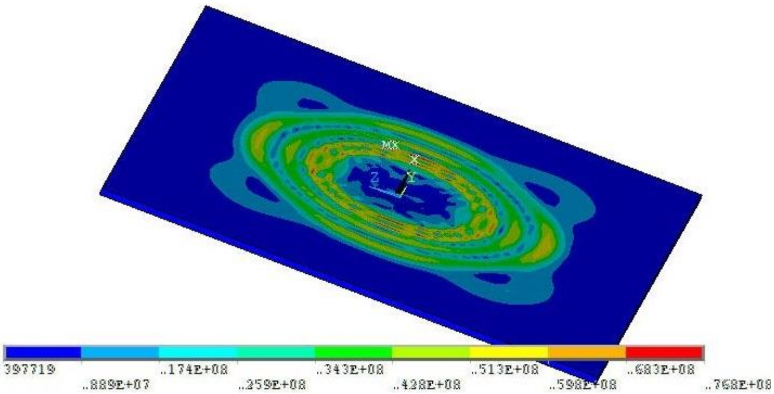


Рис. 8. Максимальные эквивалентные напряжения в плоском стальном элементе при воздействии ударника со скоростью 200 м/с

Так на рис 8 приводятся максимальные эквивалентные напряжения в плоском стальном элементе при воздействии ударника массой 200 г и скоростью 200 м/с Стальной элемент имеет плотность $\rho = 7800$ кг/м³, модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, модуль упрочнения $E_1 = 7,39 \cdot 10^8$ Па. На рис. 9 показаны распределения максимальных эквивалентных напряжений в плоском элементе из алюминиевого сплава при воздействии ударника массой 200 г и скоростью 200 м/с. Элемент из алюминиевого сплава имеет плотность $\rho = 2700$ кг/м³, модуль упругости $E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$, модуль упрочнения $E_1 = 7,24 \cdot 10^7$ Па.

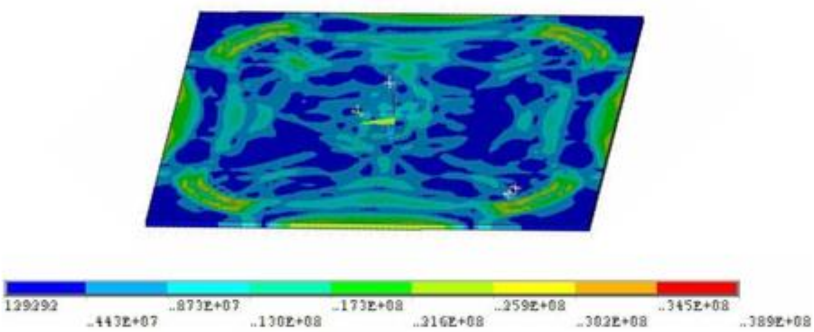


Рис. 9. Максимальные эквивалентные напряжения в плоском элементе из алюминиевого сплава при воздействии ударника со скоростью 200 м/с

На рис. 10 показаны максимальные эквивалентные напряжения в композитном элементе. Свойства материала: плотность $\rho = 2400$ кг/м³, модуль упругости $E = 5,4 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$, модуль упрочнения $E_1 = 7,99 \cdot 10^8$ Па.

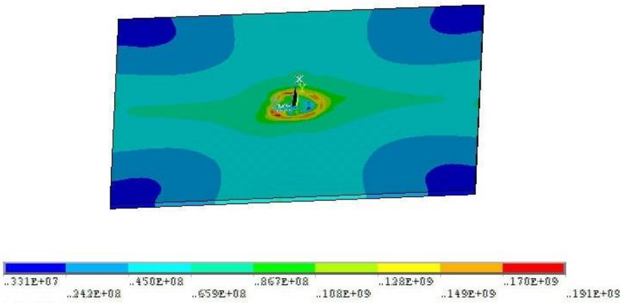


Рис. 10. Максимальные эквивалентные напряжения в плоском композитном элементе при воздействии ударника со скоростью 200 м/с

Сопоставление результатов исследований показывает, что необходимой прочностью и наименьшим весом обладают элементы из улучшенного композитного материала.

На основе уточненных зависимостей свойств материала определялось изменение динамического напряженно-деформированного состояния в трубе газопровода при увеличении локальной ударной нагрузки суммарным импульсом I_1. Радиус трубы 0,5 м, толщина 0,01 м, длина 5,5 м. На рис. 11 приведены сравнения численных (кривые) и экспериментальных (точки) результатов для осевых (кривая 1) и окружных (кривая 2) напряжений [7]. Видно влияние пластических и динамических свойств материала и нелинейный характер деформирования по мере увеличения нагрузки. Пунктирная линия показывает ограничения упругой постановки задачи.

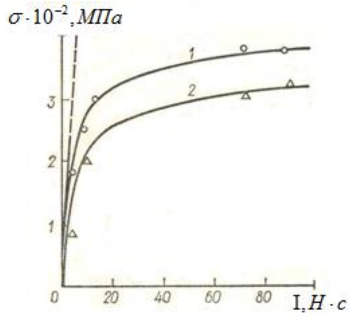


Рис. 11. Изменение осевых (1) и окружных (2) напряжений в трубе при увеличении ударной нагрузки

ВЫВОДЫ

Динамические свойства материала оказывают существенное влияние на развитие процесса скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при интенсивных ударных нагрузках. Решение задачи в упругой постановке возможно лишь при малых скоростях и низком уровне нагрузки, когда $\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{D}\right)^{1/n} \ll 1$. При разгрузке наблюдается различие в характере напряженно-деформированных состояний, так процесс разгрузки начинается в различных стадиях напряженно-деформированного состояния.

При выборе достаточно адекватных упругопластических и динамических характеристик материала можно достичь достоверных результатов что позволяет правильно оценить допустимые ударные нагрузки или динамическую прочность элементов конструкций. Следует стремиться к сопоставлению результатов, полученных при использовании различных способов учета динамических свойств материала. Это позволяет повысить достоверность численных расчетов. В любом случае многовариантные численные исследования позволяют выявить характер упругопластического скоростного деформирования элементов конструкций и обеспечить их динамическую прочность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson G. R. A constitutive model and data for metals subjected to large strains high strain rates and high temperatures / G. R. Johnson, W. H. Cook / The 7th International Symposium on Ballistics. Hague. Netherlands. – 1983.
2. Kruczka L. New application of the Hopkinson pressure bar technique to determining dynamic behavior of materials / L. Kruczka, W.K. Novacki // Mechanica Teoretychna i Stosovna. – V. 2. – №34. – 1996. – P. 259-280.
3. Meyers M. A. Dynamics behavior of materials / M.A. Meyers. – New York : Wiley, 1994. – 283 p.
4. Peirce D. A model for large deformations of elasto-viscoplastic solids at finite strains / D. Peirce and D.R.J. Owen // Computational issues, Finite Inelastic Deformations : Theory and applications, Springer-Verlag, Berlin. – 1992.
5. Пежина П. Основные вопросы вязкопластичности / П. Пежина. – М. : Мир, 1968. – 175 с.
6. Трощенко В. Т. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В.Т. Трощенко, А.А. Лебедев, В.А. Стрижало и др. – К. : Логос, 2000. – 571 с.
7. Воробьев Ю. С. Скоростное деформирование элементов конструкций / Ю.С. Воробьев, А.В. Колодяжный, В.И. Севрюков, Е.Г. Янютин. – К. : Наук. думка, 1989. – 192 с.
8. Vorobiov Y. Nonlinear deformations of structures cylindrical element under local shock / Y. Vorobiov, N. Ovcharova, L. Kruszka // Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2013, Sevastopol, Ukraine. – June 19-22, 2013 – P. 351-357.
9. Vorobiov Iu. S. Finite Element Analysis of Local Shock Loading on Structures Cylindrical Elements/ Iu.S. Vorobiov, L. Kruszka, N.Y. Ovcharova // Proceedings of The 8th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013), Osaka University, Japan. – 2013. – P. 499-504.
10. Воробьев Ю. С. Динамика элементов конструкций при ударных нагрузках / Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова // Вибрации в технике и технологиях. – Львов, 2014. – № 2(74). – С. 5-11.

REFERENCES

1. Johnson, G.R. and Cook, W.H. (1983), “A constitutive model and data for metals subjected to large strains high strain rates and high temperatures”, *The 7th International Symposium on Ballistics*, Hague, Netherlands.
2. Kruczka, L. and Novacki, W.K. (1996), “New application of the Hopkinson pressure bar technique to determining dynamic behavior of materials”, *Mechanica Teoretychna i Stosovna*, vol. 2, no. 34, pp. 259-280.
3. Meyers, M.A. (1994), “Dynamics behavior of materials”, Wiley, New York.
4. Peirce, D. and Owen, D.R.J. (1992), “A model for large deformations of elasto-viscoplastic solids at finite strains”, *Computational issues, Finite Inelastic Deformations: Theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin.
5. Pezhina, P. (1968), *Osnovnyye voprosy vyazkoplastichnosti* [Basic questions of viscoplasticity], Mir, Moskow.

6. Troshchenko, V.T., Lebedev, A.A., Strizhalo, V.A. i dr. (2000), *Mekhanicheskoye povedeniye materialov pri razlichnykh vidakh nagruzheniya* [Mechanical behavior of materials at the different types of ladening], Logos, Kiev.

7. Vorob'yev, YU.S., Kolodyazhnyy, A.V., Sevryukov, V.I. and Yanyutin, Ye.G. (1989), *Skorostnoye deformirovaniye elementov konstruktsiy* [Speed deformation of elements of constructions], Nauk. dumka, Kiev.

8. Vorobiov, Y., Ovcharova, N. and Kruszka, L. (2013), "Nonlinear deformations of structures cylindrical element under local shock", *Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2013*, pp. 351-357.

9. Vorobiov, Iu.S., Kruszka, L. and Ovcharova, N.Y. (2013), "Finite Element Analysis of Local Shock Loading on Structures Cylindrical Elements", *Proceedings of The 8th International Symposium on Impact Engineering (ISIE2013)*, pp. 499-504.

10. Vorob'yev, YU.S. and Ovcharova, N.YU. (2014), "Dinamika elementov konstruktsiy pri udarnykh nagruzkakh", *Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh*, no. 2(74), pp. 5-11.

УДК 539.3:629.7

ДИНАМИКА КОМПРЕССОРНОГО ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

[1]Воробьев Ю. С., [1]Овчарова Н. Ю., [1]Кулаков П. Н., [2]Кулишов С. Б., [2]Скрицкий А. Н.

[1]Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Дм. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина

[2]ГП НПКГ «Зоря»–«Машпроект», просп. Октябрьский, 42-а, Николаев, 54018, Украина

vorobiev@ipmach.kharkov.ua, spe@machproekt.nikolaev.ua

Рассматриваются колебания лопаток рабочих колес компрессора ГТД в газодинамическом потоке на основе трехмерных конечно-элементных моделей. Проводится расчет параметров газодинамического потока в проточной части компрессора. Выделяются системы отдельных ступеней, для которых проводится уточненный расчет. На основе результатов расчета газодинамических возмущающих сил анализируются поля динамических перемещений и напряжений на поверхности лопаток и возбудимость различных форм колебаний. Выявляются опасные режимы работы рабочих лопаток компрессора.

Ключевые слова: компрессорные лопатки, газодинамический поток, трехмерные модели, возмущающие нагрузки, МКЭ, вибрационные напряжения.

ДИНАМІКА КОМПРЕСОРНОГО ЛОПАТОЧНОГО АПАРАТУ В ГАЗОДИНАМІЧНОМУ ПОТОЦІ

[1]Воробйов Ю. С., [1]Овчарова Н. Ю., [1]Кулаков П. М., [2]Кулішов С. Б., [2]Скрицький А. Н.

[1]Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України, вул. Дм. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

[2]ДП НВКГ «Зоря»–«Машпроект», просп. Жовтневий, 42-а, Миколаїв, 54018, Україна

vorobiev@ipmach.kharkov.ua, spe@machproekt.nikolaev.ua

Розглядаються коливання лопаток робочих коліс компресора ГТД у газодинамічному потоці на основі тривимірних скінчено-елементних моделей. Проводиться розрахунок параметрів газодинамічного потоку в проточній частині компресора. Виділяються системи окремих ступенів, для яких проводиться уточнений

розрахунок. На основі результатів розрахунку газодинамічних збуджуючих сил аналізуються поля динамічних переміщень і напружень на поверхні лопаток і збудливість різних форм коливань. Виявляються небезпечні режими роботи робочих лопаток компресора.
Ключові слова: компресорні лопатки, газодинамічний потік, тривимірні моделі, збуджуючі навантаження, МСЕ, вібраційні напруги.

DYNAMICS BLADING (ROTOR BLADE) OF COMPRESSOR IN A GASDYNAMIC FLOW

[1]Vorobiev Iu. S., [1]Ovcharova N. Iu., [1]Kulakov P. N., [2]Kulishov S. B., [2]Skrytskyi A. N.

[1]*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, Ukraine*

[2]*Gas Turbine Research & Production Complex «Zorya»–«Mashproekt», Mykolaiv, Ukraine*

vorobiev@ipmach.kharkov.ua, spe@machproekt.nikolaev.ua

Increasing power density and efficiency of the gas turbines is accompanied by increased intensity of transient loads on their blading. Providing of the dynamic strength of blading compressor GTE in an unsteady flow is a complex and challenging problem.

The main reason of the excitation of vibrations of the blading of compressor is circumferential non-uniformity of the flow. Flow is also nonuniform in the radial direction. The frequencies of perturbing harmonics are multiples of the rotation speed of the rotor and the number of perturbation sources by the circumference in the gas flow: the number of the guide vanes and struts in the flow part. Also, if you change the speed of rotation on the transient regimes there are number resonances.

Under the influence of centrifugal force the rotor blades receive significant deformation, in particular, reduction torsion of vanes. Relatively of static deformations the vibrations of the compressor blades occur under the influence of unsteady forces the gas stream. To determine the frequencies of the disturbing harmonics on the resonant regimes of oscillation is required modal analysis of rotor blades and the construction of the resonance diagram.

In this paper the flow part of the compressor are considered, in which there are 4 working stage, 5 guide stage and the rack. The system has no circumferential or rotational symmetry. The three-dimensional finite element models of the blading in conjunction with three-dimensional flow model were building. Working blades are deemed deformable and elastic, guide vanes and racks are undeformable. The three-dimensional finite element model of the flow on the basis of Navier-Stokes equations taking into account turbulence and dissipation allows to calculate the velocity and pressure in the flow part of the compressor. The complexity of the general problem leads to the need to consider a number of particular problems in a refined formulation for systems of each compressor stage in the flow. These systems include working blades and the guide vanes at the input and output of each stage. Of the calculation results are determined the velocity field and the pressure of each stage. The variable components of gas dynamic loads are allocated. This allows to calculate the forced oscillations under the influence of harmonic components of disturbing loads for all frequencies on the working and transient conditions. As a result, fields of dynamic displacements and equivalent stresses on the surface of rotor blades at their oscillations in the flow are defined. In previous work, the authors examined the oscillations of the blades of the first stage. In this paper, the oscillations working blades of the second stage are studied , where the expected significant dynamic stresses. Fields dynamic stresses can detect localization of maximum stress for all dangerous regimes that used to estimate the strength of the vibration of the compressor blading.
Key words: compressor blades, gas-dynamic flow, three-dimensional models, load disturbance, FEM, vibration stress.

ВВЕДЕНИЕ

Уровень развития газовых турбин влияет на состояние авиации, транспорта, военной техники и энергетики. Повышение удельной мощности и экономичности газовых турбин сопровождается ростом интенсивности нестационарных нагрузок на их элементы и, в первую очередь, на лопаточный аппарат. В частности, на лопаточный аппарат компрессоров ГТД действуют силы нестационарного газового потока, центробежные силы и температурное поле. Лопатки осевых компрессоров ГТД являются более тонкими и гибкими, чем лопатки турбин, и воздействие нестационарного потока на них сказывается сильнее.

Обеспечение динамической прочности лопаточного аппарата компрессоров ГТД в нестационарном потоке является сложной и актуальной проблемой. Решению различных аспектов этой проблемы посвящен ряд работ [1-7], в которых рассматриваются особенности нестационарного газодинамического потока в турбинах и компрессорах, взаимодействие лопаток с потоком, возбуждение различных форм колебаний, возникновение явлений аэроупругости и другие вопросы. Это направление исследований быстро развивается, и в процессе исследований появляются новые задачи. Одним из актуальных вопросов является определение распределений вибрационных напряжений под действием гармоник возмущающих газодинамических сил.

Определение газодинамических сил и их взаимодействия с колеблющимися лопатками является сложной и неоднозначной вычислительной задачей. Основной причиной возбуждения колебаний лопаточного аппарата компрессора является окружная неравномерность потока [5-7]. Поток также является неоднородным в радиальном направлении. Частоты возмущающих гармоник кратны скорости вращения ротора и числу источников возмущения по окружности в газовом потоке: числу направляющих лопаток и стоек в проточной части. Кроме того, при изменении скорости вращения на переходных режимах возникает ряд резонансов.

Под действием центробежных сил рабочие лопатки получают значительную деформацию, в частности, уменьшение закрутки лопаток [8]. Относительно статических деформаций происходят колебания лопаток компрессора под действием нестационарных сил газового потока. Для определения частот возмущающих гармоник на резонансных режимах необходим модальный анализ колебаний рабочих лопаток и построение резонансной диаграммы [5, 9].

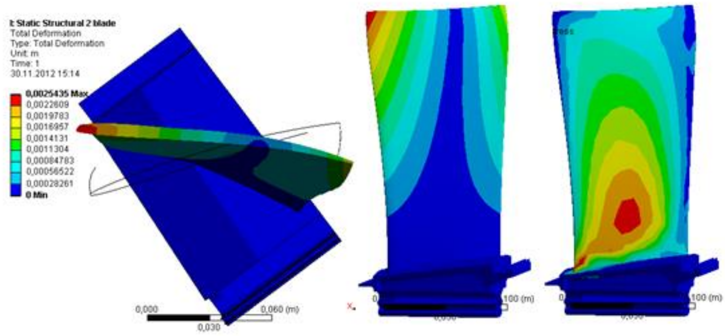
В работе рассматривается проточная часть компрессора, в которой расположены 4 рабочие ступени, 5 направляющих ступеней и стойки. Система не имеет окружной или поворотной симметрии. Построены трехмерные конечно-элементные модели лопаточного аппарата совместно с трехмерной моделью потока. Рабочие лопатки считаются деформируемыми и упругими, направляющие лопатки и стойки являются недеформируемыми. Трехмерная конечно-элементная модель потока на основе уравнений Навье-Стокса с учетом турбулентности и диссипации позволяет провести расчет скоростей и давлений в проточной части компрессора. Сложность общей задачи приводит к необходимости рассмотреть ряд частных задач в уточненной постановке. Выделяются уточненные модели систем каждой ступени компрессора в потоке. Эти системы включают рабочие лопатки и направляющий аппарат на входе и выходе каждой ступени. Для системы первой ступени учитываются также стойки. Это позволяет упростить задачу на первом этапе анализа. В результате расчетов определяются поля скоростей и давлений в системе каждой ступени. Выделяются переменные составляющие газодинамических нагрузок. Это позволяет провести расчет вынужденных колебаний под действием гармонических составляющих возмущающих нагрузок для всех частот на рабочих и переходных режимах. В результате определяются поля динамических перемещений и эквивалентных напряжений на поверхности рабочих лопаток при их колебаниях в потоке. В предыдущих работах авторов рассмотрены колебания лопаток первой ступени. В данной работе исследуются колебания рабочих лопаток второй ступени, где ожидаются значительные динамические напряжения. Поля перемещений дают возможность сопоставить их с формами колебаний и оценить возбудимость различных форм колебаний в потоке. Поля динамических напряжений позволяют выявить места локализации максимальных напряжений для всех опасных режимов, что используется для оценки вибрационной прочности лопаточного аппарата компрессора. Данные о частотах и амплитудах возмущающих нагрузок и соответствующих величинах и местах расположения максимальных напряжений обеспечивают возможность дать рекомендации по их снижению.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассматривается четырехступенчатый компрессор газовой турбины с венцами рабочих и направляющих лопаток и стойками [5, 6].

Скорость вращения лопаток компрессора равна 837 рад/с. Под действием центробежных сил происходит деформация лопаток, в частности, их раскрутка.

На рис. 1 представлены статические перемещения лопатки рабочего колеса второй ступени. Чтобы наглядно показать раскрутку лопатки, представлен вид сверху с контуром недеформированной лопатки рис. 1а. На рис. 1в представлено распределение интенсивностей напряжений. Наибольшие напряжения не превышают значений 500 МПа, то есть деформации происходят в упругой области.



а) б) в)

Рис. 1. Поля перемещений – б) и интенсивностей напряжений – в) в лопатке II ступени компрессора: а) вид сверху

Анализировались колебания лопаток четырех ступеней компрессора при отсутствии вращения ротора и в поле центробежных сил. Колебания в последнем случае происходят вокруг деформированного положения лопаток.

Сложность задачи приводит к необходимости рассмотреть системы каждой из ступеней компрессора раздельно. Однако исходные данные основных параметров потока приведены для входного сечения перед стойками и на выходе из четвертой ступени компрессора за направляющими лопатками. В результате возникает необходимость предварительного расчета потока в проточной части всего компрессора. На основе моделей отдельных элементов формируется модель проточной части (рис. 2.).

Рис. 2. Модель проточной части компрессора

При моделировании газодинамического потока, в проточной части компрессора, используется конечно-элементная модель, основанная на уравнениях Навье-Стокса с учетом турбулентности и диссипации потока (k-ε модель) [7]. Газодинамический расчет потока в проточной части проводится с целью определить поля скоростей и давлений в потоке, а также на поверхности рабочих лопаток.

На основании разработанных моделей и методик расчетов был проведен численный анализ параметров газодинамического потока в проточной части компрессора. Поле скоростей в радиальном сечении приведено на рис. 3.

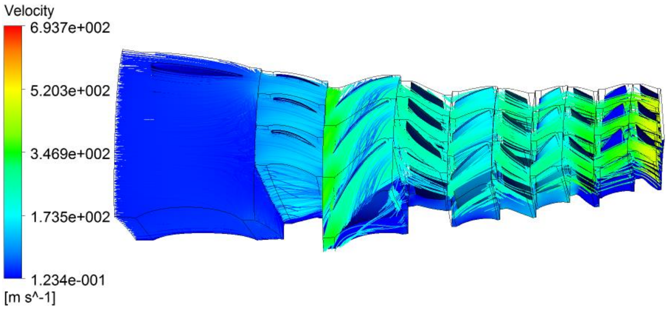


Рис. 3. Поле скоростей потока в радиальном сечении

Сама упругая система и поля скоростей не обладают окружной или поворотной симметрией. Поэтому выделения сектора или радиального сечения потока являются условными и приведены для наглядности.

Одновременно определяются поля давлений в радиальном сечении, которые представлены на рис. 4.

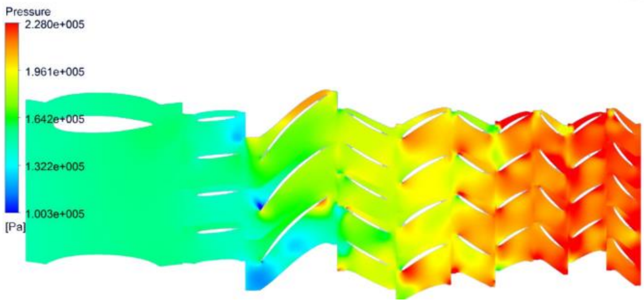


Рис. 4. Поле давлений в радиальном сечении компрессора

На основе этих данных проводится расчет полей скоростей и давлений в газодинамическом потоке в системах отдельных ступеней. Системы каждой ступени включают венцы рабочих лопаток и направляющих лопаток на входе и выходе. Система отдельной ступени является более простой чем вся проточная часть, что позволяет провести в каждой из них уточненный расчет с учетом отсутствия поворотной симметрии.

После предварительного анализа параметров газодинамического потока в компрессоре возникает возможность получить уточненные параметры потока в системе второй ступени.

Частоты возмущающих гармоник кратны скорости вращения ротора и числу источников возмущения по окружности в газовом потоке: числу направляющих лопаток и стоек в проточной части. Кроме того, при изменении скорости вращения возникает ряд резонансных режимов, которые могут быть выявлены с помощью диаграммы Кэмпбелла.

Для второй ступени на стационарных режимах возбуждение также вызывают гармоники nz, где n – частота вращения ротора, z – число источников возбуждения по окружности. Для второй ступени проводится анализ воздействия гармоник с частотой 125 Гц, соответствующей числу оборотов $n = 7500$, а также с частотой 3750 Гц, что соответствует гармонике nz, где $z = 30$ (числу направляющих лопаток второй ступени).

Согласно диаграмме Кэмпбелла для второй ступени (рис. 5) гармоники $k = 1$ и $k = 2$ не вызывают резонанса на переходных режимах.

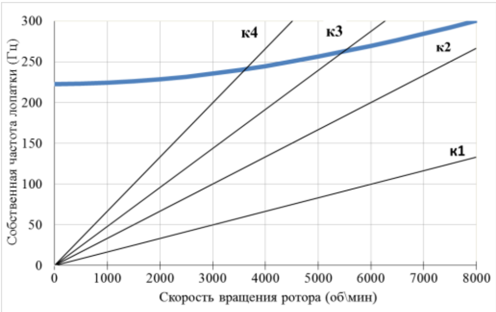


Рис. 5. Кэмпбелл-диаграмма для рабочего колеса второй ступени

Гармоника $k = 3$ вызывает резонанс с частотой 262,24 Гц, что соответствует 5448 об/мин, а гармоника $k = 4$ вызывает резонанс с частотой 241,84 Гц, что соответствует 3638 об/мин.

В узком диапазоне частот вокруг возмущающих гармоник строятся амплитудно-частотные характеристики лопаток, например, показанная на рис. 6.

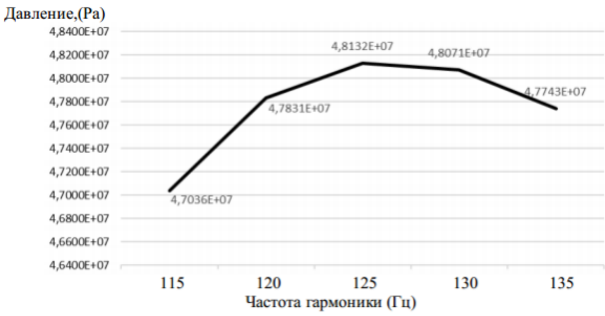


Рис. 6. Фрагмент амплитудно-частотной характеристики лопатки

Эти зависимости позволяют уточнить частоту возмущающей гармоники и ее амплитуду. Динамическая составляющая потока анализируется в данном узком диапазоне частот возмущающих гармоник.

Распределение скоростей в системе второй ступени представлено на рис. 7.

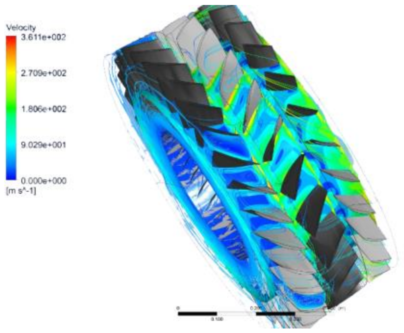


Рис. 7. Распределение скоростей в системе второй ступени

Распределения давлений в системе второй ступени представлены на рис. 8, 9. Видно, что в окружном направлении давления в потоке не обладают окружной симметрией.

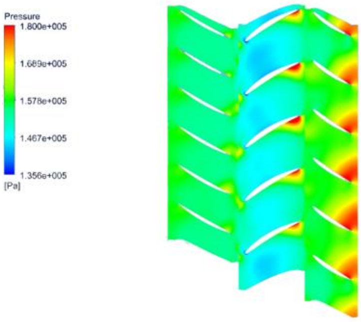


Рис. 8. Поле давлений в радиальном сечении второй ступени

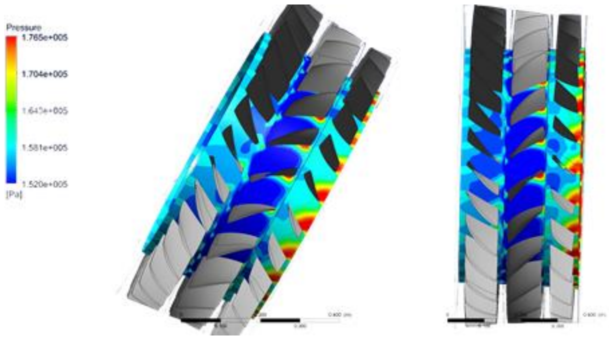


Рис. 9. Распределение давлений в системе второй ступени

Видно снижение давлений со стороны спинки рабочих лопаток и повышение давлений со стороны корыта, особенно у выходной кромки лопаток.

После анализа полей давлений выделяется нестационарная составляющая давлений в потоке. В результате получаем распределение амплитудных значений давлений на обоих сторонах лопатки.

В лопатках рабочего колеса второй ступени исследуется воздействие гармоник с частотами 125 Гц и 3750 Гц на стационарном режиме, а также 242 Гц и 262 Гц на переходном режиме. На последующих рисунках (рис. 10-13) приведены поля перемещений и эквивалентных напряжений при колебаниях лопаток рабочего колеса второй ступени на данных режимах.

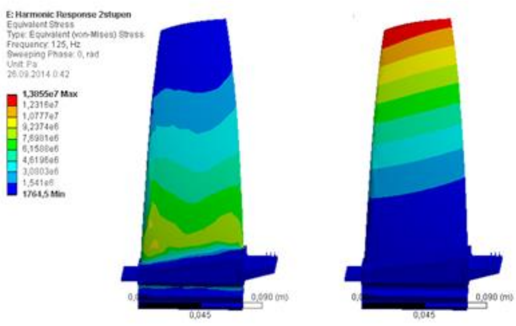


Рис. 10. Поля эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) при колебаниях лопатки второй ступени с частотой 125 Гц

При колебаниях с частотой 125 Гц эквивалентные напряжения не превышают 14 МПа и расположены вблизи корня, колебания происходят по форме, близкой к первой собственной. Вынужденные колебания с частотой 3750 Гц происходят по оболочечной форме, максимальные эквивалентные напряжения расположены на периферии лопатки и не превышают 4 МПа.

На переходных режимах колебания происходят по формам, близким к первой, а эквивалентные напряжения не превышают 50 МПа. Наиболее возбудимыми оказываются первая изгибная форма и оболочечная.

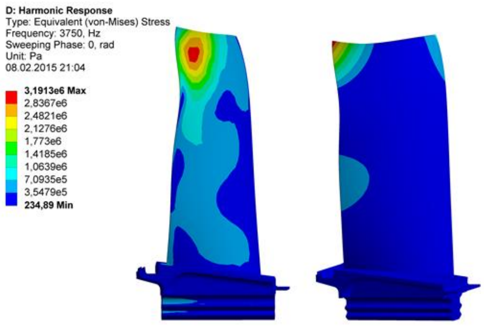


Рис. 11. Поля эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) при колебаниях лопатки второй ступени с частотой 3750 Гц

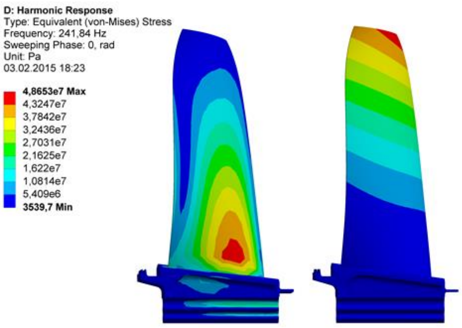


Рис. 12. Поля эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) при колебаниях лопатки второй ступени с частотой 242 Гц

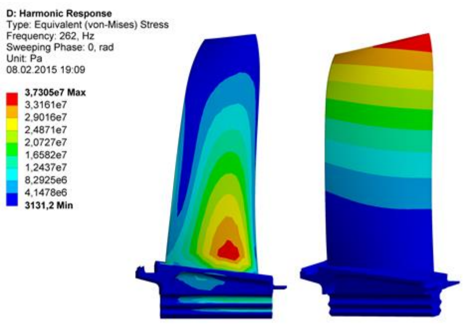


Рис. 13. Поля эквивалентных напряжений (а) и перемещений (б) при колебаниях лопатки второй ступени с частотой 262 Гц

ВЫВОДЫ

Разработана конечно-элементная модель упругой системы компрессора и связанная с ней модель потока на основании уравнений Новье-Стокса с учетом турбулентности и диссипации.

Проведен анализ статической деформации рабочих лопаток компрессора под действием центробежных сил. Проведен анализ собственных колебаний лопаток рабочего колеса второй ступени компрессора во всем диапазоне вращения ротора. Проведен анализ частот гармоник возмущающих сил на переходных и установившихся режимах.

Проведен расчет параметров потока во всей системе компрессора и получены поля скоростей и давлений. Выделена уточненная модель системы второй ступени, включающая входной направляющий аппарат, рабочие лопатки и направляющие лопатки за ними. Проведен уточненный расчет параметров потока в системе II ступени, и получены поля скоростей и давлений.

Проведен анализ возбудимости форм колебаний рабочих лопаток второй ступени.

Определены динамические напряжения в лопатках рабочего колеса второй ступени под действием наиболее опасных гармоник.

Выявлены наиболее опасные режимы работы второй ступени компрессора, наиболее опасные гармоники возмущающих сил и источники их возникновения; выявлены также возможные наибольшие динамические напряжения на переходных и установившихся режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр. – М. : Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. Карта Ф. О. Флаттерная неустойчивость системы лопатка – диск – бандаж в роторах турбореактивных двигателей / Ф.О. Карта // Энергетические машины. – 1967. – №3. – С. 129-135.
3. Материалы и прочность оборудования ТЭС : учеб. пособие /[В.М. Боровков, Л.Б. Гецов, Ю.С. Воробьев, А.Я. Копсов и др.]. – Санкт Петербург : Изд-во Спбгпу, 2008. – 612 с.
4. Rządkowski R. Unsteady Forces Acting on the Rotor Blades in the TurbineStage in 3D Viscous Flow in Nominal and Off-Design Regimes / R. Rządkowski, V. Gnesin, L. Kolodyazhnaya, L. Kubitz // Journal of Vibration Engineering, and Technologies. – 2014. – 2(2). – P. 89-95.
5. Шкловец А. О. Расчет вынужденных колебаний лопаток рабочего колеса авиационного газотурбинного двигателя, возникающих от действия окружной неоднородности газового потока / А.О. Шкловец, Г.М. Попов, Д.А. Колмокова // Авиационно-космическое машиностроение. Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т.14, №1(2). – С. 517-521.
6. Лугина Н. С. Влияние нестационарности газового потока на аэродинамические характеристики ступени осевого компрессора. Численное моделирование и эксперимент / [Н.С. Лугина, М.В. Кузьмин и др.] // Вестник двигателестроения. – Запорожье АО «Мотор Сич» – 2006. – №3. – С. 21-25.
7. Рублевский Е. Ю. Численное исследование двухступенчатого вентилятора / Е.Ю. Рублевский, Д.А. Плакущий, В.И. Письменный, Ю.А. Кваша // Вестник двигателестроения. – Запорожье АО «Мотор Сич» – 2013. – №2. – С. 169-176.

8. Воробьев Ю. С. Влияние центробежных сил на статику и динамику элементов ГТД / Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова, К.Д. Тыртышников // Восточно Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2013. – 3/12(63). – С. 47-49.
9. Воробьев Ю. С. Анализ колебаний лопаточного аппарата компрессора ГТД / Ю.С. Воробьев, В.Н. Романенко и др. // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – №10(107). – С. 55-59.
10. Воробьев Ю. С. Вынужденные колебания ступени компрессора ГТД в потоке / [Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова, П.Н. Кулаков, и др.] // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков : НАКУ «ХАИ», 2014. – 8(115). – С. 152-155.
11. Воробьев Ю. С. Моделирование колебаний лопаток компрессоров ГТД в нестационарном потоке / [Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова, П.Н. Кулаков и др.] // Вибрации в технике и технологиях. – Львов, 2014. – №3(75). – С. 50-56.

REFERENCE

1. Birger, I.A. and Shorr, B.F. (1981), *Dinamika aviatsionnykh gazoturbinnykh dvigateley* [Dynamics of aviation turbo-engines], Mashinostroyeniye, Moskow.
2. Karta, F.O. (1967), “Flatternaya neustoychivost' sistemy lopatka – disk – bandazh v rotorakh turboreaktivnykh dvigateley”, *Energeticheskiye mashiny*, no. 3, pp. 129-135.
3. Borovkov, V.M., Getsov, L.B., Vorob'yev, YU.S., Kopsov, A.YA., Petinov, S.V., Pigrova, G.D. and Rybnikov, A.I. (2008), *Materialy i prochnost' oborudovaniya TES* [Materials and durability of equipment of TES], Izd-vo Spbgpu, Sankt Peterburg.
4. Rządkowski, R., Gnesin, V., Kolodyazhnaya, L. and Kubitz, L. (2014), “Unsteady Forces Acting on the Rotor Blades in the TurbineStage in 3D Viscous Flow in Nominal and Off-Design Regimes”, *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 2(2), pp. 89-95.
5. Shklovets, A.O., Popov, G.M. and Kolmokova, D.A. (2012), “Raschet vynuzhdennykh kolebaniy lopatok rabochego kolesa aviatsionnogo gazoturbinnogo dvigatelya, voznikayushchikh ot deystviya okruzhnoy neodnorodnosti gazovogo potoka”, *Aviatsionno-kosmicheskoye mashinostroyeniye, Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra*, vol. 14, no. 1(2), pp. 517-521.
6. Lugina, N.S., Kuz'min, M.V. i dr. (2006), “Vliyaniye nestatsionarnosti gazovogo potoka na aerodinamicheskiye kharakteristiki stupeni osevogo kompressora. Chislennoye modelirovaniye i eksperiment”, *Vestnik dvigatelestroyeniya*, no. 3, pp. 21-25.
7. Rublevskiy, Ye.YU., Plakushchiy, D.A., Pis'mennyy, V.I. and Kvasha, YU.A. (2013), “Chislennoye issledovaniye dvukhstupenchatogo ventilyatora”, *Vestnik dvigatelestroyeniya*, no. 2, pp. 169-176.
8. Vorob'yev, YU.S., Ovcharova, N.YU. and Tyrtyshnikov, K.D. (2013), “Vliyaniye tsentrobezhnykh sil na statiku i dinamiku elementov GTD”, *Vostochno Yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*, 3/12(63), pp. 47-49.
9. Vorob'yev, YU.S,. Romanenko, V.N. i dr. (2013), “Analiz kolebaniy lopatochnogo apparata kompressora GTD”, *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, no. 10(107), pp. 55-59.
10. Vorob'yev, YU.S., Ovcharova, N.YU., Kulakov, P.N. i dr. (2014), “Vynuzhdennyye kolebaniya stupeni kompressora GTD v potoke”, *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, 8(115), pp. 152-155.
11. Vorob'yev, YU.S., Ovcharova, N.YU., Kulakov, P.N. i dr. (2014), “Modelirovaniye kolebaniy lopatok kompressorov GTD v nestatsionarnom potoke”, *Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh*, no. 3(75), pp. 50-56.

УДК 539.3

КОЛИВАННЯ СПОЛУЧЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ РІЗНИХ ФОРМ

Григоренко Я. М., академік НАНУ, гол. н. с., Беспалова О. І., д. ф.-м. н., п. н. с., Урусова Г. П., к. ф.-м. н., с. н. с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна

metod@inmech.kiev.ua

Проведено дослідження вільних коливань тонкостінних систем зі сполучених між собою співвісних оболонок обертання різних геометричних форм. Для розв'язання відповідних задач на власні значення розроблено чисельно-аналітичну методику, що включає відокремлення змінних за методом Фур'є, метод покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$ -метод) та метод ортогональної прогонки для розв'язання одновимірних задач. Тестування методики проведено індуктивно шляхом порівняння з результатами, що одержані іншими методами. На конкретних прикладах показано, що коливання системи оболонок, як єдиного об'єкта, мають якісні відмінності в порівнянні з коливаннями окремих її складових елементів.

Ключові слова: тонкостінні системи, оболонки обертання, власні частоти, класична теорія, чисельно-аналітична методика, особливості коливань.

КОЛЕБАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ РАЗНЫХ ФОРМ

Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Урусова Г. П.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

metod@inmech.kiev.ua

Проведено исследование свободных колебаний тонкостенных систем из сопряженных соосных оболочек вращения разных геометрических форм. Для решения соответствующих задач на собственные значения разработана численно-аналитическая методика, включающая разделение переменных по методу Фурье, метод пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ -метод) и метод ортогональной прогонки решения одномерных задач. Тестирование методики проведено индуктивно путем сравнения с результатами, полученными другими методами. На конкретных примерах показано, что колебания системы оболочек, как единого объекта, имеет качественные особенности по сравнению с колебаниями отдельных ее составляющих элементов.

Ключевые слова: тонкостенные системы, оболочки вращения, собственные частоты, классическая теория, численно-аналитическая методика, особенности колебаний.

VIBRATIONS OF COMPOUND SHELLS OF REVOLUTION WITH VARIOUS SHAPES

Grigorenko Ya. M., Bespalova E. I., Urusova G. P.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Nesterova str., 3, Kiev, 03057, Ukraine

metod@inmech.kiev.ua

Using the ideas of the classical Kirchhoff–Love theory, the free vibrations of thin-walled systems composed of joined coaxial shells of revolution of dissimilar geometrical shapes, including elements with either positive or negative gaussian curvature, are studied. Such shell systems model many structures of modern engineering such ones as rocket airframes and underwater vehicles, high-pressure balloons and adapting pipes, shielding covers of nuclear reactors, land storage tanks for petroleum derivatives, etc. The above shells may be made as one-layer across the thickness or be composed of arbitrary number of isotropic or orthotropic layers that operate without separation and sliding. The shell ends may be subject to the action of arbitrary physically consistent boundary conditions while the equilibrium conditions for static characteristics as well as the continuity conditions for kinematic characteristics of the shell stress-strain state are formulated at the conjugation lines of adjacent shells.

To solve an appropriate two-dimensional eigenvalue problem, a numerical analytical technique was developed applying the Fourier variable separation method, incremental search method ($\Delta(\lambda)$ -method), and the numerical orthogonal sweep method with solving Caushy's problems by the fifth-order Runge-Kutta scheme in Merson's modification. The technique was tested inductively by comparing with the known results obtained employing different approaches for certain particular cases of similar systems. Comparison of the values of the lower natural frequencies calculated by the technique proposed and some other methods (differential quadrature method, semi-analytical finite element method, series method with approximation by the first-order Chebyshev polynomials, analytical Fourier solution with the Stokes transform, finite element ANSYS software-based method, etc.) showed good agreement of the results: distinctions between frequency values practically do not exceed 1%.

Vibration futures of the above shell system, which is considered as a single whole, are analyzed, using as an example the conditional dependency $\omega = \omega(k)$ traditional for shells of revolution, in comparison with vibrations of its separate composing members. This dependence characterizes how the minimum natural frequency ω varies depending on the waveformation mode in the circumferential direction k. It is shown that vibrations of the shell systems as a single object reveal qualitatively dissimilar character in comparison with vibrations of its individual components. In particular, in the case of joined shells, we can observe some local minimums in the range of lower frequencies for the dependency $\omega = \omega(k)$. To foresee this feature of compound systems beforehand, practically is impossible.

Key words: thin-walled systems, shells of revolution, natural frequencies, classical theory, numerical analytical technique, vibration features.

ВСТУП

Предметом дослідження роботи є коливання тонкостінних систем, що складаються зі з'єднаних між собою співвісних оболонок обертання різних геометричних форм. Такими системами моделюється, зазвичай, багато конструкцій сучасної техніки, зокрема, корпуси ракет та апарати підводного занурення, балони високого тиску для зберігання нафти та газу, захисні покриття ядерних реакторів тощо.

Знання динамічних характеристик таких об'єктів дає змогу відстежувати резонансні режими їх роботи в умовах дії реальних навантажень і тим самим запобігти виникненню аварійних ситуацій. Запити практики значною мірою сприяли активним дослідженням за цією тематикою, що зумовило широке коло публікацій, присвячених аналізу власних частот спряжених систем та розробці методів розв'язання відповідних задач на власні значення.

Наразі найбільш повне дослідження власних частот складних з'єднаних між собою оболонок проведено для систем нульової гаусової кривизни у вигляді комбінацій з циліндричних, конічних оболонок та кільцевих пластин. Так, у [1] вивчалися резонансні частоти ізотропної системи циліндр–зрізаний конус при різних граничних умовах. Аналогічна система у випадку дискретно неоднорідної за товщиною структури досліджувалася в [2]. Кільцева пластина у з'єднанні з круговим циліндром або конусом розглядалася відповідно в роботах [3, 4]. У [5] проведено аналіз власних частот шаруватої конструкції з трьох елементів – циліндра та двох конусів, що моделює фрагмент космічного корабля.

Значно більший клас конструкцій описується системами, що включають елементи сферичної форми, тобто мають ненульову, але сталу гаусову кривизну. Так, у [6] проведено аналіз коливань системи сфера–циліндр–сфера, що є розрахунковою схемою герметичної капсули, у [7] розглянуто систему конус-циліндр-сфера з кільцевими підкріпленнями, а в [8] досліджено власні частоти спряжених сферичної та циліндричної оболонок при різних граничних умовах.

Теоретичною основою розробок за цією тематикою є здебільшого моделі Доннелла-Муштарі-Флюге, класична модель Кіргофа-Лява та зсувні моделі першого порядку Рейснера-Міндліна-Нагди [1, 2, 8]. Математичний апарат базується на застосуванні метода скінчених елементів у різних його модифікаціях, змішаних рядів з апроксимацією тригонометричними функціями за круговою координатою та ортогональними поліномами за меридіональною, методу Релея-Рітца з вибором різних систем базисних функцій тощо [2, 5, 7, 8]. В окремих статтях розв'язок задачі одержано в аналітичному вигляді [6].

Разом з тим, новітні інженерні рішення сучасної техніки пропонують більш складні форми конструкцій, що відповідають підвищеним вимогам їх експлуатації. Це стимулює дослідження з'єднаних оболонок з елементами ускладненої геометрії, зокрема з елементами тороеліптичної форми, що, як частинний випадок, охоплюють системи нульової та сталої гаусової кривизни.

Виходячи з цього, у роботі проводиться дослідження динамічних характеристик спряжених оболонок обертання з елементами тороеліптичної форми додатної та від'ємної гаусової кривизни. Розрахунок власних частот та форм коливань проводиться в рамках припущень теорії Кіргофа-Лява із застосуванням розробленої чисельно-аналітичної методики. Ця методика грунтується на апараті відокремлення змінних Фур'є, зведення вихідної двовимірної задачі на власні значення до послідовності відповідних одновимірних задач, розв'язання їх методом покрокового пошуку в сполученні з чисельним методом ортогональної прогонки. На конкретних прикладах досліджено особливості коливань системи зі сполучених оболонок обертання різних форм порівняно з коливаннями її складових частин.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИКА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Як об'єкт дослідження, вибрана система, що складається з J з'єднаних між собою співвісних оболонок обертання різної форми. Кожна складова оболонка розглядається як окрема j-та ділянка (елемент) єдиної оболонкової системи, координатна (серединна в частинному випадку) поверхня якої утворена обертанням деякої кусочно гладкої кривої навколо прямолінійної осі $0z$ (рис. 1). Положення довільної точки цієї поверхні задається в ортогональній спряженій системі координат (α,θ), де $\alpha=\{\alpha_j\in(\alpha_{0j},\alpha_{1j})\}$ $(j=\overline{1,J})$ змінюється за твірною – меридіаном, а θ – є центральним кутом н перерізі $z=const$. Координатна поверхня $\gamma=0$, яка є деякою вихідною поверхнею відліку за товщиною оболонок, вибирається неформально, а змінна γ відраховується за нормаллю до цієї поверхні. Оболонки можуть бути одношаровими, або складатися з багатьох шарів змінної за меридіаном товщини, між якими виконуються умови ідеального контакту. Приймається, що матеріали шарів працюють в пружній стадії деформування та можуть бути ізотропними або ортотропними. На торцях оболонкової системи $\alpha=\alpha_{01}$ та $\alpha=\alpha_{1J}$ задаються довільні однорідні фізично несуперечливі граничні умови, а на лініях контакту $\alpha_{1j-1}=\alpha_{0j}$ $(j=\overline{2,J-1})$ двох суміжних $j-1$-ої та j-ої ділянок у спільній системі координат $r0z$ формулюються умови рівноваги для статичних та умови нерозривності для кінематичних факторів напружено-деформованого стану оболонок. Припускається, що в межах кожної окремої ділянки системи, тобто для кожної складової оболонки, її геометричні параметри, товщина та фізико-механічні властивості матеріалу задаються гладкими функціями змінної α.

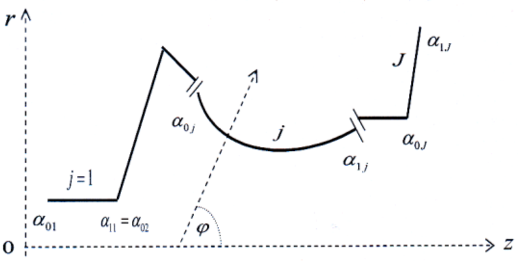


Рис. 1. Загальний вигляд твірної-меридіана оболонкової системи

Для описаної системи оболонок обертання в роботі проводиться дослідження її малих незатухаючих коливань. Дослідження проводиться в рамках відомих положень класичної теорії Киргофа-Лява, а для формулювання відповідної двовимірної задачі за основні невідомі приймаються компоненти вектор-функції $\vec{N}=\{N_n(\alpha,\theta,\mathrm{t})\}=\begin{Bmatrix}\vec{Q}\\ \vec{U}\end{Bmatrix}$ $(n=\overline{1,8})$

з такими статичними

$$\vec{Q}=\left\{N_n\left(\alpha,\theta,t\right)\right\}=\left\{T_r,T_z,\hat{S}_\alpha,M_\alpha\right\}^T \quad (n=\overline{1,4}) \tag{1}$$

та кінематичними

$$\vec{U}=\left\{N_n\left(\alpha,\theta,t\right)\right\}=\left\{u_r,u_z,v,\vartheta_\alpha\right\}^T \quad (n=\overline{5,8}) \tag{2}$$

складовими.

Тут T_r,T_z – радіальне та осьове зусилля, u_r,u_z – радіальне та осьове переміщення довільної точки координатної поверхні системи, що виражаються формулами:

$$T_r=T_\alpha\cos\varphi+\hat{Q}_\alpha\sin\varphi,\quad T_z=T_\alpha\sin\varphi-\hat{Q}_\alpha\cos\varphi,$$

$$u_r=u\cos\varphi+w\sin\varphi,\quad u_z=u\sin\varphi-w\cos\varphi. \tag{3}$$

T_α, $\hat{S}_\alpha=T_{\alpha\theta}+k_2H$, $T_{\alpha\theta}$, $\hat{Q}_\alpha=Q_\alpha+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial\theta}$, Q_α – нормальне, приведене зсувне, зсувне, приведене перерізуюче та перерізуюче зусилля в перетині $\alpha=const$; M_α, H – згинний та крутний моменти, ϑ_α – кут повороту нормалі в цьому ж перетині; $k_2=k_2\left(\alpha\right)$, $r=r\left(\alpha\right)$ – кривизна кривої меридіану в коловому напрямку та відстань довільної точки меридіана до осі обертання; φ – кут, утворений нормаллю до координатної поверхні та віссю обертання, t – часова змінна.

Відносно вибраних невідомих (1), (2), відповідна двовимірна задача про вільні коливання з'єднаних між собою оболонок обертання формулюється у векторно-матричному вигляді для такої системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\vec{N}}{\partial\alpha_j}=\sum_{s=0}^{4}B_s\frac{\partial^s\vec{N}}{\partial\theta^s}+C\frac{\partial^2\vec{N}}{\partial t^2},\quad \alpha_j\in\left(\alpha_{0j},\alpha_{1j}\right),\quad \theta\in\left[0,2\pi\right] \tag{4}$$

при однорідних граничних умовах на торцевих контурах системи

$$R_{01}\vec{N}=0,\quad \alpha=\alpha_{01}, \tag{5}$$

$$R_{1J}\vec{N}=0,\quad \alpha=\alpha_{1J}, \tag{6}$$

умовах сумісної роботи на лініях контакту (спряження)

$$\vec{N}\Big|_{\alpha_{1j-1}}=\vec{N}\Big|_{\alpha_{0j}},\quad \alpha=\alpha_{1j-1}=\alpha_{0j} \tag{7}$$

та умовах періодичності в коловому напрямку

$$\vec{N}\left(\alpha,\theta+2\pi\right)=\vec{N}\left(\alpha,\theta\right) \tag{8}$$

(у позначенні точки α_{pj} перший індекс p відповідає початку ($p=0$) і кінцю ($p=1$) j-ї ділянки (або j-ї оболонки), другий індекс $j=\overline{1,J}$ – номеру ділянки оболонкової системи).

Ненульові елементи матриць $B_s=\left\{b_{mn}^s\left(\alpha,\theta\right)\right\}$ ($s=\overline{0,4}$) та матриці $C=\left\{c_{nm}\right\}$, що характеризують інерційні властивості оболонок, наведені в [9, ст. 23-25].

Слід зауважити, що перевагою вибору невідомих у вигляді (1), (2) перед іншими можливими варіантами (наприклад, вибору в переміщеннях) є зручність формулювання умов спряження суміжних елементів на лініях контакту (7) та граничних умов (5), (6) на торцевих перетинах.

Для розв'язання задачі (4)-(8) відокремимо в компонентах вектор-функції $\vec{N}$ часовий множник $e^{i\omega t}$ і подамо їх у вигляді одинарних тригонометричних рядів за круговою координатою θ:

$$\vec{N} = \left\{ N_n\left(\alpha, \theta, t\right) = \sum_{k=0,1,2...} N_{nk}\left(\alpha\right) \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t} \right\} \quad (n = \overline{1,8}), \tag{9}$$

де ω – шукана власна частота оболонки, k – параметр хвилеутворення в коловому напрямку, вираз у квадратних дужках означає, що частина компонент вектор-функції $\vec{N}$, а саме $\hat{S}_\alpha$ і v, розкладаються за $\sin k\theta$, а всі інші – за $\cos k\theta$, $i^2 = -1$.

У результаті такого подання вихідна задача (4)-(8) для кожної гармоніки ряду k (9) зводиться до однорідної одновимірної задачі, що містить невідомий числовий параметр $\lambda = \omega^2$ та формулюється відносно функціональних коефіцієнтів $\vec{N}_k = \left\{N_{nk}\left(\alpha\right)\right\}$:

$$\frac{d\vec{N}_k}{d\alpha_j} = \left(\tilde{B}_k - \lambda C\right)\vec{N}_k, \quad \alpha_j \in \left(\alpha_{0j}, \alpha_{1j}\right) \quad (j = \overline{1,J}), \tag{10}$$

$$\vec{N}_k\Big|_{\alpha_{1j-1}} = \vec{N}_k\Big|_{\alpha_{0j}}, \quad \alpha = \alpha_{1j-1} = \alpha_{0j} \quad (j = \overline{2,J}) \tag{11}$$

$$R_{01k}\vec{N}_k = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \tag{12}$$

$$R_{1Jk}\vec{N}_k = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \tag{13}$$

Елементи матриці $\tilde{B}_k = \left\{b_{nm}\right\}$ $(n, m = \overline{1,8})$ виражаються через елементи матриць $B_s = \left\{b^s_{mn}\left(\alpha, \theta\right)\right\}$ $(s = \overline{0,4})$ з врахуванням подання (9) (див. [9, с.64]).

Для знаходження невідомого параметра $\lambda = \omega^2$ і відповідного йому розв'язку $\vec{N}_k$ застосовується метод покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$-метод) [10, ст. 246]. Значення цього методу полягає в знаходженні таких значень $\lambda \neq 0$, при яких однорідна крайова задача (10)-(13) має нетривіальний розв'язок $\vec{N}_k \neq 0$. Для розв'язання одновимірної лінійної крайової задачі в роботі застосовано метод ортогональної прогонки, який базується на зведенні крайової задачі до набору задач Коші, що розв'язуються за схемою Рунге-Кутта 5-го порядку (модифікація Мерсона). При такому підході умова знаходження нетривіального розв'язку задачі (10)-(13) зводиться до визначення нулів характеристичного детермінанту:

$$\Delta\left(\lambda\right) = \det\left(R_{1Jk} Z\left(\alpha_{1J}, \lambda\right)\right) = 0 \ , \tag{14}$$

де $Z\left(\alpha_{1J}, \lambda\right)$ – прямокутна матриця розмірності 8×4, стовбці якої є розв'язками задач Коші для системи (10), що задовольняють умовам спряження (11) та граничним умовам (12).

Алгоритм знаходження нулів виразу (14) реалізовано таким чином: шляхом перебору значень λ відшукується два послідовні значення λ_ν і $\lambda_{\nu+1}$, що задовольняють умові $\Delta\left(\lambda_\nu\right)\Delta\left(\lambda_{\nu+1}\right) \leq 0$, а далі за допомогою половинного ділення або інших інтерполяційних прийомів інтервал $\left(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}\right)$ стягується до одержання $\lambda \in \left(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}\right)$ з заданою точністю.

2. ТЕСТУВАННЯ МЕТОДИКИ

Тестування описаної чисельно-аналітичної методики, що включає розвинення в ряди Фур'є за коловою координатою, метод покрокового пошуку та чисельний метод ортогональної прогонки з розв'язанням задач Коші методом Рунге-Кутта 5-го порядку, проводиться індуктивно шляхом порівняння з відомими результатами, що отримані на основі інших підходів. Таке порівняння представлено тут двома прикладами, запозиченими з робіт [7, 11].

Приклад 1. У роботі [11], як елемент складної оболонкової системи тор–циліндр, розглянута циліндрична оболонка з ізотропного матеріалу, що має довжину L, радіус R та сталу товщину h. Для розрахунку її нижчих власних частот у цій роботі було застосовано метод різницевих квадратур (differential quadrature method DQM), у [12] – напіваналітичний метод скінчених елементів (МСЕ), а в роботі [13] отримано аналітичний розв'язок на основі методу Фур'є та перетворення Стокса.

Розрахунок власних частот за розробленою чисельно-аналітичною методикою проведено для консольно закріпленого циліндра і таких значень його геометричних і механічних параметрів, що прийняті в роботах [11-13]:

$$L = 0{,}5112\,м,\quad R = 0{,}216\,м,\quad h = 0{,}015\,м;\quad E = 0{,}183\cdot 10^{12}\,Па,\quad \mu = 0{,}3,\quad \rho = 7492\,кг/м^3.$$

Порівняння значень перших десяти нижчих частот ($f_i, Гц$) подається в таблиці 1, де параметри k, m визначають форми коливання в коловому і меридіональному напрямках відповідно.

Таблиця 1 – Порівняння значень власних частот за розробленою методикою, DOM[11], МСЕ [12] та одержаних аналітично [13]

$f = \dfrac{\omega}{2\pi},\ Гц$					
N	$m;k$	чис.-анал. методика	DOM [11]	МСЕ [12]	[13]
1	1;4	173,30	173,24	173,6	171,8
2	1;5	202,23	202,29	202,3	199,2
3	1;3	223,89	223,78	224,4	223,3
4	1;6	273,60	273,76	273,5	268,9
5	1;7	368,47	368,76	370,1	361,9
6	1;2	404,25	404,01	404,7	403,7
7	2;6	445,97	445,81	448,7	447,0
8	2;7	470,98	470,88	471,3	464,6
9	1;8	481,09	481,56	490,3	472,5
10	2;5	496,86	496,62	500,3	494,7

З таблиці видно, що найменші значення частот одержані аналітично в роботі [13] за методом Фур'є та перетворенням Стокса і найбільша їх відмінність від інших результатів (майже 4%) має місце для дев'ятої частоти ($m = 1, k = 8$). Відмінність між значеннями власних частот за іншими порівнювальними методами не перевищує 1%.

На цьому ж прикладі в таблиці 2 проілюстровано плив дискретизації кривої меридіану (кількість точок n) на точність знаходження деяких власних частот. Ці дані наведені для 3-х частот, які відповідають параметрам хвилеутворення k, m.

Таблиця 2 – Залежність розрахункових значень власних частот від дискретизації кривої інтегрування

n	$k=4;\, m=1$	$k=5;\, m=2$	$k=1;\, m=1$
5	6939,6	4101,8	4173,4
10	3489,9	3705,7	3362,2
20	173,30	496,86	856,17
40	173,30	496,86	856,17

Аналізуючи таблицю, доходимо висновку, що для $n \le 10$ обчислювальний процес за розглянутою методикою дає невірні значення шуканих частот. Це пов'язано з недостатньою кількістю точок інтегрування задач Коші в методі ортогональної прогонки. Збільшення точок інтегрування дає можливість отримати стійкий розв'язок задачі. Вже для $n \ge 20$ значення шуканих частот стає стійким у 5-ти знаках.

Приклад 2. Розглядалася система з трьох ізотропних оболонок обертання однакової товщини h. Ця система, твірна якої представлена на рис. 2, складалась із конуса (кут піврозхилу β, малий радіус R_0), циліндра (радіус R, довжина L) і сферичного пояса (радіус R, кут піврозхилу біля полюса φ_0). Торцеві контури оболонок приймались вільними від навантаження. Знаходження власних частот такої системи проведено в [7] на основі модифікованого варіаційного методу за моделлю Рейсснера-Нагді з апроксимацією шуканого розв'язку поліномами Чебишева 1-го порядку за твірною та рядами Фур'є за напрямною. Для кожної гармоніки ряду Фур'є утримувалося 7 членів апроксимації поліномами Чебишева. У цій же роботі наведені результати, отримані МСЕ за програмою ANSYS. Порівняння цих результатів з результатами за розробленою чисельно-аналітичною методикою представлено в таблиці 3 для $f = \dfrac{\omega}{2\pi}, Гц$ при таких вихідних даних:

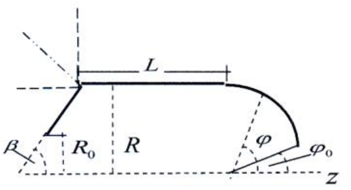


Рис. 2. Твірна оболонкової системи конус-циліндр-сфера

$$R = 1м,\quad R_0 = 0,4м,\quad L = 2,5м,\quad \beta = 30^0,\quad h = 0,01м,\quad \varphi_0 = 0^0;\, 45^0,$$

$$E = 69,58ГПа,\quad \mu = 0,31,\quad \rho = 2700кг/м^3.$$

Таблиця 3 – Порівняння значень власних частот, одержаних за розробленою методикою, методом рядів [7] та МСЕ (ANSYS)

		$\varphi_0 = 0^0$			$\varphi_0 = 45^0$		
k	m	чис.-анал. методика	[7]	ANSYS	чис.-анал. методика	[7]	ANSYS
0	**1**	424,05	423,92	423,95	434,19	434,04	434,04
	2	430,13	429,13	428,44	446,78	446,88	444,82
	3	600,55	601,59	600,67	669,63	669,80	669,28
	4	731,12	731,50	730,76	766,14	766,22	765,90
3	**1**	67,55	67,69	67,55	47,59	47,78	47,67
	2	91,74	92,07	91,94	60,40	69,57	69,42
	3	249,25	250,08	249,78	99,54	99,63	99,55
	4	365,74	366,15	365,34	256,24	256,34	256,00

Як видно, різниця в значеннях власних частот, які отримані за чисельно-аналітичною методикою і за двома іншими підходами – МСЕ та методу рядів, тільки в окремих випадках перевищувала 1%.

Наведені приклади тестування запропонованої методики розрахунку нижчих частот, сполучених між собою оболонок обертання, ілюструють на індуктивному рівні строгості правомірність її використання в розглянутому класі задач.

3. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ

Результати дослідження вільних коливань тонкостінних систем зі співвісних оболонок обертання різної форми представлено двома задачами, де розглянуто вплив низки геометричних параметрів системи на її власні частоти. Аналіз проведено на прикладі умовної залежності $\omega = \omega(k)$, що характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від форми хвилеутворення в коловому напрямку k і є традиційною для оболонок обертання.

Задача 1. Розглянуто систему двох циліндрів з довжинами l_1, l_2 та радіусами r_1, r_2, що з'єднані елементом тороеліптичної форми з півосями a_i, b_i та відстанню r_{0i} центра тора від осі обертання. Представлені випадки ($i = 1,2$), коли з'єднувальний елемент має гаусову кривизну різних знаків (рис. 3): I – додатну $K = k_1 \cdot k_2 > 0$ (центр тора та вісь обертання лежать з однієї сторони твірної - меридіану); II – від'ємну $K < 0$(центр тора та вісь обертання лежать по різні сторони меридіану).

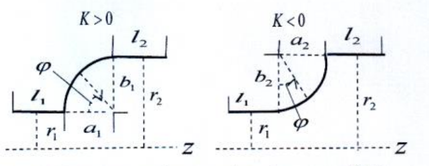


Рис. 3. Твірна системи циліндр-тороеліпс-циліндр додатної (K>0) та від'ємної (K<0) гаусової кривизни

Твірна тороеліптичних оболонок задається в параметричному виді:

I) $r = r_{01} + b_1 \sin\varphi$, $z = -a_1 \cos\varphi$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$) (φ – центральний кут еліпса, що відраховується від горизонтальної осі за годинниковою стрілкою, $r_{01} = r_1$);

II) $r = r_{02} - b_2 \cos\varphi$, $z = a_2 \sin\varphi$ ($\varphi \in [0, \pi/2]$) (φ – центральний кут еліпса, що відраховується від вертикальної осі проти годинникової стрілки, $r_{02} = r_2$).

Усі елементи систем циліндр-тороеліпс-циліндр ($CL1 - TE - CL2$) мають сталу товщину h та виготовлені зі скловолокна, що орієнтовано за меридіаном та має такі фізико-механічні характеристики:

$$E_\alpha = 4,4E_0, \quad E_\theta = 1,3E_0, \quad G_{\alpha\theta} = 0,37E_0, \quad \mu = 0,18, \quad \rho = \rho_0 .$$

Приймається, що торцеві контури обох циліндрів жорстко закріплені.

Особливості коливань описаних систем I та II порівняно з коливаннями їх окремих складових частин – тороеліпсів та циліндрів – покажемо на умовній залежності $\omega = \omega(k)$ для таких вихідних даних:

$$r_1 = 50l_0, \quad r_{01}/r_1 = 1, \quad a_1/r_1 = 2, \quad b_1/r_1 = 1, \quad l_1/r_1 = 2, \quad h/r_1 = 0,02;$$

$$r_2/r_1 = 2, \quad a_2 = a_1, \quad b_2 = b_1, \quad l_2 = l_1 .$$

Результати розрахунку у вигляді безрозмірного частотного параметра $f^* = f^*(k)$ ($f^*(k) = \dfrac{\omega(k)}{2\pi} \cdot 10^{-3} l_0 \sqrt{\dfrac{\rho_0}{E_0}}$), – як умовної функції параметра k, представлені на рис. 4 для тороеліпсів додатної (TE1) та від'ємної (TE2) гаусової кривизни (рис. 4 *а*); для циліндрів радіуса r_1 (CY1) та r_2 (CY2) (рис. 4 *б*); оболонкових систем I та II (рис. 4 *в*).

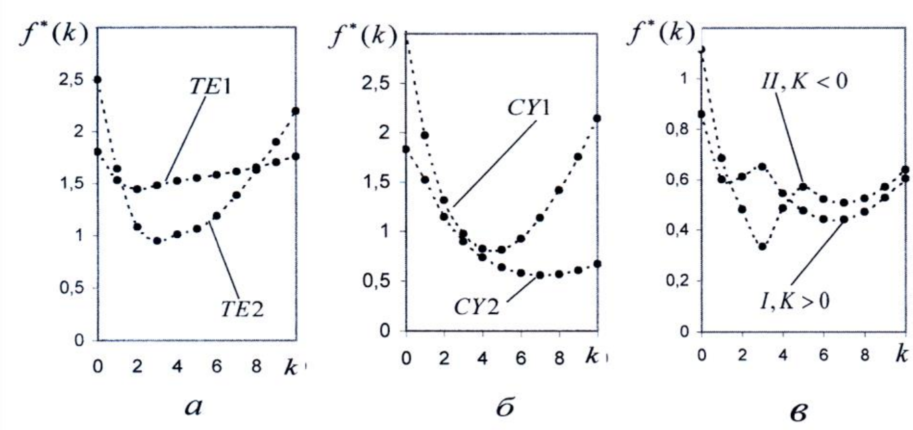


Рис. 4. Залежність безрозмірного частотного параметра $f^* = f^*(k)$ від параметра хвилеутворення k для тороеліпсів додатної (ТЕ1) та від'ємної (ТЕ2) гаусової кривизни (a); циліндрів радіуса r_1 (CY1) та r_2 (CY2) $(б)$; оболонкових систем I і II $(в)$

Для окремих складових елементів систем (рис. 4 *а* та рис. 4 *б*) залежність $f^* = f^*(k)$ має звичний вигляд: це немонотонна функція з одним мінімумом. Для систем I та II (рис. 4 *в*) ця залежність набуває нової якості: вона має два локальні мінімуми при $k=1$, $k=7$ (система I) та $k=3$, $k=7$ (система II). Ця нова якість зумовлена спільними коливаннями всіх складових елементів системи, як єдиного цілого. Простежується, що домінуючий вплив з'єднувального тороеліптичного елементу на коливання системи в цілому має місце для менших k ($k \le 3$, система I, $k \le 5$ – система II), а циліндра радіуса r_2 – для більших k. Порівнюючи системи різної гаусової кривизни, видно, що абсолютно мінімальне значення власної частоти має місце при $k=3$ для системи II з додатною гаусовою кривизною.

Задача 2. На прикладі системи з конічної, циліндричної та еліптичної оболонок, частинний випадок якої для сферичного елементу розглянуто в [7] (рис. 2) та використано в п. 2 для тестування розробленої методики, проводився аналіз впливу кута розхилу конічного та довжини циліндричного елементів на власні частоти системи в цілому. На граничних контурах системи приймаються умови жорсткого закріплення та вільного краю.

Рис. 5. Залежність частотного параметра $\tilde f(k)$ $(Гц)$ для різних кутів піврозхилу конуса β системи конус-циліндр-еліпс: $\beta=0^0;45^0;90^0$ (a); $\beta=10^0;20^0$ $(б)$

У першій серії розрахунків при сталій довжині циліндра $L=1{,}2$ та еліпса з півосями $a=0{,}5R$, $b=R$ розглянуто залежність власних частот системи для кутів піврозхилу конуса $\beta=0^0;10^0;20^0;45^0;90^0$ ($\beta=0$ – циліндр, $\beta=90^0$ – кільцева пластина). Результати дослідження у вигляді залежності $\tilde f = \tilde f(k)$ ($\tilde f = 10^{-3}\dfrac{\omega}{2\pi}$, Гц) подані на рис. 5 *а* для $\beta=0^0;45^0;90^0$ та на рис. 5 *б* для $\beta=10^0;20^0$.

Як видно з рисунку, тільки у випадку $\beta = 90^0$ – (кільцева пластина-циліндр-еліпс) домінуючу роль в коливаннях відіграє саме пластина, для якої залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$, як відомо, є монотонно зростаючою функцією і такий характер нав'язується системі в цілому. В усіх інших випадках кожний з елементів системи дає свій внесок у її коливання і вона працює як єдине ціле. Слід виділити досить цікавий випадок при $\beta = 20^0$, у якому залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ має три локальні мінімуми при $k = 1$, $k = 3$, $k = 6$.

Друга серія розрахунків для цієї системи при сталому куті $\beta = 45^0$ конічної частини і тих же розмірах еліпса пов'язана з аналізом впливу довжини циліндричної оболонки на коливання системи в цілому. На рис. 6 представлена залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ для $\delta = L/R = 0,01; 3; 7,5$. При $\delta = 0,01$ маємо практично систему конус – еліпс, де обидві складові працюють як єдине ціле. З ростом довжини циліндра роль цих елементів у коливаннях системи послаблюється і при $\delta = 7,5$ залежність $\tilde{f} = \tilde{f}(k)$ має один мінімум, що характерно для циліндричних оболонок.

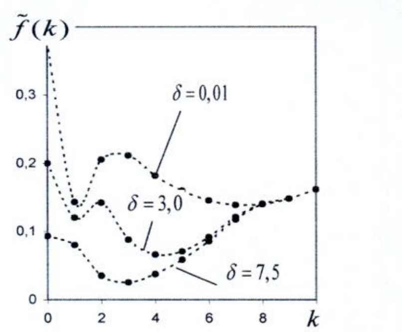


Рис. 6. Залежність частотного параметра $\tilde{f}(k)$ $(Гц)$ від довжини циліндричної частини системи конус-циліндр-еліпс : $\delta = 0,01; 3,0; 7,5$

4. ВИСНОВКИ

На основі положень класичної теорії тонких оболонок Кіргофа-Лява запропонована чисельно-аналітична методика розрахунку власних частот сполучених між собою співвісних оболонок обертання з елементами змінної гаусової кривизни (додатної та від'ємної). Методика базується на використанні методу відокремлення змінних, покрокового пошуку ($\Delta(\lambda)$-методу), чисельного методу ортогональної прогонки з розв'язанням задач Коші за схемою Рунге-Кутта 5-го порядку в модифікації Мерсона.

Обгрунтування методики проведено індуктивно шляхом порівняння з відомими результатами, що базуються на інших підходах.

Особливості коливань оболонкової системи як єдиного об'єкту, порівняно з коливаннями її складових частин проілюстровано на традиційній для оболонок обертання залежності $\omega = \omega(k)$, що характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від форми хвилеутворення в коловому напрямку k. Показано, що коливання системи в цілому можуть мати якісно інший характер, ніж коливання окремих оболонок. Зокрема, для сполучених між собою оболонок в області нижчих частот може спостерігатися декілька локальних мінімумів, у той час, як для її складових частин – тільки один. Цю особливість сполучених систем передбачити заздалегідь практично неможливо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Caresta M. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells / M. Caresta, N.J. Kessissoglou // J. of Sound and Vibration. – 2010. – Vol. 329. – P. 733-751.
2. Patel BP. Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells / BP. Patel, M. Ganapathi, S. Kamat // J. Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 237. –P. 920-930.
3. Cheng L. Free vibration analysis of a cylindrical shell–circular plate system with general coupling and various boundary conditions / L. Cheng, J. Nicolas // J. of Sound and Vibration. – 1992. – Vol. 155. – P. 231-247.

4. Liang S. The natural vibration of a conical shell with an annular end plate / S. Liang, H.L. Chen // J. of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 294. – P. 927-943.
5. Chronopoulos D. Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell / D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille // Composite Structures. – 2014. – Vol. 107. – P. 149-159.
6. Shang X. C. Exact analysis for free vibration of a composite shell structure- hermetic capsule / X.C. Shang // Appl Math Mech (English Edition). – 2001. – Vol. 22. – P. 1035-1045.
7. Qu Y. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – 69. – P. 72-84.
8. Lee Y. S. A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures / Y.S. Lee, M.S. Yang, Y.S. Kim, J.H. Kim // Computers & Structures. – 2002. – Vol. 80: 27–30. – P. 2405-2414.
9. Григоренко Я. М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкар. – К. : Наук. думка, 1986. – 172 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
11. Redekop D. Vibration analysis of a torus – cylinder shell assemble / D. Redekop // J. of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 277. – P. 919-930.
12. Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells / H. Cheng // J. of Sound and Vibration. – 1981. – Vol. 74. – P. 331-350.
13. Ganesan N. Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness / N. Ganesan, K.R. Sivadas // Computers and Structures. – 1990. – Computers and Structures. – Vol. 34. – P. 669-677.

REFERENCES

1. Caresta, M. and Kessissoglou, N.J. (2010), “Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 329, pp. 733-751.
2. Patel, BP, Ganapathi, M. and Kamat, S. (2000), “Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells”, *J. Sound and Vibration*, vol. 237, pp. 920-930.
3. Cheng, L. and Nicolas, J. (1992), “Free vibration analysis of a cylindrical shell–circular plate system with general coupling and various boundary conditions”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 155, pp. 231-247.
4. Liang, S. and Chen, H.L. (2006), “The natural vibration of a conical shell with an annular end plate”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 294, pp. 927-943.
5. Chronopoulos, D., Ichchou, M., Troclet, B. and Bareille, O. (2014), “Predicting the broadband response of a layered cone-cylinder-cone shell”, *Composite Structures*, vol. 107, pp. 149-159.
6. Shangб X.C. (2001), “Exact analysis for free vibration of a composite shell structure-hermetic capsule”, *Appl Math Mech (English Edition)*, vol. 22, pp. 1035-1045.
7. Qu, Y., Wu, S., Chen, Y. and Hua, H. (2013), “Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 69, pp. 72-84.
8. Lee, Y.S., Yang, M.S., Kim, Y.S. and Kim, J.H. (2002), “A study on the free vibration of the joined cylindrical–spherical shell structures”, *Computers & Structures*, vol. 80: 27–30, pp. 2405-2414.

9. Grigorenko, Ya.M., Bespalova, E.I., Kitaigorodskiy, A.B. and Shinkar, A.I. (1986), “Svobodnyie kolebaniya elementov obolochechnyih konstruktsiy”, Nauk. dumka, Kiev.

10. Kamke, E. (1971), “Spravochnik po obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam”, Nauka, Moskow.

11. Redekop, D. (2004), “Vibration analysis of a torus – cylinder shell assemble”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 277, pp. 919-930.

12. Chung, H. (1981), “Free vibration analysis of circular cylindrical shells”, *J. of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 331-350.

13. Ganesan, N. and Sivadas, K.R. (1990), “Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness”, *Computers and Structures*, vol. 34, P. 669-677.

УДК 533.9 ; 621.793

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕЙ ИОННО-ПЛАЗМЕННОЙ ОБРАБОТКИ ВНУТРЕННИХ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАР ТРЕНИЯ

Гришкевич А. Д., к. т. н., Гринюк С. И.

Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, г. Днепропетровск, Украина

Gryshkevych.O.D@nas.gov.ua

В статье представлены результаты разработки новых магнетронных технологических устройств для ионно-плазменного упрочнения внутренних рабочих поверхностей пар трения. Разработаны технологические магнетронные устройства интегрированного типа для обработки деталей с внутренним диаметром более 80 мм и магнетронное устройство для обработки неферромагнитных деталей диаметром более 20 мм. Разработано несбалансированное цилиндрическое магнетронное распылительное устройство для нанесения наноструктурированных покрытий на внутренние и наружные рабочие поверхности. Обсуждаются особенности применения разработанных плазменных технологических устройств.

Ключевые слова: внутренняя рабочая поверхность, наноструктурированное покрытие, системы распыливание цилиндрического магнетрона, нестойкое магнетронное напыление, очищение с помощью иона, механические свойства покрытий.

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ЗМІЦНЮЮЧОЇ ІОННО-ПЛАЗМОВОЇ ОБРОБКИ ВНУТРІШНІХ РОБОЧИХ ПОВЕРХОНЬ ПАР ТЕРТЯ

Гришкевич О. Д., к. т. н., Гринюк С. І.

Інститут технічної механіки Національної академії наук України
і Державного космічного агентства України,
вул. Лєшко-Попеля, 15, м. Дніпропетровськ, Україна

Gryshkevych.O.D@nas.gov.ua

У статті наведено результати розробки нових магнетронних технологічних пристроїв для іонно-плазмового зміцнення внутрішніх робочих поверхонь пар тертя. Розроблено магнетронні технологічні пристрої інтегрованого типу для обробки деталей з внутрішнім діаметром більше 80 мм і магнетронний пристрій для обробки неферомагнітних деталей діаметром більше 20 мм. Розроблено незбалансований циліндричний магнетронний пристрій для нанесення наноструктурованих покриттів на внутрішні і зовнішні робочі поверхні. Обговорюються особливості використанні розроблених плазмових технологічних пристроїв.

Ключові слова: внутрішня робоча поверхня, наноструктуровані покриття, системи розпилювання циліндричного магнетрону, нестійке магнетронне напилення, очищення за допомогою іону, механічні властивості покриттів.

SOME SPECIAL FEATURES OF STRENGHTHRNING ION-PLASMA TREATMENT OF INNER WORKING SURFACES OF FRICTION PAIRS

Gryshkevych O. D., Ph.D. of Technical Science, Grinyuk S. I.

Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Scieces of Ukraine and State Space Agency of Ukraine, Leshko-Popela str., 15, Dnepropetrovsk, Ukraine

Gryshkevych.O.D@nas.gov.ua

The paper deals with some special features of the application of a nanostructured coating to inner working surfaces of friction pairs. A magnetron ion-assisting technology is intended to be optimal for the ion-plasma treatment of inner working surfaces when the length to inner diameter ratio is greater 3 – 5. Special features of treatment of inner surfaces with diameters of 20-100 mm are due to a limited volume of the treated cavity. In this case difficulties emerge to create technological plasma devices with an added system of electrodes for a preliminary ion preparation of the surface and ion assisting.
Versions of using autonomous sources of ions and unbalanced magnetron sputtering systems. It is shown that for treatment of surfaces with diameters of more 80 mm it is possible to use integrated technological plasma devices with the balanced magnetron sputtering system integrated with the ion source of the magnetron or vacuum-arc type.
An unbalanced cylindrical magnetron device is developed to simplify the design of the technological plasma device. The device developed allows all technological operations of the application of a nanostructured coating to inner surfaces of ferromagnet and nonferromagnet parts with diameters of more 100 mm.
The technological plasma device for the application of coatings to surfaces with diameters of 20-100 mm and the technology using the unbalanced cylindrical magnetron with the extended pipe cathode and the scanning inverse magnetron for a preliminary ion preparation of the surface are developed. Such design of the technological plasma device allows only treatment of parts made from a non-ferromagnetic material.
Difficulties due to a significant difference between the time of ion activation of the treated surface and the time for heating a massive part emerge when treating massive parts.
In this case the effect of ionic etching a precision surface of friction pairs treated up to the roughness parameter $R_a = 0.1$ may occur. The ionic treatment of the surface by helium ions has been used with the object of surmounting a discrepancy.
The paper gives consideration to special features of the technological process of the application of a nanostructured coating to inner surfaces of small diameters.
It is shown that conditions of energetic interactions between the condensate and the discharged plasma volume are realized for the application of a coating at the limited distance between the sputtered surface (the magnetron cathode) and the condensation surface (the magnetron anode), resulting in the same effect as ion assisting and providing nanostructurization of a coating.
The phenomenon of an energetic interaction between the condensate and the magnetron discharge plasma in the process of a direct interaction calls for further investigation in order to use it in practice of the application of functional nanostructured coatings.
Key words: inner working surface, nanostructured coating, cylindrical magnetron sputtering system, unbalanced magnetron sputtering system, ion assisting, mechanical properties of coatings.

Принято считать, что основной причиной потери работоспособности машин и механизмов является механический износ деталей и элементов конструкции в результате трения и усталости конструкционного материала. В обоих случаях основным фактором, определяющим ресурс деталей, являются механические свойства рабочих поверхностей. Одним из наиболее эффективных способов улучшения ресурсных характеристик деталей машин является упрочнение рабочих поверхностей путем нанесения функциональных наноструктурированных покрытий. Современный прогресс в области технологии нанесения нанопокрытий обусловлен развитием представлений о том, что функциональные свойства рабочих поверхностей определяются не только элементным составом конструкционного материала, но и в значительной степени зависят от структурного состояния поверхностного слоя [1-3]. Исследования зависимости механических свойств поверхностного слоя от его структурного состояния привели к созданию новых упрочняющих покрытий, обладающих функциональными свойствами, недостижимыми для покрытий предыдущего поколения. Были разработаны новые технологии нанесения покрытий и технологические плазменные устройства нового типа. Существенный прогресс в этой области связан с разработкой магнетронных распылительных систем несбалансированного типа (НбМРС) [4], которые существенно упростили получение наноструктурированных покрытий с необходимыми функциональными характеристиками.

В работе [2] показано, что измельчение структурных элементов материалов (наноструктурирование) и микронапряжения, возникающее в покрытии в процессе конденсации, определяющим образом влияют на увеличение твердости покрытий и, как следствие, улучшают функциональные и эксплуатационные характеристики рабочих поверхностей. В работе [3] обосновывается, что наиболее продуктивным способом изменения микроструктуры поверхностного слоя является проведение процесса осаждения покрытия в условиях внешнего энергетического воздействия. Энергетическое воздействие может осуществляться бомбардировкой поверхности осаждения энергетическими частицами (быстрыми нейтралами, низкоэнергетичными ионами). Ионная бомбардировка (ионное ассистирование) в процессе формирования покрытия приводит к уменьшению размеров кристаллитов, уплотнению границ зерен и появлению сжимающих микронапряжений в покрытии. Наиболее эффективно наноструктурирование реализуется при ионно-плазменной технологии нанесения покрытий, базирующейся на использовании плазменных технологических устройств магнетронного и вакуумно-дугового типов.

В настоящее время в мировой практике машиностроительного производства наиболее распространенной является магнетронная технология нанесения высокопрочных наноструктурированных покрытий на металлообрабатывающий инструмент. Заметим, что входящие в состав вакуумных технологических установок технологические плазменные устройства предназначены для выполнения двух основных технологических операций ионно-плазменной обработки: предварительной ионной обработки поверхности конденсации; нанесения функционального покрытия с ионным ассистированием. Предварительная ионная обработка служит для нагрева поверхности конденсации до рабочей температуры, а также для очистки и активации поверхности конденсации покрытия. В промышленных установках могут быть реализованы различные способы наноструктурирования покрытий, использующие различные плазменные технологические устройства. Для нанесения покрытий на наружные рабочие поверхности широкое распространение получили планарные магнетронные распылительные системы несбалансированного типа – (НбПлМРС). Для обработки изделий с 3d геометрией оптимальны многокатодные магнетронные системы с обобщенным магнитным полем (closed field unbalanced magnetron) [5]. Находят применение интегрированные магнетронные системы с автономными источниками газовых ионов. Характерным признаком интегрированных плазменных технологических устройств является пространственное разделение функций генерации частиц покрытия и генерации ионов, ассистирующих процесс конденсации покрытия.

Имеется широкий класс деталей, на рабочие поверхности которых невозможно нанесение наноструктурированных покрытий при использовании распространенных технологий и магнетронных распылительных систем планарного типа. К таким деталям относятся элементы конструкции пар трения с внутренними рабочими поверхностями. Это детали гидравлических и пневмогидравлических машин и исполнительных механизмов. Разработка специализированных плазменных технологических устройств и технологии обработки подобных деталей, а также исследование особенностей их применения является целью настоящей работы.

Для ионно-плазменной обработки внутренних рабочих поверхностей были разработаны и защищены охранными документами магнетронные технологические устройства интегрированного типа [6-9]. Было разработано магнетронное устройство несбалансированного типа [10], предназначенное для обработки как внутренних, так и наружных рабочих поверхностей пар трения и деталей с 3d геометрией.

Конструктивные схемы устройств интегрированного типа представлены на рис. 1. Устройства типов «А», «С» и «D» предназначены для обработки деталей с внутренним диаметром 80-100 мм и более. Устройство типа «В» ориентировано на ионно-плазменную обработку трубчатых деталей малого (от 20 мм) внутреннего диаметра. Охарактеризуем особенности их конструкции и применения.

В плазменных технологических устройствах интегрированного типа «А» [6] и «В» [7] (см. рис. 1) распыляемыми катодами являются тонкостенные трубки, выполненные из материала покрытия. Материал покрытия может также наноситься на распыляемую поверхность катода любым способом (например, гальваническим хромированием). Обрабатываемое трубчатое изделие и соосный ему цилиндрический магнетрон нанесения покрытия устанавливаются в вакуумной камере неподвижно. Распыление материала катода производится ионной бомбардировкой в магнетронном разряде при возвратно-поступательном сканировании магнитной системы ЦМРС вдоль распыляемой поверхности трубчатого катода.

Катоды устройств «С» [8] и «D» [9] выполняются из массивного металла (или двух металлов). Для нанесения покрытия на протяженную внутреннюю поверхность используется относительное возвратно-поступательное перемещение плазменного устройства и обрабатываемого изделия.

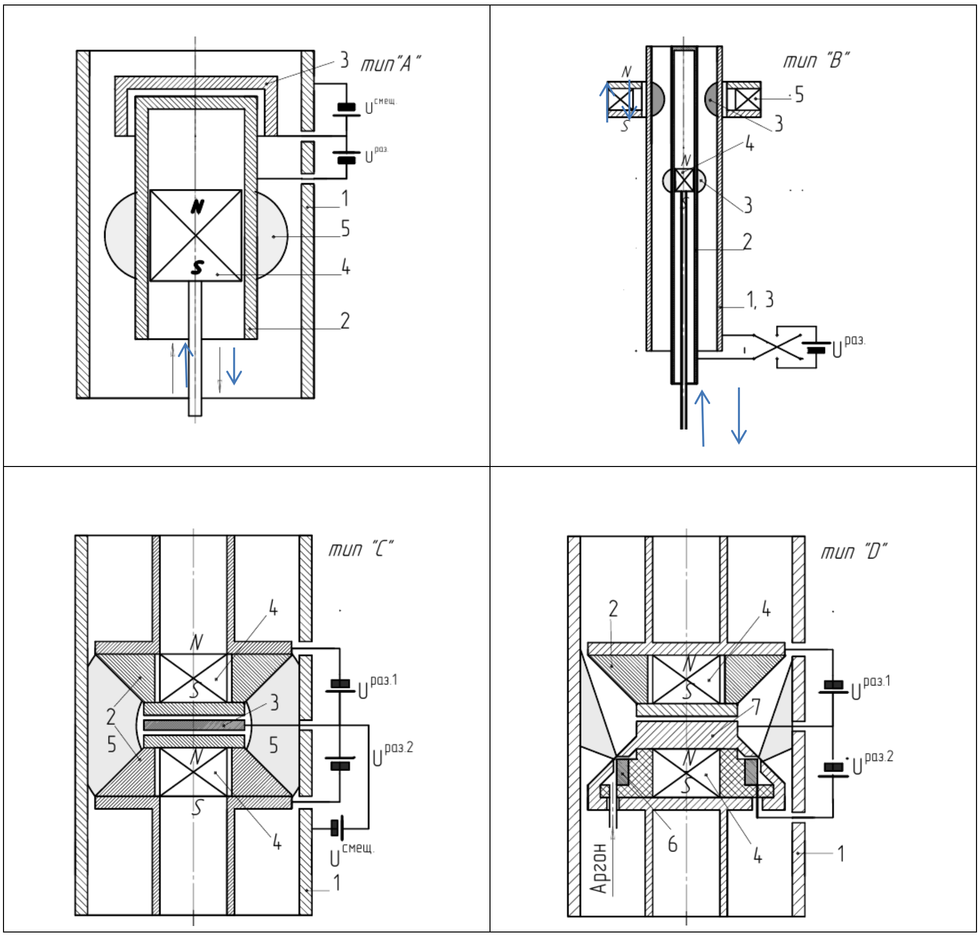


Рис. 1. Конструктивные схемы цилиндрических распылительных систем интегрированного типа:
1 – обрабатываемая трубчатая деталь; 2 – катод-мишень; 3 – анод магнетронного разряда;
4 – магнитная система; 5 – область магнетронного разряда; 6 – анод автономного ионного источника (АИИ);
7 – анод КМРС, катод АИИ

В устройстве типа «А» для предварительной подготовки поверхности в качестве источника металлических ионов используется вакуумно-дуговой разряд, который локализуется у торцевого анода. Магнетронный разряд служит для инициирования зажигания вакуумно-дугового разряда и для распыления поверхности трубчатого катода при возвратно-поступательном сканировании распыляемой поверхности катода внутренней магнитной системой цилиндрического магнетрона. Такое сочетание разрядов различных типов обеспечивает получение покрытий с хорошей, характерной для вакуумно-дуговой технологии, адгезией. Однако, присущее вакуумно-дуговому разряду свойство генерировать большое количество макрочастиц, снижает эффективность наноструктурирования покрытия.

Интегрированное технологическое устройство типа «С» содержит два МРС с обращенными друг к другу коническими катодами (КМРС). Противоположно ориентированные магнитные полюса магнетронов создают в пространстве между катодами обобщенную область магнитного поля. Плазма двух магнетронных разрядов локализуется между катодами и подложкой, что облегчает организацию режима ионного ассистирования покрытия. В устройстве такого типа имеется возможность нанесения биметаллических покрытий и ламинатных покрытий с чередующимися слоями.

Устройство типа «D» по компоновке аналогично устройству типа «С». В этом устройстве КМРС объединена с автономным ионным источником с замкнутым дрейфом электронов и узкой зоной ускорения (ускоритель с анодным слоем – УАС). Особенностью УАС является возможность работы как в режиме генератора плазмы, так и в режиме генератора ускоренных ионов, что расширяет технологические возможности плазменного технологического устройства.

Основными недостатками технологических устройств типов «А», «С», «D» является ограничение по обработке внутренних поверхностей малого диаметра, а также их конструктивная и эксплуатационная сложность.

Устройство типа «В» предназначено для обработки трубчатых деталей, выполненных из неферромагнитного материала. Это позволяет использовать для предварительной ионной обработки разряд инверсного цилиндрического магнетрона (ИнвЦМРС). Магнитная система ИнвЦМРС предварительной ионной обработки располагается за пределами внутренней полости детали, охватывая ее снаружи. Магнетронный разряд ИнвЦМРС для предварительной ионной обработки локализуется на внутренней поверхности детали и перемещается вместе с магнитной системой магнетрона вдоль поверхности конденсации покрытия. Анодом разряда служит катод ЦМРС для нанесения покрытия. При нанесении покрытия производится переключение полярности разрядного источника. В технологическом устройстве подобного типа минимальный диаметр обрабатываемой поверхности определяется величиной диаметра трубчатого катода ЦМРС нанесения покрытия плюс удвоенная величина разрядного промежутка. Так как характерный размер разрядного промежутка МРС с тонким катодом, как правило, примерно равен величине межполюсного зазора магнитной системы, при использовании постоянного магнита диаметром 6 мм и высотой 5 мм возможна обработка деталей с минимальным внутренним диаметром 16 мм или несколько меньше. В устройстве типа «В» не устранен недостаток, связанный с конструктивной сложностью.

Недостатки, органически присущие плазменным технологическим устройствам интегрированного типа, устранены в магнетронных распылительных системах несбалансированного типа. Принципы создания несбалансированного магнитного поля в планарной магнетронной распылительной системе были разработаны в [4]. В ПлМРС несбалансированного типа условия для изменения конфигурации магнитного поля в области магнетронного разряда создаются путем усиления магнитного потока через наружный магнитный полюс. Такое изменение магнитного поля способствует выходу электронов за пределы магнитной ловушки. В результате амбиполярной диффузии объемный заряд электронов, покидающих магнитную ловушку, компенсируется ионами, уходящими вслед за электронами. В результате, у поверхности подложки формируется плазменное образование, из которого на находящуюся под отрицательным потенциалом подложку могут извлекаться газовые ионы ассистирования. В результате ионной бомбардировки происходит наноструктурирование покрытия. Состояние несбалансированности магнитного поля принято характеризовать параметром, численно равным расстоянию характерной точки Z_0 от катода. Точка Z_0 располагается на оси симметрии магнитной системы. В этой точке вектор нормальной составляющей магнитной индукции меняет направление на противоположное.

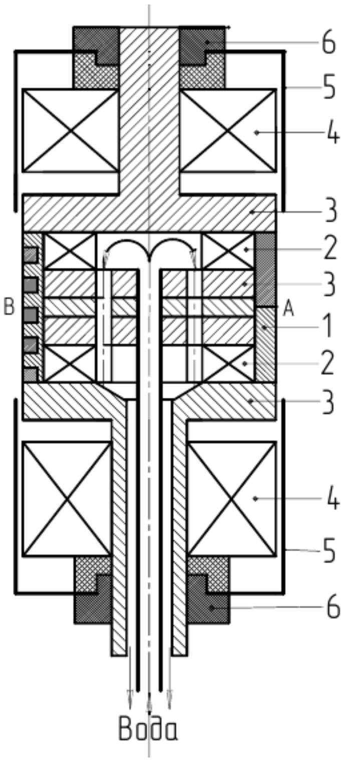


Рис. 2. Конструктивная схема несбалансированной цилиндрической магнетронной распылительной системы: 1 - катод-мишень; 2 – постоянные магниты; 3 – магнитные полюса; 4 – магнитные катушки; 5 – анод – защитный экран; 6 – изолятор

Принцип создания несбалансированного магнитного поля был применен при создании несбалансированной цилиндрической магнетронной распылительной системы (НбЦМРС) [10]. Несбалансированность магнитного поля создавалась установкой на торцевых магнитных полюсах дополнительных постоянных магнитов, усиливающих периферийный магнитный поток. Последовательно соединенные двухтрековые модули НбЦМРС могут использоваться для обработки протяженного трубчатого изделия. Имеется возможность создания модуля НбЦМРС с составным катодом. Варианты составного и фрагментированного катодов типа «А» и типа «В» показаны на рис. 2. Подобные катоды могут использоваться для нанесения биметаллических покрытий типа (Ti-Al)N.

В конструкции модуля НбЦМРС для усиления периферийного магнитного потока были применены электромагниты. Конструктивная схема элементарного модуля НбЦМРС с электромагнитами показана на рис. 2. При использовании электромагнитов, цилиндрическая распылительная система приобретает качества, несвойственные распылительной системе планарного типа. Рассмотрим это подробнее.

В МРС несбалансированного типа (как в планарной, так и в цилиндрической) имеется несоответствие характера распределения плотности тока ионов ассистирования, плотности потока атомных частиц в плоскости подложки. Рисунок 3d иллюстрирует характер этих распределений на подложке диаметром 100 мм при удалении подложки от катода МРС на 75 мм. Видно, что максимальный поток ионов ассистирования сосредоточен в центре подложки. Это может быть причиной существенного отличия условий ионного ассистирования на периферии и в центре подложки.

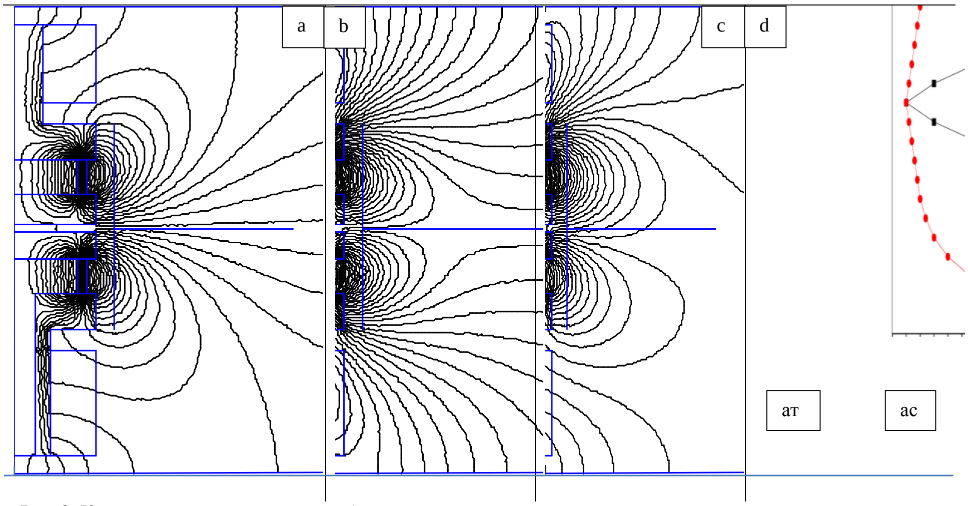


Рис. 3. Картина магнитного поля в несбалансированной цилиндрической магнетронной системе: a – картина сбалансированного магнитного поля в НбЦМРС; b – симметрично несбалансированное магнитное поле; c – асимметрично несбалансированное магнитное поле; d – характер распределения плотности тока ионов ассистирования (ас) и нейтральных атомов (ат) на подложке при нанесении покрытия в НбЦМРС

Дополнительные источники магнитного поля в виде электромагнитов позволяют управлять конфигурацией магнитного поля в области магнетронного разряда. На рис. 3a показана картина сбалансированного магнитного поля (электромагниты обесточены). Рисунок 3b иллюстрирует картину магнитного поля при симметричной несбалансированности магнитного поля (токи в электромагнитах равны). На рис. 3c показана картина магнитного поля при асимметричном характере несбалансированности (запитан только верхний электромагнит). Видно, что направление выхода электронов из магнитной ловушки изменяется. Таким образом было показано, что электромагниты позволяют управлять направлением потока ионов ассистирования.

НбЦМРС позволяет производить обработку деталей, удаленных от катода магнетрона на расстояние до 250 мм. Это позволяет использовать НбЦМРС для нанесения покрытий на внутренние и наружные рабочие поверхности. В стандартных технологических установках (например «Булат», ННВ) имеется возможность установки плазменного устройства на оси вакуумной камеры, что позволяет организовать обработку деталей 3d геометрии с помощью НбЦМРС. В этом случае желательно, чтобы оснастка для установки обрабатываемых изделий имела дополнительную функцию перемещения по высоте вакуумной камеры.

Плазменные устройства были испытаны. Получены образцы наноструктурированных покрытий. Выявлены некоторые особенности их эксплуатации. Так, для нагрева ионной бомбардировкой деталей массой 7-10 кг требуется времени больше, чем для их ионной очистки и активации. За время нагрева детали может происходить ионное травление прецизионных рабочих поверхностей, обработанных до чистоты R_a 0,1. Противоречие было разрешено применением гелия в качестве рабочего газа. Использовалось то, что коэффициент распыления для гелия существенно ниже, чем для аргона. Ионная очистка выполнялась ионами аргона.

При нанесении покрытий хрома, титана, алюминия и их нитридов с ионным ассистированием были получены покрытия с показателями микротвердости, существенно превышающими микротвердость массивного металла. Так микротвердость хромового покрытия достигала 18 ГПа. Микротвердость покрытия из титана ВТ1-1 равнялась – 10-11 ГПа. Титановый катод НбЦМРС со вставками из алюминия (см. рис. 2 «В») был использован для получения покрытий Ti-Al и (Ti-Al)N. Получена микротвердость 12 ГПа и 38 ГПа соответственно. При нанесении хрома повышению напряжения смещения на подложке от 60 В до 200 В соответствовал рост микротвердости и одновременное падении темпа конденсации покрытия. Факт наноструктурированности полученных покрытий был установлен рентгеноструктурным анализом по уширению рефлекса хрома. Производилось наноиндентирование покрытий. Для покрытия хрома на титане значение отношения нанотвердости к приведенному модулю упругости составило величину 0,1145, что, согласно [11], свидетельствует о наноструктурированности покрытия.

Ионно-плазменная обработка внутренних поверхностей с использованием разработанных устройств магнетронного типа имеет свои особенности, изучение которых требует совершенствования конструкции технологических плазменных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gleiter H. Nanostructured materials : basic concepts and microstructure / H. Gleiter // Acta material. – 2000. – V. 48. – P. 1-29.
2. Veprek S. L. Different approaches to superhard coatings and nanocomposites / S.L. Veprek, G.J. Maritza et. al. // Thin Solid Films. – 2005. – Vol. 476. – P. 1-29.
3. Musil J. The role of energy in formation of sputtered nanocomposite films / J. Musil, J. Ŝuna // Mater. Scien. Forum. – 2005. – Vol. 502. – P. 291-296.
4. Window B. Unbalanced magnetrons as sourses of high ion fluxes / B. Window, N.J. Savvides // Vac. Sci. Technol. A. – 1986. – Vol. 4. – No 3. – P. 453-507.
5. Свадковский И. В. Направление развития магнетронных распылительных систем / И.В. Свадковский // Доклады БГУИР. – 2007. – №2(18). – С. 112-121.
6. Патент на изобретение 93833U, Украина, МПК С23С 14/00. Ионно-плазменное устройство «гибридного» типа / Гришкевич А.Д. ; заявитель и патентообладатель ИТМ НАНУ и ГКАУ. - а201005613 ; заявл.11.05.2010 ; опубл. 10.03.2011, №5.
7. Патент на полезную модель №38845U, Украина, МПК С23С 14/00. Плазменное устройство / Гришкевич А.Д. ; заявитель и патентообладатель ИТМ НАНУ и ГКАУ. – u200808700 ; заявл.01.07.2008 ; опубл. 26.01.2009, №2.
8. Патент на изобретение №93471, Украина, МПК С23С 14/35, 14/56. Ионно-плазменная установка / Гришкевич А.Д., Гринюк С.И.; заявитель и патентообладатель ИТМ НАНУ и ГКАУ – а201005669 ; заявл. 11.05.2010; опубл. 10.02.2010, №23.
9. Патент на полезную модель № 89038, Украина, МПК С23С 14/00. Ионно-плазменное устройство интегрированного типа для обработки внутренних поверхностей / Гришкевич А.Д. ; заявитель и патентообладатель ИТМ НАНУ і ГКАУ. - u2013 12584 ; заявл. 28.10. 2013. ; опубл. 24.01.2014 , №1.
10. Заявка а201312581 Украина, МПК С23С 14/00. Несбалансированная цилиндрическая магнетронная распылительная система / Гришкевич А.Д. ; заявитель и патентообладатель ИТМ НАНУ и ГКАУ. – Заявл. 06.11 2013.
11. Фирстов С. А. Современные возможности метода инструментального индентирования / С.А. Фирстов, В.Ф. Горбань, Э.Б. Печковский // Вестник Тамбовского ГУ. – 2013. – Т. 18. – № 2-4. – С. 1933-1934.

REFERENCE

1. Gleiter, H. (2000), “Nanostructured materials: basic concepts and microstructure”, *Acta material*, vol. 48, pp. 1-29.
2. Veprek, S.L., Maritza, G.J. et. al. (2005), “Different approaches to superhard coatings and nanocomposites”, *Thin Solid Films*, vol. 476, pp. 1-29.

3. Musil, J. and Ŝuna, J. (2005), "The role of energy in formation of sputtered nanocomposite films", *Mater. Scien. Forum*, vol. 502, pp. 291-296.
4. Window, B. and Savvides, N.J. (1986), "Unbalanced magnetrons as sourses of high ion fluxes", *Vac. Sci. Technol. A.*, vol. 4, no. 3, pp. 453-507.
5. Svadkovski, I.V. (2007), "Directions of magnetron sputtering systems developments", *BGUIR reports*, no. 2(18), pp. 112-121.
6. A patent for an invention №93833U, Ukraine, IPC C23C 14/00. Ion-plasma device "hybrid" type / Grishkevich A. D. ; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. – a201005613 ; Filed 11.05.2010 ; Publication Date 10.03.2011, Bull. №5.
7. A patent for utility model №38845U, Ukraine, IPC C23C 14/00. Plasma device / Grishkevich A. D.; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. - u200808700; Filed 01.07.2008 ; Publication Date 26.01.2009, Bull. №2.
8. A patent for an invention №93471, Ukraine, IPC C23C 14/35, 14/56. Ion-plasma installation / Grishkevich A. D, Grinyuk S. I.; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. – a201005669; Filed. 11.05.2010 ; Publication Date. 10.02.2010, Bull. №23.
9. A patent for utility model № 89038, Ukraine, IPC C23C 14/00. Ion-plasma device type for the integrated treatment of internal surfaces / Grishkevich A. D ; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. - u2013 12 584; Field. 28.10. 2013 ; Publication Date. 24.01.2014, Bull. №1.
10. Application a201312581 Ukraine, IPC C23C 14/00. Unbalanced cylindrical sputtering magnetron system / Grishkevich A.D. ; Appl. 06.11 in 2013, applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU.
11. Firstov, S.A., Gorban, V.F. and Pechkovski, E.P. (2013), "Sovremennye vozmojyjsti metoda instrumentalnogo indentirovania", vol. 18, no. 2-4, pp. 1933-1934.

УДК 539.3, 539.8

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

[1]Земсков А. В., к. ф.-м. н., доцент, [2]Тарлаковский Д. В., д. ф.-м. н., профессор

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ул. Волоколамское ш., 4, Москва, 125993, Россия

[2]НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Мичуринский просп., 1, Москва, 119192, Россия

azemskov1975@mail.ru

Предлагается подход к решению начально-краевых задач упругой диффузии, основанный на построении интегральных соотношений, связывающих между собой правые части граничных условий различных типов. Предполагается, что одно из этих решений найдено. Тогда интегральные соотношения рассматриваются как уравнения относительно правых частей, эквивалентных другим условиям. Для их решения используются квадратурные формулы.

Ключевые слова: упругая диффузия, нестационарные задачи, преобразование Лапласа, упругий однокомпонентный слой, интегральные уравнения Вольтера.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ДИФУЗІЇ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

[1]Земсков А. В., к. ф.-м. н., доцент, [2]Тарлаковський Д. В., д. ф.-м. н., професор

[1]*Московський авіаційний інститут (національний дослідний університет), вул. Волоколамське ш., 4, Москва, 125993, Росія*

[2]*НДІ механіки МДУ ім. М.В. Ломоносова, Мічурінський просп., 1, Москва, 119192, Росія*

azemskov1975@mail.ru

Пропонується підхід до розв'язання початково-крайових задач пружної дифузії, заснований на побудові інтегральних співвідношень, що зв'язують між собою праві частини граничних умов різних типів. Передбачається, що одне з цих рішень знайдене. Тоді інтегральні співвідношення розглядаються як рівняння щодо правих частин, еквівалентних іншим умовам. Для їх вирішення використовуються квадратурні формули.

Ключові слова: пружна дифузія, нестаціонарні задачі, перетворення Лапласа, пружний однокомпонентний шар, інтегральні рівняння Вольтера.

METHOD SOLVING FOR THE UNSTEADY PROBLEM OF THE ELASTIC DIFFUSION WITH ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS

[1]Zemskov A. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[2]Tarlakovskiy D. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

[1]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamsk highway, 4, Moscow, 125993, Russia*

[2]*Institute of Mechanics (Lomonosov Moscow State University), Michurinsk boulevard, 1, Moscow, 119192, Russia*

azemskov1975@mail.ru

Solving many of unsteady problems in continuum mechanics including elastic diffusion problems is associated with serious mathematical challenges. These are due to the need of Laplace transform conversion used to solve problems of this type. Depending on certain types of boundary conditions, solution for these problems may be produced using the Fourier trigonometric series, which significantly simplifies the originals' finding algorithm [1]. The disadvantage of this method is the restricted application area, which is due to the specifics of boundary conditions.

In order to overcome this disadvantage, it is proposed approach to solving initial-boundary problems is based on integral relations which connect right sides of boundary conditions of different types. One of these solutions is assumed to be found. In this case, integral relations are considered as equations as regard to right sides which are equivalent to other conditions. Quadrature formulas are used to solve these equations. In this case, it will be sufficient to solve a single (benchmark) problem while all other problems will be reduced to it using the relations given below. The proposed method is demonstrated through the example of a one-dimensional unsteady problem for elastic diffusion layer.

Key words: diffusion with elasticity, unsteady state problems, Laplace transform, elastic one-component layer, Volterra integral equations.

Пусть имеется однородный слой, ограниченный поверхностями $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат). Одномерные физико-механические процессы в среде описываются моделью связанной упругой диффузии [1, 2]:

$$\ddot{u} = u'' - \alpha\eta', \quad \dot{\eta} = D\eta'' - \Lambda u''' ; \tag{1}$$

$$\eta\big|_{x=0} = f_{11}^1(\tau), \quad u\big|_{x=0} = f_{21}^1(\tau), \quad \eta\big|_{x=1} = f_{12}^1(\tau), \quad u\big|_{x=1} = f_{22}^1(\tau) ; \tag{2}$$

$$u\big|_{\tau=0} = \dot{u}\big|_{\tau=0} = \eta\big|_{\tau=0} = 0 , \tag{3}$$

где штрих обозначает производную по пространственной переменной x, а точки – производные по времени τ.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины в (1)-(3) (при одинаковом начертании они обозначены звёздочкой, которая в остальных формулах опускается):

$$x=\frac{x_3}{L},\quad u=\frac{u_3}{L},\quad \tau=\frac{ct}{L},\quad \eta^*=\frac{\eta}{n_0},\quad c^2=\frac{C_{3333}}{\rho},\quad \alpha=\frac{n_0\alpha_{33}}{C_{3333}},\ D=\frac{D_{33}g}{cL},$$

$$\Lambda=\frac{\Lambda_{3333}}{n_0 cL},\quad \Lambda_{3333}=\frac{n_0\alpha_{33}D_{33}}{RT_0},\quad f_{1k}^{1*}(\tau)=\frac{f_{1k}^1(\tau)}{n_0},\quad f_{2k}^{1*}(\tau)=\frac{f_{2k}^1(\tau)}{L}\quad (k=1,2),$$

где t – время; u_3 – перемещение вдоль оси Ox_3; T_0 – температура среды; $\eta=n-n_0$ – приращение концентрации; n_0 и n – начальная и текущая концентрации вещества; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; α_{ij} – коэффициенты, определяемые типом кристаллической решётки и характеризующие относительное объёмное изменение за счёт диффузии; R – универсальная газовая постоянная; D_{ij} – коэффициенты самодиффузии.

Для решения задачи (1)-(3) рассматриваем вспомогательную (эталонную) задачу, определяемую уравнениями (1), начальными условиями (3) и граничными условиями (правые части вторых и третьих равенств здесь и в (2) совпадают):

$$\left(\Lambda u''-D\eta'\right)\big|_{x=0}=f_{11}^2(\tau),\quad u\big|_{x=0}=f_{21}^1(\tau),\quad \left(\Lambda u''-D\eta'\right)\big|_{x=1}=f_{12}^2(\tau),\quad u\big|_{x=1}=f_{22}^1(\tau). \tag{4}$$

Ее решение найдено в работе [1] и в интегральной форме имеет вид (звездочка обозначает свёртку по времени):

$$u=\sum_{l=1}^{2}\left(G_{21l}*f_{1l}^2+G_{22l}*f_{2l}^1\right),\quad \eta=\sum_{l=1}^{2}\left(G_{11l}*f_{1l}^2+G_{12l}*f_{2l}^1\right), \tag{5}$$

$$G_{1k1}=\delta_{1k}H(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}G_{1k1n}(\tau)\cos\lambda_n x,\quad G_{2k1}=\sum_{n=1}^{\infty}G_{2k1n}(\tau)\sin\lambda_n x.$$

Здесь $G_{1kl}=\eta$, $G_{2kl}=u$ – функции Грина задачи (1), (3), (4), т.е., решения четырех задач (k, l – их номера), включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$\left(\Lambda G''_{2kl}-DG'_{1kl}\right)\big|_{x=0}=\delta_{1k}\delta_{1l}\delta(\tau),\quad G_{2kl}\big|_{x=0}=\delta_{2k}\delta_{1l}\delta(\tau),$$
$$\left(\Lambda G''_{2kl}-DG'_{1kl}\right)\big|_{x=1}=\delta_{1k}\delta_{2l}\delta(\tau),\quad G_{2kl}\big|_{x=1}=\delta_{2k}\delta_{2l}\delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака; δ_{ik} – символ Кронекера, $i=1,2$.

Полагая теперь, что решение эталонной задачи удовлетворяет равенствам $\eta(0,\tau)=f_{11}^1(\tau)$, $\eta(1,\tau)=f_{12}^1(\tau)$ и, учитывая, $f_{21}^2(\tau)=f_{21}^1(\tau)$, $f_{22}^2(\tau)=f_{22}^1(\tau)$, приходим к системе уравнений Вольтера типа свёртки относительно функций $f_{11}^2(\tau)$ и $f_{12}^2(\tau)$:

$$\begin{aligned}G_{111}(0,\tau)*f_{11}^2(\tau)-G_{111}(1,\tau)*f_{12}^2(\tau)&=\varphi_1(\tau),\\ G_{111}(1,\tau)*f_{11}^2(\tau)-G_{111}(0,\tau)*f_{12}^2(\tau)&=\varphi_2(\tau),\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\varphi_1(\tau)=f_{11}^1(\tau)-G_{121}(0,\tau)*f_{21}^1(\tau)+G_{121}(1,\tau)*f_{22}^1(\tau),$$
$$\varphi_2(\tau)=f_{12}^1(\tau)-G_{121}(1,\tau)*f_{21}^1(\tau)+G_{121}(0,\tau)*f_{22}^1(\tau).$$

Здесь учтены установленные в [1] свойства симметрии функций Грина.

Основной сложностью при решении системы (6) является то, что функции $G_{111}(0,\tau)$ и $G_{111}(1,\tau)$ имеют особенность при $\tau=0$. Для исследования характера особенностей поступим следующим образом. В пространстве изображений Лапласа функция влияния $G_{111}(x,\tau)$ имеет вид [1] (s – параметр преобразования Лапласа):

$$G_{111}^L(x,s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{111n}^L(s)\cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n,$$

где

$$G_{111n}^L = \frac{2\left(s^2+\lambda_n^2\right)}{P\left(\lambda_n^2, s\right)}, \quad P\left(\lambda_n^2, s\right) = \left(s^2+\lambda_n^2\right)\left(s+D\lambda_n^2\right) - \alpha\Lambda\lambda_n^4. \tag{7}$$

Для функции G_{111n}^L в формуле (7) сделаем следующее преобразование:

$$G_{111n}^L = \frac{2}{s+D\lambda_n^2} + \frac{2\alpha\Lambda\lambda_n^4}{Q\left(\lambda_n^2, s\right)}, \quad Q\left(\lambda_n^2, s\right) = \left(s+D\lambda_n^2\right)P\left(\lambda_n^2, s\right).$$

Тогда, оригинал функции $G_{111}^L(x,s)$ имеет следующее представление:

$$G_{111}(x,\tau) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D\pi^2\tau}\right) + 2\alpha\Lambda\sum_{n=1}^{\infty} G_{111n}(\tau)\cos\lambda_n x, \; \vartheta_3(x,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2\pi n x, \tag{8}$$

где

$$G_{111n}(\tau) = e^{\gamma_n\tau}\left(A_{n1}\cos\beta_n\tau - A_{n2}\sin\beta_n\tau\right) + A_{n3}e^{s_{3n}\tau} + A_{n4}e^{-D\lambda_n^2\tau},$$

s_{1n}, s_{2n} – комплексные, а s_{3n} – действительный корень многочлена $P\left(\lambda_n^2, s\right)$, $\gamma_n = \operatorname{Re} s_{1n} < 0$, $\beta_n = \operatorname{Im} s_{1n}$, $s_{2n} = \bar{s}_{1n}$, $s_{3n} < 0$; $\vartheta_3(x,q)$ – тета-функция Якоби [3]; коэффициенты $A_{nq}, q = \overline{1,4}$ находятся по формулам:

$$A_{n1} = 2\operatorname{Re}\frac{\lambda_n^4}{Q'\left(\lambda_n^2, s_{1n}\right)}, \; A_{n2} = 2\operatorname{Im}\frac{\lambda_n^4}{Q'\left(\lambda_n^2, s_{1n}\right)}, \; A_{n3} = \frac{\lambda_n^4}{Q'\left(\lambda_n^2, s_{3n}\right)}, \; A_{n4} = \frac{\lambda_n^4}{Q'\left(\lambda_n^2, -D\lambda_n^2\right)}.$$

В работе [1] получены приближённые значения корней многочлена $P\left(\lambda_n^2, s\right)$. На основании этих равенств можно сделать вывод, что общий член $G_{111n}(\tau)$ имеет порядок $O\left(n^{-2}\right)$ и соответствующий ряд в (8) сходятся абсолютно $\forall x$ при $\tau \ge 0$. Функция $G_{111}(1,\tau)$ ограничена при $\tau > 0$, а функция $G_{111}(0,\tau)$ в окрестности $\tau = 0$ имеет интегрируемую особенность порядка $1/2$ [3]. В этом случае, следуя [4], домножим каждое из уравнений (6) на $d\tau/(\xi-\tau)^{1/2}$ и проинтегрируем от 0 до ξ. Тогда, получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\xi} K^1(\xi-t)\, f_{11}^2(t)\,dt - \int_0^{\xi} K^2(\xi-t)\, f_{12}^2(t)\,dt = \Phi^1(\xi), \\ &\int_0^{\xi} K^2(\xi-t)\, f_{11}^2(t)\,dt - \int_0^{\xi} K^1(\xi-t)\, f_{12}^2(t)\,dt = \Phi^2(\xi), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$K^1(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{111}(0,\zeta-\tau)d\tau}{\tau^{1/2}}, \; K^2(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{111}(1,\zeta-\tau)d\tau}{\tau^{1/2}}, \; \Phi^k(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{(\xi-\tau)^{1/2}},$$

причём ядра $K^k(\zeta)$ не имеют особенностей в нуле и $\Phi^k(0) = 0, \, k = 1,2$.

Для решения системы (9) удобно использовать квадратурные формулы. Разбиваем область $[0, T]$ изменения времени τ на N отрезков точками $\tau_i = ih$ с равномерным шагом $h = T/N$ и вводим сеточные функции $y_i^k = f_{1k}^2(\tau_i)$, $K_i^k = K^k(\tau_i)$. Каждый из интегралов в (9) при $\tau = \tau_i$ приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_0^{\tau_i} K^l(\tau_i - t) f_{1k}^2(t)\,dt \approx hS_{i+1/2}^{lk} + hK_{1/2}^l y_{i-1/2}^k, \quad S_{i-1/2}^{lk} = \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j+1/2}^l y_{j-1/2}^k \ (k, l = 1, 2),$$

где узлы находятся по формулам:

$$\tau_{i-1/2} = \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} = h\left(i - \frac{1}{2}\right), \quad \tau_{i-j+1/2} = \tau_i - \tau_{j-1/2} = h\left(i - j + \frac{1}{2}\right), \quad i = \overline{1, N}.$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($i \geq 1$):

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{i-1/2} = \mathbf{b}_{i-1/2}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} K_{1/2}^1 & -K_{1/2}^2 \\ -K_{1/2}^2 & K_{1/2}^1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} y_{i-1/2}^1 \\ y_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} b_{i-1/2}^1 \\ b_{i-1/2}^2 \end{pmatrix},$$

$$b_{i-1/2}^1 = \Phi^1(\tau_{i-1/2})/h - S_{i-1/2}^{11} + S_{i-1/2}^{22}, \quad b_1^2 = -\Phi^2(\tau_{i-1/2})/h + S_{i-1/2}^{21} - S_{i-1/2}^{12}, \ i \geq 1.$$

Решение системы (10) имеет вид:

$$y_{i-1/2}^1 = \frac{K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^2}{\left(K_{1/2}^1\right)^2 - \left(K_{1/2}^1\right)^2}, \quad y_{i-1/2}^2 = \frac{K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^2}{\left(K_{1/2}^1\right)^2 - \left(K_{1/2}^1\right)^2}.$$

Подставив это решение в (5), получим решение исходной задачи (1)-(3).

Замечание. Так как функция $G_{111}(x,\tau)$ имеет особенности при $\tau = 0$, то численное вычисление свёрток (6) затруднительно. Для решения этой проблемы проинтегрируем первое равенство по τ от 0 до ξ, получим:

$$\int_0^{\xi} \eta(x,\tau)\,d\tau = \int_0^{\xi} G(x, \xi - t) f_{11}^2(t)\,dt - \int_0^{\xi} G(1 - x, \xi - t) f_{12}^2(t)\,dt,$$

где

$$G(x, \xi - t) = \int_t^{\xi} G_{111}(x, \tau - t)\,d\tau =$$

$$= \xi - t + \frac{2}{D}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha\Lambda A_{n4}}{\lambda_n^2}\left[1 - e^{-D\lambda_n^2(\xi - t)}\right]\cos\lambda_n x + 2\alpha\Lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n3}}{s_{3n}}\left[e^{s_{3n}(\xi - t)} - 1\right]\cos\lambda_n x +$$

$$+ 2\alpha\Lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n1}}{|z_{1n}|^2}\left\{e^{-\gamma_n(\xi - t)}\left[\beta_n \sin\beta_n(\xi - t) - \gamma_n \cos\beta_n(\xi - t)\right] + \gamma_n\right\}\cos\lambda_n x +$$

$$+ 2\alpha\Lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n2}}{|z_{1n}|^2}\left\{e^{-\gamma_n(\xi - t)}\left[\beta_n \cos\beta_n(\xi - t) + \gamma_n \sin\beta_n(\xi - t)\right] - \beta_n\right\}\cos\lambda_n x.$$

Данное преобразование позволяет улучшить сходимость рядов, входящих в $G_{111}(x,\tau)$, что позволяет сократить вычисления при численной реализации алгоритма.

Теперь, выполнив аналогичное разбиение промежутка $[0,T]$, с помощью квадратурных формул придём к системе уравнений относительно $\eta(x,\xi_i)$. Решение этой системы строится аналогично (11). С помощью формулы симметричных прямоугольников получим:

$$\eta(x,\xi_{i-1/2})=-\sum_{j=1}^{i-1}\eta(x,\xi_{j-1/2})+\sum_{j=1}^{i}G(x,\xi_{i-j+1/2})y_{j-1/2}^{1}-\sum_{j=1}^{i-1}G(1-x,\xi_{i-j+1/2})y_{j-1/2}^{2}.$$

Функция $G_{211}(x,\tau)$ не обладает особенностью при $\tau=0$, поэтому, для численного вычисления функции $u(x,\tau)$ можно воспользоваться формулами (6) напрямую.

УЧЁТ СИММЕТРИИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАДАЧИ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ

В ряде случаев, при решении задач упругой диффузии можно обойтись без построения соотношений между правыми частями граничных условий. Существуют возможности непосредственного выражения функций влияния различных задач друг через друга. В качестве примера, рассмотрим задачу, включающую в себя уравнения (1), начальные условия (2) и следующие краевые условия:

$$\eta|_{x=0}=f_{11}^{3}(t),\quad (u'-\alpha\eta)|_{x=0}=f_{21}^{3}(t),$$
$$\eta|_{x=1}=f_{12}^{3}(t),\quad (u'-\alpha\eta)|_{x=1}=f_{22}^{3}(t).$$

Решение этой задачи будем искать в форме, аналогичной (5):

$$u=\sum_{l=1}^{2}\left(\tilde{G}_{21l}*f_{1l}^{3}+\tilde{G}_{22l}*f_{2l}^{3}\right)\quad \eta=\sum_{l=1}^{2}\left(\tilde{G}_{11l}*f_{1l}^{3}+\tilde{G}_{12l}*f_{2l}^{3}\right),$$

где

$$\tilde{G}_{1kl}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_{1kln}(\tau)\sin\lambda_n x,\quad \tilde{G}_{2kl}(x,\tau)=\delta_{2k}\tilde{G}_{2kl0}(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_{2kln}(\tau)\cos\lambda_n x, \tag{11}$$

$\tilde{G}_{jkln}(\tau)$, $k=1,2$ – функции, подлежащие определению.

Подставив (5) и (11) в (1) и применив преобразование Лапласа, получим соответственно при $n\ge 1$:

$$s^2G_{2kln}^{L}=-\lambda_n^2G_{2kln}^{L}+\alpha\lambda_nG_{1kln}^{L},\quad sG_{1kln}^{L}=-D\lambda_n^2G_{1kln}^{L}+\Lambda\lambda_n^3G_{2kln}^{L};$$
$$s^2\tilde{G}_{2kln}^{L}=-\lambda_n^2\tilde{G}_{2kln}^{L}-\alpha\lambda_n\tilde{G}_{1kln}^{L},\quad s\tilde{G}_{1kln}^{L}=-D\lambda_n^2\tilde{G}_{1kln}^{L}-\Lambda\lambda_n^3\tilde{G}_{2kln}^{L}.$$

Переписав последнюю систему в виде

$$s^2\tilde{G}_{2kn}^{L}=-\lambda_n^2\tilde{G}_{2kn}^{L}+\alpha\lambda_n\left(-\tilde{G}_{1kn}^{L}\right),\quad s\left(-\tilde{G}_{1kn}^{L}\right)=-D\lambda_n^2\left(-\tilde{G}_{1kn}^{L}\right)+\Lambda\lambda_n^3\tilde{G}_{2kn}^{L}$$

получим

$$\tilde{G}_{2kln}^{L}=G_{2kln}^{L},\quad \tilde{G}_{1kln}^{L}=-G_{1kln}^{L}. \tag{12}$$

Определим теперь $\tilde{G}_{2kl0}(\tau)$. Это удобно сделать отдельно. Применив к задаче (1), (3), с граничными условиями

$$(u'-\alpha\eta)|_{x=0}=f_{21}^{3}(\tau),\quad \eta|_{x=0}=f_{11}^{3}(\tau),$$
$$(u'-\alpha\eta)|_{x=1}=0,\quad \eta|_{x=1}=0$$

преобразование Лапласа,

$$s^2 u^L = u''^L - \alpha\eta'^L, \quad s\eta = D\eta''^L - \Lambda u'''^L,$$

затем редукцию к нулевым граничным условиям

$$u^L = U + \varphi, \quad \eta = \mathrm{H} + \psi,$$

где

$$\psi(x,s) = \psi^*(x) f_{11}^L(s), \quad \varphi(x,s) = \varphi^*(x)\left(f_{21}^L(s) + \alpha f_{11}^L(s)\right),$$

$$\psi^*(x) = 1 - x, \quad \varphi^*(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

и разложение в ряды Фурье

$$U(x,s) = U_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(s)\cos\lambda_n x, \quad \mathrm{H}(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{H}_n(s)\sin\lambda_n x,$$

$$\varphi(x,s) = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)\cos\lambda_n x, \quad \psi(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(s)\sin\lambda_n x,$$

получим для нулевой гармоники U_0 следующую задачу:

$$s^2 U_0 + s^2\varphi_0 = -f_{11}^{3L}. \tag{13}$$

Здесь учтено, что

$$\psi' = -f_{11}^{3L}(s), \quad \varphi'' = -\left(f_{21}^{3L}(s) + \alpha f_{11}^{3L}(s)\right).$$

Решая (13), находим:

$$U_0 = -\frac{1}{s^2} f_{21}^{3L} - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad u_0^L = -\frac{1}{s^2} f_{21}^{3L} \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}_{2kl0}^L = -\frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}_{2kl0} = -\tau H(\tau).$$

В следующей таблице предложена условная классификация задач упругой диффузии, в основе построения которой используется идеология классификации задач математической физики.

Таблица 1 – Классификация задач механодиффузии

№ группы	**Вид граничных условий**	**Классификация**
(I)	$\eta\big\|_{x=0} = f_{11}(t), \quad u\big\|_{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta\big\|_{x=1} = f_{12}(t), \quad u\big\|_{x=1} = f_{22}(t),$	Первая краевая задача
(II)	$(\Lambda u'' - D\eta')\big\|_{x=0} = f_{11}(t), \quad (u' - \alpha\eta)\big\|_{x=0} = f_{21}(t),$ $(\Lambda u'' - D\eta')\big\|_{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha\eta)\big\|_{x=1} = f_{22}(t),$	Вторая краевая задача
(III_a)	$(\Lambda u'' - D\eta')\big\|_{x=0} = f_{11}(t), \quad u\big\|_{x=0} = f_{21}(t),$ $(\Lambda u'' - D\eta')\big\|_{x=1} = f_{12}(t), \quad u\big\|_{x=1} = f_{22}(t),$ $\eta\big\|_{x=0} = f_{11}(t), \quad (u' - \alpha\eta)\big\|_{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta\big\|_{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha\eta)\big\|_{x=1} = f_{22}(t);$	Третья (смешанная) краевая задача

Продовження таблиці 1

(III$_б$)	$\left(\Lambda u''-D\eta'\right)\Big\vert_{x=0}=f_{11}(t),\quad u\vert_{x=0}=f_{21}(t),$ $\eta\vert_{x=1}=f_{12}(t),\quad \left(u'-\alpha\eta\right)\Big\vert_{x=1}=f_{22}(t);$	
	$\left(\Lambda u''-D\eta'\right)\Big\vert_{x=0}=f_{11}(t),\quad u\vert_{x=0}=f_{21}(t),$ $\eta\vert_{x=1}=f_{12}(t),\quad u\vert_{x=1}=f_{22}(t);$	
	$\left(\Lambda u''-D\eta'\right)\Big\vert_{x=0}=f_{11}(t),\quad u\vert_{x=0}=f_{21}(t),$ $\left(\Lambda u''-D\eta'\right)\Big\vert_{x=1}=f_{12}(t),\quad \left(u'-\alpha\eta\right)\Big\vert_{x=1}=f_{22}(t).$	

Данная таблица не претендует на полноту, но отражает наиболее типичные граничные условия, сочетающие кинематику и динамику механодиффузионных процессов на границах рассматриваемых сред.

Краевые задачи с граничными условиями (III$_а$) допускают возможность построения решений в виде неполных рядов Фурье [1] и кроме того, как показано в данной работе, их функции Грина связаны между собой с помощью соотношений (12). Решения остальных задач можно получить, используя предложенный в работе метод эквивалентных граничных условий. В качестве эталонной задачи можно выбрать любую из задач группы (III$_а$).

Пример. Для иллюстрации предложенного метода эквивалентных граничных условий, рассмотрим задачу (1)-(3), с граничными условиями вида:

$$\eta\vert_{x=0}=f_{11}^{1}(\tau)=H(\tau),\quad u\vert_{x=0}=0,\quad \eta\vert_{x=1}=0,\quad u\vert_{x=1}=0,$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Рассматриваемая среда – алюминий, имеющий следующие характеристики:

$$C_{3333}=1.26\cdot 10^{11}\,\frac{Н}{м^2},\quad T_0=773\,К,\quad \rho=2700\,\frac{кг}{м^3},\quad D_{33}=6.71\cdot 10^{-6}\,\frac{м^2}{с},\quad L=1\,м.$$

Результаты численных вычислений для перемещений в различных точках слоя по формулам (5) при количестве точек разбиения $N=100$ и количестве членов рядов Фурье $M=100$ показаны на рис. 1.

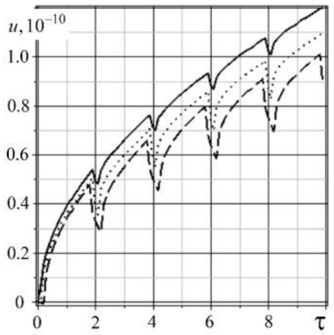


Рис. 1. Зависимость перемещений от времени: $x=0.05$ – сплошная линия, $x=0.12$ – точечная линия, $x=0.18$ – пунктирная линия

Отметим, что при уменьшении вдвое шага разбиения и увеличения вдвое количества членов ряда Фурье графики совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zemskov A. V. Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer / A.V. Zemskov, D.V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Volume 203, Issue 2. – P. 221-238.
2. Tarlakovskii D. V. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media / D.V. Tarlakovskii, V.A. Vestyak, A.V. Zemskov // Encyclopedia of thermal stress, volume 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P 1064-1071.
3. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям / А.М. Журавский. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1941. – 235 с.
4. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М. : Факториал, 1998. – 384 с.

REFERENCE

1. Zemskov, A.V. and Tarlakovskiy, D.V. (2014), “Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer”, Journal of Mathematical Sciences, vol. 203, issue 2, pp. 221-238.
2. Tarlakovskii, D.V., Vestyak, V.A. and Zemskov, A.V. (2014), “Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media”, Encyclopedia of thermal stress, vol. 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, pp. 1064-1071.
3. Zhuravskii, A.M. (1941), *Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam* [Handbook of elliptic functions], Akademiya nauk, Moscow.
4. Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (1998*) Spravochnik po integral'nym uravneniyam: Tochnye resheniya* [Handbook of Integral Equations: Exact Solutions], Faktorial, Moscow.

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ИХ ДЕМПФИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРОМ И АКТУАТОРОМ

[1]Киричок И. Ф., д. ф.-м. н., профессор, [2]Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

[1]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»,
просп. Победы, 37, Киев, 03057, Украина

term@inmech.kiev.ua, karn@inmech.kiev.ua

Представлены результаты исследования вынужденных резонансных осесимметричных колебаний и диссипативного разогрева замкнутой сферической оболочки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. Исследовано влияние температурной зависимости комплексных характеристик пассивного материала на амплитуду колебаний и температуру диссипативного разогрева. Показана возможность активного

демпфирования указанных колебаний при помощи совместного использования пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.

Ключевые слова: сферическая оболочка, диссипативный разогрев, сенсоры и актуаторы, активное демпфирование.

РЕЗОНАНСНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЗАМКНУТОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ І ЇХ ДЕМПФУВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРОМ ТА АКТУАТОРОМ

[1]Киричок І. Ф., д. ф.-м. н., професор, [2]Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,*
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

[2]*Національний технічний університет України «КПІ»,*
просп. Перемоги, 37, Київ, 03057, Україна

term@inmech.kiev.ua, karn@inmech.kiev.ua

Представлено результати дослідження вимушених резонансних осесиметричних коливань і дисипативного розігріву замкнутої сферичної оболонки з п'єзоелектричними сенсором та актуатором. Досліджено вплив температурної залежності комплексних характеристик пасивного матеріалу на амплітуду коливань і температуру дисипативного розігріву. Показана можливість активного демпфування вказаних коливань за допомогою сумісного використання п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів.

Ключові слова: сферична оболонка, дисипативний розігрів, сенсори та актуатори, активне демпфування.

REZONANCE AXISYMMETRIC VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF VISCOELASTIC SPHERICAL SHELL AND THEIR DAMPING BY PIEZOELECTRIC SENSOR AND ACTUATOR

[1]*Kirichok I. F., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,*
[2]*Karnaukhova T. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor*

[1] *S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine,*
Nesterova str., 3, Kiev, 03057, Ukraine

[2]*National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»,*
Prospect Peremohy, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine

Results of the investigations of the forced resonant axisymmetric vibrations and dissipative heating of closed spherical shell with piezoelectric sensor and actuator are preduced. Influence of temperature' dependence of complex characteristics of passive material on amplitude and temperature of dissipative heating are investigated. Possibility of active damping of the vibrations is shown by the using of the piezoelectric sensors and actuators is showen.

Key words: spherical shell, resonance vibration, dissipative heating , sensors and actuators, active damping.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы для снижения уровня колебаний тонкостенных оболочечных элементов конструкций из упругих и вязкоупругих материалов находят широкое применение методы активного демпфирования с использованием пьезоэлектрических включений, выполняющих роль сенсоров и актуаторов [1-3]. Зачастую такие элементы представляют собой трехслойную систему и подвержены осесимметричному гармоническому нагружению. Построению моделей электротермомеханического осесимметричного поведения моногармонически нагруженных оболочек из неупругих материалов с пьезоактивными слоями, выполняющими роль сенсоров или актуаторов, с учетом температурной зависимости свойств материалов, а также решению конкретных связанных задач посвящены работы [4-8] и др. В частности, в статьях [5, 7, 8] получены аналитические и численные результаты о гармонических осесимметричных колебаниях и виброразогреве круглых пластинок и цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Демпфирование таких элементов математически реализуется путем использования обратной связи, вносящей вклад в жесткостные и диссипативные характеристики объекта.

В данной статье решается задача о радиальных колебаниях и диссипативного разогреве замкнутой сферической оболочки из пассивного (без пьезоэффекта) вязкоупругого материала и их демпфирование пьезоэлектрическими слоями, один из которых является сенсором, а другой – актуатором. Демпфирование реализуется путем подключения механизма обратной связи, влияющего на диссипативные характеристики системы. Учитывается зависимость вязкоупругих свойств пассивного материала оболочки от температуры диссипативного разогрева.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим трехслойную замкнутую сферическую оболочку, отнесенную к сферической системе координат φ, θ, z с началом координаты $z = 0$ на срединной поверхности среднего слоя радиуса R и толщиной h_0. Внутренний $(z \le -h_0/2)$ и внешний $(z \ge h_0/2)$ слои толщиной h_1 и h_2, соответственно, изготовлены из поляризованной по толщине упругой пьезокерамики. Между пассивным и пьезоактивными слоями, а также на внешних поверхностях пьезослоев нанесены бесконечно тонкие электроды. На внутренних электродах заданы электрические потенциалы ${}^m\varphi(\pm h_0/2) = 0 \ \ (m = 1,2)$. Принимаем, что слой толщиной h_1 выполняет роль сенсора, а слой толщиной h_2 является актуатором.

Оболочка нагружена центральносимметричным поверхностным давлением $q_z = q\cos\omega t$, гармонически изменяющемся во времени t с постоянной амплитудой q и частотой ω, близкой к резонансной. Кроме того, к электродам актуатора для компенсации его действия подводится разность электрических потенциалов с амплитудой ${}^2\varphi(h_0/2 + h_2) - {}^2\varphi(h_0/2) = V_a$ с частотой механического нагружения. При этом на разомкнутых электродах сенсора возникает разность электрических потенциалов неизвестной амплитуды ${}^1\varphi(-h_0/2 - h_1) - {}^1\varphi(-h_0/2) = V_s$ и на электродированных поверхностях s выполняется электрическое граничное условие

$$\iint_S {}^1D_z ds = 0. \qquad (1)$$

Здесь ${}^1D_z$ – нормальная составляющая электрической индукции. На поверхностях оболочки реализуется конвективный теплообмен с внешней средой, температура T_0 которой равна начальной температуре оболочки.

Рассматривая центральносимметричные радиальные колебания и диссипативный разогрев указанной оболочки, предполагаем, что вследствие выбранной геометрии и характера нагружения для описания ее механического поведения по всему пакету слоев справедливы гипотезы Кирхгоффа-Лява безмоментной теории оболочек. Относительно электрических переменных имеют место адекватные допущения [3], согласно которым $D_z = const$ является постоянной по толщине пьезослоев. Вязкоупругие свойства изотропного материала пассивного слоя описываются концепцией комплексных модулей [9], зависящих от температуры. Рассматривая установившийся процесс диссипативного разогрева, постулируем температуру постоянной по толщине пакета.

На основании принятых предположений из трехмерных определяющих соотношений для поляризованной вдоль оси z пьезокерамики получаем такие выражения для пьезоактивних слоев:

$$ {}^m\sigma_\theta = {}^m c_{11}\varepsilon_\theta - {}^m b_{31}\,{}^m E_z; \quad {}^m D_z = 2\,{}^m b_{31}\varepsilon_\theta - {}^m\tilde{\varepsilon}_{33}\,{}^m E_z; \quad \varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad {}^m E_z = -\frac{d\,{}^m\varphi}{dz}; \qquad (2)$$

$$ {}^m c_{11} = \frac{1}{{}^m s_{11}^E\left(1 - {}^m\nu_E\right)}; \quad {}^m\nu_E = -\frac{{}^m s_{12}^E}{{}^m s_{11}^E}; \quad {}^m b_{31} = \frac{{}^m d_{31}}{{}^m s_{11}^E(1 - {}^m\nu_E)}; \quad {}^m\tilde{\varepsilon}_{33} = {}^m\varepsilon_{33}^T - 2\,{}^m b_{31}\,{}^m d_{31};$$

${}^m s_{11}^E$, ${}^m s_{12}^E$, ${}^m d_{31}$, ${}^m\varepsilon_{33}^T$, – податливости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезокерамики; $w = w' + iw''$ – комплексная амплитуда прогиба.

Для вязкоупругого материала пассивного слоя h_0 справедливы первое и третье равенства из (2), в которых необходимо положить ${}^m c_{11} = {}^0 c_{11} = E(T)/(1-\nu)$, ${}^m b_{31} = 0$, $E = E' + iE''$ – комплексный модуль вязкоупругости, зависящий от температуры; $\nu = const$ – коэффициент Пуассона.
Путем интегрирования зависимостей (2) по пакету слоев оболочки получаем выражение для усилия:

$$N_\theta = D_N \frac{w}{R} - {}^1 b_{31} V_s + {}^2 b_{31} V_a; \quad \left(D_N = {}^1 c_{11} h_1 + {}^2 c_{11} h_2 + {}^0 c_{11} h_0\right). \tag{3}$$

Электрическая индукция в пьезоэлектрическом сенсоре определяется по формуле:

$${}^1 D_z = {}^1 b_{31} \frac{w}{R} + {}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} \frac{V_s}{h_1}. \tag{4}$$

Из условия (1) с учетом (4) находим выражение для вычисления возникающего на электродах сенсора электрического потенциала

$$V_s = -2 \frac{{}^1 b_{31} h_1}{{}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} R} w. \tag{5}$$

В рамках безмоментной теории уравнения гармонических колебаний рассматриваемой оболочки относительно амплитудных переменных имеет вид (множитель $e^{i\omega t}$ опущен):

$$2N_\theta - \rho_* R \omega^2 w = \tilde{q}, \tag{6}$$

где $\rho_* = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_0 h_0$, $\tilde{q} = R(h_0 + h_1 + h_2) q$; ρ_1, ρ_2 и ρ_0 – удельные плотности пьезокерамики и пассивного материала.
Для активного демпфирования механических колебаний оболочки путем подвода к пьезоактуатору разности электрических потенциалов V_a используем механизм обратной связи, математически реализуемый линейной зависимостью показателя V_a и производной по времени показателя сенсора V_s, так что

$$V_a = -i\omega G_{as} V_s. \tag{7}$$

Здесь G_{as} – параметр управления, влияющий на диссипативные свойства системы. Знак $<->$ указывает на противофазное механической нагрузке подведение потенциала V_a к актуатору.
В силу принятых допущений и условий теплообмена установившаяся температура диссипативного разогрева оболочки определяется соотношением:

$$-2\alpha_s \theta + \frac{\omega}{(1-\nu) R^2} E''(\theta) |w|^2 = 0 \tag{8}$$

в котором $|w| = \left(w'^2 + w''^2\right)^{1/2}$, $\theta = T - T_0$; α_s – коэффициент теплообмена с внешней средой.
Подставляя выражение (3) в уравнение (6) и учитывая (5), (7), после несложных преобразований находим:

$$|w| = \tilde{q} \Big/ \left(\Delta'^2 + \Delta''^2\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $\Delta' = 2\left(D_N^0 + \gamma_2 + m_1 E'(\theta)\right) - R\rho_* \omega^2$; $\Delta'' = 2\left[\gamma_1 + m_1 E''(\theta)\right]$; $D_N^0 = \left({}^1 c_{11} h_1 + {}^2 c_{11} h_2\right)/R$; $m_1 = h_0 / \left[(1-\nu) R\right]$; $\gamma_2 = 2\,{}^1 b_{31}^2 h_1 / \left({}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} R\right)$; $\gamma_1 = \omega G_{as}\, {}^2 b_{31} \gamma_2 / {}^1 b_{31}$.
Комбинация соотношений (8), (9) приводит к трансцендентному уравнению относительно неизвестного значения температуры θ при заданных функциях $E'(\theta)$, $E''(\theta)$.
Примем, что составляющие комплексного модуля вязкоупругого материала являются линейной функцией температуры виброразогрева, так что

$$E'(\theta) = E_0' + E_1'\theta; \quad E''(\theta) = E_0'' + E_1''\theta. \tag{10}$$

С учетом зависимостей (10) из уравнений (8), (9) для вычисления температуры виброразогрева оболочки получаем кубическое уравнение:

$$a_3\theta^3 + a_2\theta^2 + a_1\theta - m_{30}\tilde{q}^2 = 0\,. \qquad (11)$$

Соотношение для вычисления амплитуды прогиба (9) приобретает вид:

$$|w| = \tilde{q}\Big/\left(a_0 + a_2\theta + a_3\theta^2\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

В зависимостях (11), (12) обозначено:

$$a_0 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2;\quad a_1 = a_0 - m_{31}\tilde{q}^2;\quad a_2 = 2\left(d_1\Delta_1 + d_2\Delta_2\right);\quad a_3 = d_1^2 + d_2^2;$$

$$\Delta_1 = D_N^0 + \gamma_2 + m_1E_0' - R\rho_*\omega^2;\quad \Delta_2 = \gamma_1 + m_1E_0'';\quad d_1 = 2m_1E_1';\quad d_2 = 2m_1E_1'';$$

$$m_{30} = m_0E_0'';\quad m_{31} = m_0E_1'';\quad m_0 = \omega\Big/\left[2\alpha_s\left(1-\nu\right)R^2\right].$$

При независящих от температуры составляющих комплексного модуля амплитуда прогиба и температура виброразогрева рассчитываются на основании зависимостей (9) и (8), в которых необходимо положить $E'\left(\theta\right) = E_0'$, $E''\left(\theta\right) = E_0''$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Численные расчеты проведены для оболочки при $R = 0{,}1\,м$, $h_0 = 0{,}004\,м$, $h_1 = h_2 = 0{,}5\cdot10^{-5}\,м$. Пассивный слой выполнен из полимера [6] с такими параметрами в (10):

$$E_0' = 0{,}216594\cdot10^{10}\,Па;\quad E_1' = -0{,}236994\cdot10^{8}\,Па\,/\,^0C;$$

$$E_0'' = 0{,}199358\cdot10^{9}\,Па;\quad E_1'' = -0{,}190904\cdot10^{7}\,Па\,/\,^0C;$$

$$\rho_0 = 929\,кг\,/\,м^3;\quad \nu = 0{,}3636;\quad T_0 = 20^0C\,.$$

Пьезоэлектрические актуатор и сенсор изготовлены из одной и той же пьезокерамики типа ЦТСтБС – 2 [1] с упругими материальными параметрами $s_{11}^E = 12{,}5\cdot10^{-12}\,м^2\,/\,Н$; $s_{12}^E = -4{,}62\cdot10^{-12}\,м^2\,/\,Н$; $d_{31} = -1{,}6\cdot10^{-10}\,Кл\,/\,м$; $\varepsilon_{33}^T = 21\cdot10^2\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}\,Ф\,/\,м$; $\rho_1 = \rho_2 = 7520\,кг\,/\,м^3$.

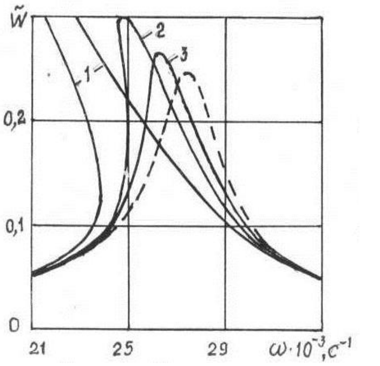


Рис. 1. Влияние коэффициента теплообмена на амплитудно-частотные характеристики

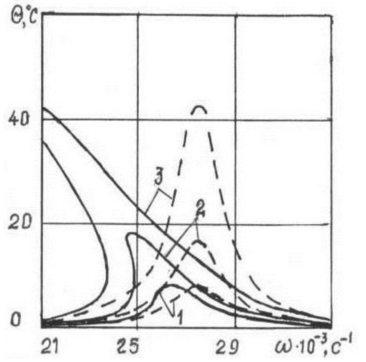


Рис. 2. Влияние коэффициента теплообмена на температурно-частотные характеристики

На рис. 1, 2 показаны кривые 1–3 частотных зависимостей безразмерных амплитуд прогибов $\tilde{w} = |w|\cdot10^3\big/h_0$ (АЧХ) и температуры виброразогрева θ (ТЧХ) недемпфированной $\left(G_{as} = 0\right)$ оболочки при нагрузке $\tilde{q} = 25Н$, рассчитанных для коэффициентов $\alpha_s = 5; 25; 50\,Вт\,/\,(м^2\cdot град)$, соответственно. Из рис. 1, 2 видно, что учет температурной зависимости вязкоупругих свойств материала приводит к известному явлению трансформации частотных изотермических (штриховые кривые) характеристик в нелинейные мягкого типа (сплошные кривые) со сдвигом собственной частоты в сторону уменьшения. Уменьшение коэффициента теплообмена α_s приводит к усилению такой трансформации АЧХ и ТЧХ вплоть до появления неоднозначных участков и некоторому увеличению прогибов и температуры виброразогрева на неизотермической частоте.

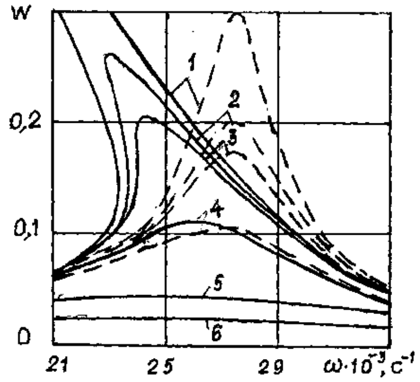
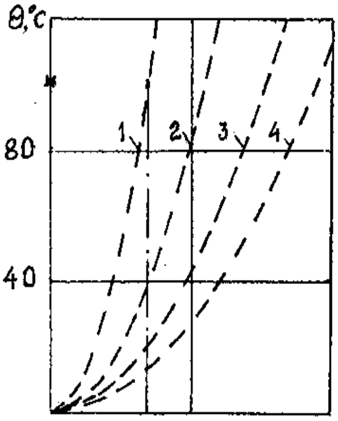


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики для разных коэффициентов управления

На рис. 3 для параметров нагрузки $\tilde{q} = 30\,H$ и теплообмена $\alpha_s = 10\,Bm/(м^2 \cdot град)$ приведены кривые 1–6 АЧХ, рассчитанные для коэффициентов управления $G_{as} = (0;\,0,4;\,0,6;\,1,5;\,5;\,10)\cdot 10^{-3}$, соответственно. Здесь штриховые кривые соответствуют изотермическому модулю пассивного материала, а сплошные – при учете его зависимости от температуры. Видно, что включение механизма обратной связи с использованием скорости изменения электрического показателя сенсора при увеличении управляющего параметра позволяет эффективно гасить механические колебания вплоть до полного их подавления на резонансной частоте.



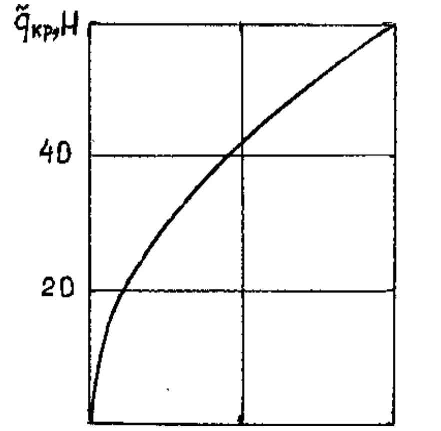


Рис. 4. Зависимость температуры от нагрузки

Рис. 5. Зависимость критической нагрузки от α_s

Температура диссипативного разогрева вязкоупругих элементов из пассивных и пьезоактивных составляющих при соответствующих уровнях гармонического нагружения и условиях теплообмена может достигать критического значения θ_{kp}, при котором происходит тепловое разрушение системы из-за размягчения пассивного материала или деполяризации пьезокерамики (точка Кюри). На рис. 4 приведены кривые 1–4 зависимости температуры виброразогрева θ недемпфированой оболочки ($G_{as} = 0$) от амплитуды механической нагрузки $\tilde{q}$, рассчитанных на частоте $\omega = 27400\,c^{-1}$ для изотермических свойств пассивного материала с коэффициентами теплообмена $\alpha_s = 2; 5; 10; 15 Вт/(м^2 \cdot град)$, соответственно. Звездочкой на оси ординат обозначено значение температуры $\theta_{kp} = 100^\circ C$ начала размягчения рассматриваемого полимера, которое ниже точки Кюри пьезокерамики. Этой температуре на оси абсцисс соответствует значение амплитуды критической загрузки $\tilde{q}_{kp}$. Зависимость $\tilde{q}_{kp}$ от коэффициента теплообмена α_s представлена кривой на рис. 5. Из рис. 4, 5 видно, что значение критической загрузки $\tilde{q}_{kp}$ стремится к нулевому при полной теплоизоляции системы ($\alpha_s \to 0$) и постепенно нарастает, стремясь к постоянной величине, при увеличении коэффициента теплообмена.

ВЫВОДЫ

Представлены постановка и решение задачи о радиальных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой замкнутой сферической оболочки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором при учете температурной зависимости свойств пассивного материала. Показана возможность снижения колебаний и виброразогрева оболочки с помощью механизма обратной связи, который реализуется линейной зависимостью между разностью потенциалов пьезоактуатора и скорости изменения разности электрического потенциала на электродах сенсора. Исследовано влияние коэффициента теплообмена на критические значения амплитуды механического гармонического нагружения, при котором температура виброразогрева достигает критической и происходит тепловое разрушение оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болкисев А. М. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры / А.М. Болкисев, В.Л. Карлаш, Н.А. Шульга // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 70-74.
2. Карнаухов В. Г. Влияние температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок, В.И. Козлов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – К. : Наук. думка, 2007. – С. 127-152.
3. Карнаухов В. Г. Нелинейная термомеханики пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. – Житомир : ЖГТУ, 2005. – 428 с.
4. Киричок И. Ф. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами / И.Ф. Киричок, Я.А. Жук // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7(53). – С. 133-140.
5. Киричок І. Ф. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в’язкопружної циліндричної оболонки з п’єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів / І.Ф. Киричок, Т.В. Карнаухова // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. : фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 150-153.
6. Нестеренко М. П. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов / М.П. Нестеренко, О.П. Червинко, И.К. Сенченков // Вест. Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – № 9. – С. 3-8.
7. Kirichok I. F. Forced Monoharmonic and Vibro –Heating of Viscoelastic Flexible Circular Plates with Piezolayers / I.F. Kirichok // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, № 6. – P. 715-725.
8. Kirichok I. F. Resonance Vibration and Dissipative Heating of a Rigidly Clamped Thermoviscoelastic Beam with Piezoactuators / I.F. Kirichok // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, № 4. – P. 77-86.

REFERENCES

1. Bolkisev, A.M., Karlash, V.L. and Shul'ga, N.A. (1984), “On the dependence of properties of piezoceramic materials on temperature”, *Prikl. mekhanika*, 20, no. 7, pp. 70-74.
2. Karnauhov, V.G., Kirichok, I.F., and Kozlov, V.I. (2007), “The effect of temperature on the dissipative heating active damping forced vibrations inelastic thin plates using piezoelectric sensors and actuators”, *Aktual'ni aspekty fizyko-mekhanichnykh doslidzhen'. Akustyka i khvyli*, pp. 127-152.
3. Karnauhov, V.G. and Mihajlenko, B.B. (2005), *Nelinejnaja termomehaniki p'ezojelektricheskih neuprugih tel pri monogarmonicheskom nagruzhenii* [Nonlinear thermomechanical inelastic piezoelectric bodies at monogarmonicheskom loading] ZhGTU, Zhitomir.
4. Kirichok, I.F., and Zhuk, Ja.A (2013), “Influence of boundary conditions and temperature on the resonance vibrorazogreva axisymmetric vibrations of viscoelastic cylindrical shells with pezoaktuatorami and sensors”, *Teoreticheskaja i prikladnaja mehanika*, issue 7(53), pp. 133-140.
5. Kyrychok, I.F. and Karnaukhova, T.V. (2013), “Axially symmetric resonant vibrations and vibrorozihriv viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric sensors taking into account the temperature dependence of properties”, *Visnyk Kyyivs'koho nats. un-tu. Ser.: fiz.-matem. nauky*, issue 3, pp. 150-153.
6. Nesterenko, M.P., Chervinko, O.P. and Senchenkov, I.K. (2002), “Modeling of ultrasonic heating of the structural elements of the polymer fibrous composite”, Vest. Nac. tehn. un-ta “HPI”, no. 9, pp. 3-8.
7. Kirichok, I.F. (2013), “Forced Monoharmonic and Vibro –Heating of Viscoelastic Flexible Circular Plates with Piezolayers”, *Int. Appl. Mech.*, 49, no 6, pp. 715-725.
8. Kirichok, I.F. (2014), “Resonance Vibration and Dissipative Heating of a Rigidly Clamped Thermoviscoelastic Beam with Piezoactuators”, Int. Appl. Mech, 50, no. 4, pp. 77-86.

УДК 539.3: 514.18

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Кострова М. М., аспирант, Наумова И. Ю., к. ф.-м. н., доцент,
Ахундов В. М., д. ф.-м. н., профессор

Национальная металлургическая академия Украины,
просп. Гагарина, 4, г. Днепропетровск, 49027, Украина

akhundov@ua.fm

Излагается методика визуализации блоков представления материалов сред волокнистого строения при больших деформациях. Блоки материалов визуализируются по результатам численного решения для них краевых задач при граничных условиях, отражающих нагружение материала в деформируемой среде. Приводятся 3D-изображения конфигураций деформированных материалов с одно-, дву-, и трехнаправленными схемами армирования, рассчитанных по двухуровневой каркасной теории на базе модели кусочно-однородного тела. Отмечаются особенности визуализации и деформирования данных материалов при больших деформациях.

Ключевые слова: материал волокнистый, визуализация материала, деформации большие, армирование однонаправленное, армирование перекрестное, армирование триортогональное.

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

Кострова М. М., аспірант, Наумова І. Ю., к. ф.-м. н., доцент,
Ахундов В. М., д. ф.-м. н., професор

Національна металургійна академія України,
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпропетровськ, 49027, Україна

akhundov@ua.fm

Викладається методика візуалізації блоків подання матеріалів середовищ волокнистої будови при великих деформаціях. Блоки матеріалів візуалізуються за результатами чисельного рішення для них крайових задач при граничних умовах, що відображають навантаження матеріалу в деформованому середовищі. Наводяться 3D-зображення конфігурацій деформованих матеріалів з одно-, дво-, і тринаправленими схемами армування, розрахованих за дворівневою каркасною теорією на базі моделі кусково-однорідного тіла. Відзначаються особливості візуалізації і деформування цих матеріалів при великих деформаціях.
Ключові слова: матеріал волокнистий, візуалізація матеріалу, деформації великі, армування односпрямоване, армування перехресне, армування триортогональне.

VISUALIZATION OF FIBROUS MATERIAL AT LARGE DEFORMATIONS

Kostrova M. M., Graduate Student,
Naumova I. Y., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Akhundov V. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

National Metallurgical Academy of Ukraine,
Gagarin ave. 4, Dnepropetrovsk, Ukraine

Visualization blocks for submissions media fibrous structure for large deformations presents. Blocks of materials are rendered based on the results of the numerical solution of boundary value problems for them with the boundary conditions that reflect the loading of the material in a deformable medium. 3D-image configurations deformed materials with one-, two-, and three-directional reinforcement schemes designed for a two-tier framework of theories based on the model of piecewise homogeneous body shows. Observed features visualization and deformation of these materials at large deformations.
Visualization of material deformation of the fibrous structure of considerable practical interest in the study of its deformation and strength behavior at large strains. The numerical solution of the problem of deformation of the fiber structure are determined by its internal fields in discrete form as a set of displacements of the nodal points of the binder and fibers, nodal strain and stress components of the material. This information about the internal fields, even within the same block structure representation of the material it is difficult to analyze.
This problem is essentially solved using numerical visualization of the original and deformed configurations isolated from the medium of a representative unit of its material. Construction of 3D - images are made through the mesh node points calculation of its deformed state. As a reference point used visualization nodal points on the faces of the block, whose positions in the initial and deformed configurations combined interpolation lines based on cubic splines with natural parametrization. During the deformation of the block material it flat or quasi-planar faces distorted locally and break at the interfaces of the binder fibers - due to differences in the mechanical properties of the components. Therefore, the construction of appropriate mesh frame lines on the faces of the block separately for regions belonging to the binder and fibers.
Visualization blocks material is based on an oblique frontal perspective, isometric and oblique horizontal rectangular dimetric projections. As the visual programming system using MATLAB, which transferred data on the situation of nodal points of the material at the rate of its deformed state. Visualization of material produced with the method presented by the graphical software of a given computer system.
Key words: fibrous material, visualization of material, large deformations, unidirectional reinforcement, cross reinforcement, three-orthogonal reinforcement.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема визуализации блоков представления строения материала приобрела особенно актуальное значение в последние годы, когда были предложены подходы к решениям задач механики волокнистых сред при больших деформациях, основанные на определении их внутренних полей. В результате численного решения задачи о деформировании волокнистой структуры определяются ее внутренние поля в дискретном виде как совокупности перемещений узловых точек компонентов структуры, узловых значений деформаций и напряжений. Данная информация о внутренних полях, даже в пределах одного блока представления материала, достаточно трудно анализируется. С увеличением сложности строения материала трудности анализа его деформационного и прочностного поведения при больших деформациях сильно возрастают.

Указанная проблема существенно решается с помощью численной визуализации исходной и деформированной конфигураций выделяемого из среды представительного блока её материала. Внешняя конфигурация деформированного блока является интегральным проявлением его внутренних полей. На основе визуализаций исходной и деформированной конфигураций блока можно прогнозировать в окрестностях каких узловых точек будет развиваться разрушение материала. В интерактивном режиме для такой окрестности, которая принадлежит матрице, волокну, границе их раздела или межфазному слою, можно получать информацию о её локальном состоянии из численного решения механической задачи. Данная информация может быть дополнительно обработана, содержать прочностную составляющую анализа.

Графическая картина деформирования блоков материала среды позволяет выявлять формы потери её внутренней устойчивости вместе с закритическим поведением на уровне строения материала (мезоуровне). Данная потеря устойчивости характеризуется локальными искривлениями волокон одной или большего числа систем армирования и может проявляться в отдельных областях среды. Выявление форм развития внутренней потери устойчивости может оказаться вне рамок алгоритма реализации, но может производиться на базе визуального отражения деформирования материала.

Визуализация деформирования материала является практически единственным средством свидетельства потери устойчивости на уровне отдельных его компонентов (микроуровне), главным образом, более мягкого связующего. Такая потеря устойчивости выражается в складкообразовании связующего при его обжатии между соседними волокнами из одной или разных систем армирования. Складкообразование связующего проявляется в образовании внутренних складок, ориентированных по направлениям волокон или иным образом.

1. МЕТОДИКА ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Визуализацию деформирования блока представления волокнистого материала осуществляем на базе численного решения для него краевой задачи по двухуровневой каркасной теории, исходя из задаваемых компонент макроскопической деформации [1, 2]. Решение данной (микро) краевой задачи производится по модели кусочно-однородного тела. В результате определяются внутренние поля блока вместе с его деформированной конфигурацией, отвечающие компонентам макроскопической деформации. Компоненты макроскопической деформации задаются в зависимости от монотонно изменяющегося параметра t_s, связываемого с изучаемым деформированием материала или среды в целом. По их значениям определяются перемещения каркасных точек (угловых вершин) блока материала с точностью до перемещений которых вместе с блоком как жесткого целого. Такие перемещения каркасных точек блока индивидуализируют решаемую для него краевую задачу. Поворотами (вращением) деформированного блока как жесткого целого пользуемся для получения на основе соответствующего 3D-изображения блока достаточно полной картины его деформации.

Построение 3D-изображения блока производили с помощью сетки узловых точек расчета его деформированного состояния. В качестве опорных точек визуализации использовали узловые точки на гранях блока, положения которых в исходной и деформированной конфигурациях соединяли интерполяционными линиями. Линии проводили через опорные точки в соответствии с логистикой численного метода решения задачи о деформировании блока на основе применяемой дискретизации. При деформировании блока материала его плоские или квазиплоские грани локально искривляются и изламываются на границах раздела связующего с волокнами – в силу различия механических свойств компонентов. Поэтому построение соответствующих сеток пересекающихся (каркасных) линий на гранях блока производится отдельно для областей, принадлежащих матрице (связующему) и волокнам. Отдельно от остальных каркасных линий блока строятся линии раздела компонентов в блоке материала. Построение каркасных линий производили на основе интерполяции декартовых координат $x_j^1,\ x_j^2,\ x_j^3\ (j = 0,1,\ldots,n)$ опорных точек на гранях блока для выстраиваемой линии кубическими сплайнами $s\left(t, x^1\right),\ s\left(t, x^2\right),\ s\left(t, x^3\right)$ в параметрической форме [3]. В качестве граничных условий принимали равенство третьих производных сплайнов на их концах третьим производным кубических кривых, проходящих через четыре первые и четыре последние из заданных точек.

В качестве параметра t сплайновой интерполяции применяли длину, отсчитываемую вдоль полигональной линии из прямолинейных отрезков, соединяющих опорные точки. Это обусловлено отсутствием предварительной информации о кривой, которая проходит через опорные точки и является целью построения. Можно было бы повторить процедуру интерполяции, приняв за параметр последующей интерполяции длину вдоль кривой из предыдущей интерполяции. Однако алгоритм вычисления искомой интерполяционной кривой при этом усложнится, а её уточнение будет незаметным при той плотности расположения узловых точек дискретной схемы, которая применяется для вычисления внутренних полей блока. Поэтому целесообразно производить параметризацию применяемых кубических сплайнов с помощью упомянутых полигональных линий (линейных сплайнов), опирающихся на узловые точки расчетной схемы блока, принятых в качестве опорных точек визуализации.

Визуализацию блоков материала, как визуализацию каркасных линий на его гранях, осуществляли на основе косоугольной фронтальной изометрической, косоугольной горизонтальной изометрической и прямоугольной диметрической проекций [4]. Применение нескольких видов аксонометрии обусловлено тем, что линейные и угловые искажения при трехмерной визуализации блока зависят от его формы, исходной или приобретенной в процессе деформирования, и его ориентации относительно плоскости изображений. Отображение блока в какой-то проекции может оказаться сильно искаженным, какие-то локально искривленные и изломанные части граней деформированного блока могут перекрывать вид на их другие части. Тогда как в другой проекции искажения блока при том же его позиционировании относительно плоскости изображений могут оказаться приемлемыми, какие-то части его граничной поверхности не перекрываются другими или перекрываются в меньшей мере.

В качестве среды визуализации использовали систему программирования MATLAB, в которую переводятся данные о положениях узловых точек материала из расчета его деформированного состояния. Визуализация материала по изложенной методике производится с помощью графического обеспечения данной компьютерной системы.

2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННО АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

Визуализацию деформирования однонаправленно армированного материала выполняли исходя из положений опорных точек блока материала, которые предварительно вычисляются по каркасной теории. Реализация численных расчетов однонаправленных материалов при больших деформациях по данной теории вместе с результатами их расчетов представлена в статье [5].

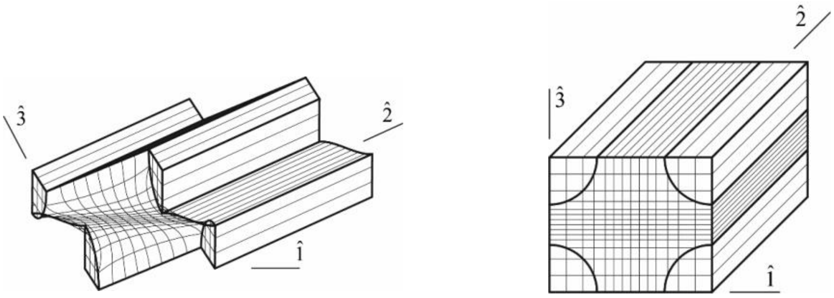
На рис. 1 изображены конфигурации блока представления однонаправленного материала с прямоугольной упаковкой волокон в исходном и деформированном состояниях. Изображения конфигураций блока приведены в косоугольной фронтальной изометрии. Блок характеризуется размерами длинной стороны прямоугольника упаковки $a_f = 1,2$ мм и короткой стороны $b_f = 1$ мм, диаметр волокон $d_f = 0,7$ мм. Коэффициент армирования материала $k_f = \left(\pi d_f^2/4\right)/\left(a_f b_f\right) = 0,3207$. Деформационное поведение связующего материала в блоке моделировали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона–Burжеса [6]:

$$W_m = \frac{E_m}{4\left(1+\nu_m\right)}\left[\beta_m\left(I_1-3\right)+\left(1-\beta_m\right)\left(I_2 I_3^{-1}-3\right)+2\left(1-2\beta_m\right)\left(\sqrt{I_3}-1\right)+\left(2\beta_m+\frac{4\nu_m-1}{1-2\nu_m}\right)\left(\sqrt{I_3}-1\right)^2\right] \quad (1)$$

при значениях параметров $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0,46$, $\beta_m = 1$ (I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора меры деформации Коши-Лагранжа). Волокна моделировали двухконстантным потенциалом Блейтца [7]:

$$W_f = \frac{E_f}{4\left(1+\nu_f\right)}\left[\left(I_1-3\right)-\frac{2}{1-2\nu_f}\ln\sqrt{I_3}+\frac{4\nu_f}{1-2\nu_f}\left(\sqrt{I_3}-1\right)\right] \quad (2)$$

с принятием для его параметров значений $E_f = 1240$ МПа, $\nu_f = 0,40$ (жесткие волокна).



а Б

Рис. 1. Изображения исходной (а) и деформированной (б) конфигураций однонаправленно армированного материала в косоугольной фронтальной изометрии

Применяли декартовую прямоугольную систему координат $\hat{x}^i$, оси которой направляли по ребрам блока. На верхнем уровне используется макроскопическая версия данной системы координат, которая служит для задания параметров макроскопической деформации армированного материала. На нижнем уровне используется материальная версия системы координат для вычисления внутренних полей блока. Решение микрокраевой задачи для блока материала производили методом локальных вариаций [8] с предупреждением тупиковых ситуаций метода [9]. Реализацию решения выполняли на основе конечно-элементного разбиения, используя аппроксимационный аппарат изометрических конечных элементов [10].

Макроскопическую деформацию блока характеризовали величинами $\hat{\lambda}_i$ и $\hat{\omega}_{ij}$, представляющими собой макроскопические кратности удлинений вдоль $\hat{x}^i$ – координатных линий и углы между $\hat{x}^i$ и $\hat{x}^j$ – координатными линиями в его макроскопически деформированной конфигурации. Деформированная конфигурация блока была определена при значениях параметров $\hat{\lambda}_1 = 0,85$, $\hat{\lambda}_2 = 1,04$, $\hat{\lambda}_3 = 1,07$, $\hat{\omega}_{12} = 50^\circ$, $\hat{\omega}_{13} = 100^\circ$, $\hat{\omega}_{23} = 110^\circ$.

Деформированный блок располагается относительно недеформированного так, что плоскость макроскопических осей $\hat{x}^1$ и $\hat{x}^2$ при деформировании сохраняет свою ориентацию. Ось $\hat{x}^1$ при этом сохраняет свое первоначальное направление. Направления осей $\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^3$ в исходной и деформированной конфигурациях блока указаны на рисунке как

$\hat{1},...,\hat{3}$ соответственно. Для визуализации блока брали 15×15 опорных точек в грани, поперечной к направлениям волокон, из числа узловых точек численного решения соответствующей задачи деформирования. Отметим, что все грани блока в деформированном состоянии испытывают изломы на границах раздела связующего с волокнами в силу макроскопических сдвигов. Их части в пределах каждого из компонентов материала искривляются, особенно сильно во фронтальной грани для связующего.

3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКРЕСТНО АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

Реализация численного решения задачи о больших деформациях перекрестно армированных материалов вместе с результатами их расчетов описана в [11]. На рис. 2 изображены исходная конфигурация блока представления перекрестного материала и его деформированная конфигурация, рассчитанная на основе указанной реализации. Изображения конфигураций блока даны в косоугольной горизонтальной изометрии. Структурный макроэлемент характеризуется углом между направлениями волокон в исходном состоянии $\gamma_f = 118^\circ$. Волокна каждого из двух армирующих семейств расположены прямоугольно с расстояниями между их осевыми линиями в плоскости армирования $a_f = 1{,}3$ мм, из плоскости армирования $b_f = 2$ мм. Диаметр волокон в обоих семействах $d_f = 0{,}7$ мм. При данной геометрии армирования объемное наполнение материала волокнами $k_f = \left(2\cdot\pi d_f^2/4\right)/\left(a_f b_f\right) = 0{,}296$. Материал матрицы моделировали потенциалом (1) при значениях констант $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0{,}46$, $\beta_m = 1$. Материал волокон – потенциалом (2) при значениях констант $E_f = 1240$ МПа, $\nu_m = 0{,}40$ (жесткие волокна).

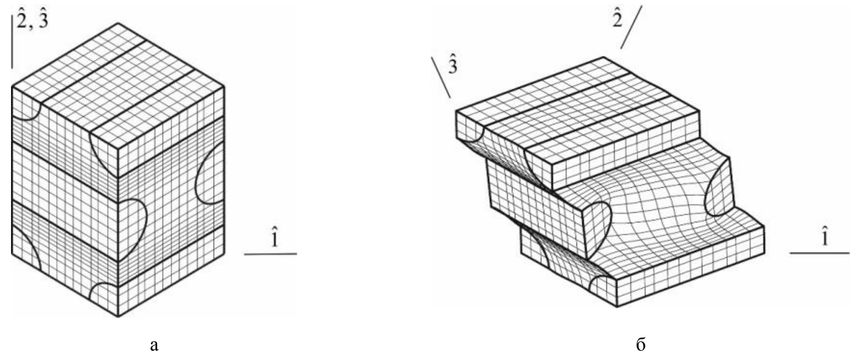


Рис. 2. Изображения исходной (а) и деформированной (б) конфигураций перекрестно армированного материала в косоугольной горизонтальной изометрии

С блоком связывали прямоугольные декартовые координаты $\hat{x}^i$, как базовые координаты для задания его макроскопической деформации. Оси $\hat{x}^1$ и $\hat{x}^2$ направляли по диагоналям ромба перекрестной схемы в недеформированном блоке, ось $\hat{x}^3$ – по его высоте. На рисунке эти оси отмечены как $\hat{1},...,\hat{3}$ соответственно. Расчет материальной конфигурации блока при заданных параметрах его макроскопической деформации производили на основе косоугольной системы декартовых координат, определяемой направлениями перекрестного расположения осевых линий волокон. Визуализацию блока производили на базе $13\times25, 13\times25, 13\times13$ опорных точек во фронтальной, боковой и горизонтальной гранях из схемы численного решения задачи деформирования.

Параметры макроскопической деформации блока, при которых была рассчитана его материальная конфигурация, имеют значения $\hat{\lambda}_1 = 1{,}18$, $\hat{\lambda}_2 = 0{,}97$, $\hat{\lambda}_3 = 1{,}06$, $\hat{\omega}_{12} = 64^\circ$,

$\hat{\omega}_{13} = 112^{\circ}$, $\hat{\omega}_{23} = 104^{\circ}$. Осевые линии волокон одного из направлений заметно удлиняются, другого направления – заметно укорачиваются. Расстояния и углы между ними в плоскости армирования также заметно изменяются. Данные параметры деформированной геометрии блока, равно как и параметры деформации $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\omega}_{12}$, в применяемой проекции не искажаются. Эти параметры могут быть непосредственно «сняты» с изображения в силу принятой ориентации блока как жесткого целого относительно плоскости изображений. При этом для линейных деформаций в качестве масштаба измерения следует принимать значения соответствующих замеров по исходному изображению блока.

4. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРИОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

На рис. 3-5 даны изображения блока представления материала с триортогональной схемой армирования в исходном и деформированном состояниях. Деформированная конфигурация была предварительно рассчитана по реализации, представленной с результатами расчетов в [12]. С блоком материала связана система координат $\hat{x}^i$, оси которой в исходном состоянии направлены по его ребрам. Для исходного и деформированного состояний блока показано макроскопическое положение данных осей, как прямых линий, проходящих через его соответствующие вершины.

Блок представления материала имеет форму куба в исходном состоянии. Коэффициент армирования по каждой из систем армирования $k_{fi} = 0{,}1$ при суммарном наполнении волокнами $k_f = k_{f1} + k_{f2} + k_{f3} = 0{,}3$. Соответственно, диаметры волокон каждой из систем армирования $d_{fi} = \sqrt{4 \cdot k_{fi} / \pi} = 0{,}3568$ мм, расстояния (шаг) между осевыми линиями волокон по каждой из систем армирования $a_f = b_f = c_f = 1$мм. Материал матрицы моделировали потенциалом (1) с константами $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0{,}40$, $\beta_m = 1$. Материал волокон описывали потенциалом (2) с константами $E_f = 68$ МПа,, $\nu_f = 0{,}40$ (мягкие волокна).

Деформированный блок, как и в рассмотренных выше двух случаях армирования, расположен относительно недеформированного таким образом, что плоскость макроскопических осей $\hat{x}^1$ и $\hat{x}^2$ своей ориентации при деформировании не изменяет, ось $\hat{x}^1$ сохраняет свое первоначальное направление.

Макроскопическую деформацию блока, которая определяет материальную конфигурацию, задавали следующими значениями ее параметров: $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_3 = 1{,}22$, $\hat{\lambda}_2 = 1{,}49$, $\hat{\omega}_{12} = 46^{\circ}$, $\hat{\omega}_{13} = 120^{\circ}$ $\hat{\omega}_{23} = 134^{\circ}$. Решение микрокраевой задачи для блока материала, как для однонаправленного и перекрестного материалов, производили на основе применения изопараметрических конечных элементов. Визуализацию материальной конфигурации блока производили на базе $19 \times 25, 19 \times 25, 19 \times 19$ опорных точек в его гранях из числа узловых точек численного решения задачи деформирования.

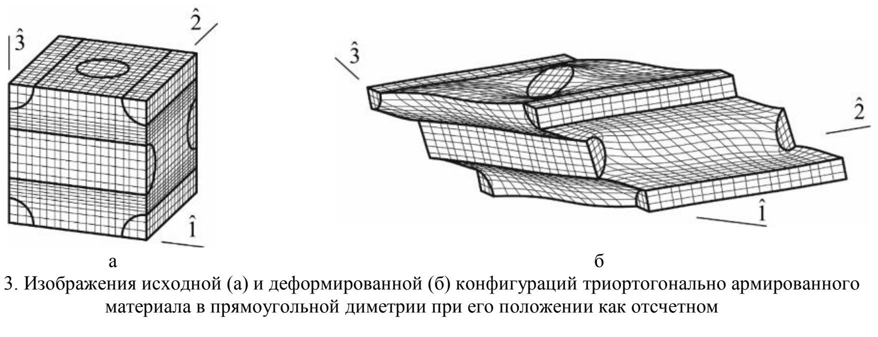


Рис. 3. Изображения исходной (а) и деформированной (б) конфигураций триортогонально армированного материала в прямоугольной диметрии при его положении как отсчетном

На рис. 3 – а, б изображены исходная и деформированная конфигурации блока материала, когда расположение связанных с недеформированным блоком осей $\hat{x}^i$ относительно плоскости проекций определяет прямоугольную диметрическую проекцию.

На рис. 4 – б деформированная конфигурация блока при исходной ориентации на рис. 4 – а, когда недеформированный блок повернут относительно отсчетного положения вокруг оси $\hat{x}^3$ на 180°.

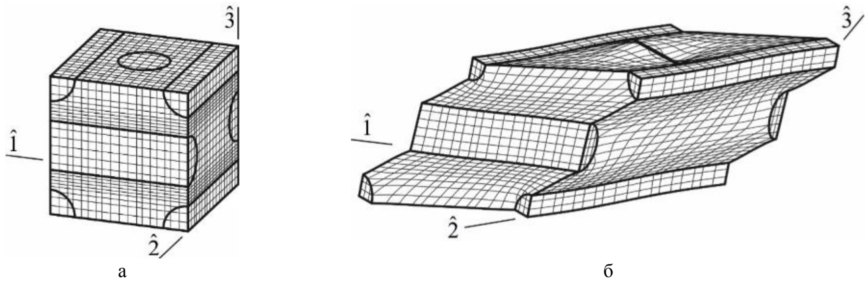


Рис.4. То же при повороте блока материала вокруг оси $\hat{x}^3$ на 180°

На рис. 5 – б деформированная конфигурация блока при исходной ориентации на рис. 5 – а, которая соответствует повороту недеформированного блока относительно отсчетного положения на 270° вокруг оси $\hat{x}^3$.

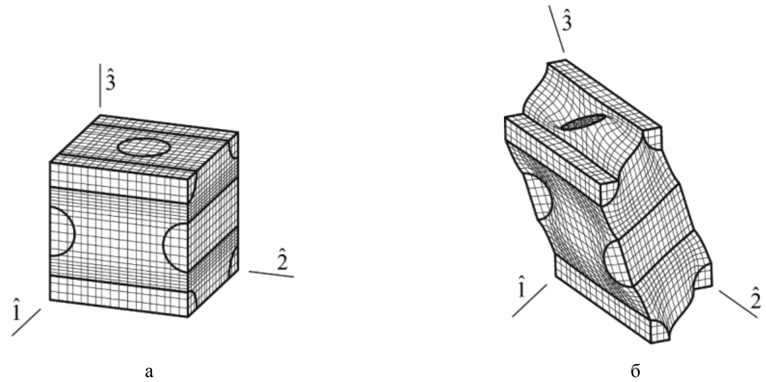


Рис. 5. То же при повороте блока материала вокруг оси $\hat{x}^3$ на 270°

Обратим внимание на заметное пространственное искривление осевых линий волокон, как и других продольных в них материальных линий. Центральное волокно в целом сильно изменяет свою ориентацию в блоке материала в силу больших поперечных сдвигов материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенную и реализованную в среде программирования MATLAB методику визуализации блоков представления материалов волокнистого строения при больших деформациях применили для отображения деформирования материалов с одно-, дву- и трехнаправленными схемами армирования. Визуализация блоков материала качественно и в некоторой мере количественно отражает внутренние поля материала, является эффективным средством представления его деформационного поведения. На базе созданного компьютерного обеспечения можно осуществлять визуализацию деформационного поведения армированного материала среды, исходя из полученных результатов расчета ее внутренних полей на последовательных шагах по истории нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундов В. М. Структурная макроскопическая теория жестких и мягких композитов. Инвариантное описание / В.М. Ахундов // Механика композит. материалов. – 1998. – Т. 34, №5. – С. 595-612.
2. Ахундов В. М. Каркасная теория жестких и мягких композитов с неискривленными и искривленными структурами. Инвариантное описание / В.М. Ахундов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, №2. – С. 275-293.
3. Завьялов Ю. С. Сплайны в инженерной геометрии / Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов. – М. : Машиностроение, 1985. – 224 с.
4. Михайленко В. Е. Инженерная графика / В.Е. Михайленко, А.М. Пономарев. – К. : Вища школа, 1990. – 303 с.
5. Ахундов В. М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 2. Однонаправленно армированные композиты / В.М. Ахундов // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №1. –С. 29-50.
6. Levinson M A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials / M. Levinson and I.W. Burgess // Int. J. Mech. Sci. – 1971. – Vol. 13. – P. 563-572.
7. Blatz P. J. Application of finite elastic theory in predicting the performance of solid propellant rocket motors / P.J. Blatz. – Calif. Inst. of Techn. GALCJISM, 1960. – P. 60-125.
8. Черноусько Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф.Л. Черноусько, В.П. Баничук. – М. : Наука, 1973. – 238 с.
9. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 448 с.
10. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
11. Ахундов В. М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 3. Двунаправленно армированные композиты / В.М. Ахундов // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 479-492.
12. Ахундов В. М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 4. Трехнаправленно армированные композиты / В.М. Ахундов // Механика композит. материалов. – 2001. – Т. 37, №3. – С. 355-376.

REFERENCES

1. Ahundov, V.M. (1998), “Strukturnaja makroskopicheskaja teorija zhestkih i mjagkih kompozitov. Invariantnoe opisanie”, *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 34, no. 5, pp. 595-612
2. Ahundov, V.M. (2000), “Karkasnaja teorija zhestkih i mjagkih kompozitov s neiskrivlennymi i iskrivlennymi strukturami. Invariantnoe opisanie”, *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*, vol. 6, no. 2, pp. 275-293.
3. Zav'jalov, Ju.S., Leus, V.A. and Skorospelov, V.A. (1985), “Splajny v inzhenernoj geometrii”, Mashinostroenie, Moskow.
4. Mihajlenko, V.E. and Ponomarev, A.M. (1990), “Inzhenernaja grafika”, Vishha shk., Kiev.
5. Ahundov, V.M. (1999), “Analiz jelastomernyh kompozitov na osnove sistem volokon. 2. Odnonapravlenno armirovannye kompozity”, *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 35, no. 1, pp. 29-50.

6. Levinson, M. and Burgess, I.W (1971), "A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 13, pp. 563-572.
7. Blatz, P.J. (1960), "Application of finite elastic theory in predicting the performance of solid propellant rocket motors", *Calif. Inst. of Techn. GALCJISM*, pp. 60-125.
8. Chernous'ko, F.L. and Banichuk, V.P. (1973), "Variacionnye zadachi mehaniki i upravlenija", Nauka, Moskow.
9. Fedorenko, R.P. (1978), "Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija", Nauka, Moskow.
10. Pod obshh. red. A.S. Saharova and I. Al'tenbaha (1982), "Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel", Vishha shkola, Kiev.
11. Ahundov, V.M. (1999), "Analiz jelastomernyh kompozitov na osnove sistem volokon. 3. Dvunapravlenno armirovannye kompozity", *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 35, no. 4, pp. 479-492.
12. Ahundov, V.M. (2001), "Analiz jelastomernyh kompozitov na osnove sistem volokon. 4. Trehnapravlenno armirovannye kompozity", *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 37, no. 3, pp. 355-376.

УДК 539.1:534.1

НЕСТАЦІОНАРНА ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЗГОДЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Кубенко В. Д., д. ф.-м. н., академік НАН України, Янчевський І. В., д. ф.-м. н., професор

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

Викладено чисельно-аналітичний підхід до вивчення процесу ударної взаємодії довгого кругового недеформівного тіла з поверхнею кругової циліндричної порожнини пружного простору, усередині якого перебуває тіло. Формулюється нестаціонарна змішана початково-крайова задача з наперед невідомими границями, які рухаються зі змінною швидкістю. Для розв'язання задачі застосовуються методи теорії інтегральних перетворень, розвинення шуканих величин у ряди Фур'є та метод квадратур, які дозволили звести задачу до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному кроці за часом. Конкретні числові розрахунки виконані для випадку, коли тіло і порожнина мають форму однакових кругових циліндрів. Проаналізовано вплив маси тіла на характеристики перехідного процесу контактної взаємодії.

Ключові слова: нестаціонарна змішана задача, порожнина пружного простору, циліндричне тіло, перетворення Лапласа, розвинення Фур'є.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОГЛАСОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Кубенко В. Д., д. ф.-м. н., академик НАН Украины, Янчевский И. В., д. ф.-м. н., профессор

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

Изложен численно-аналитический подход к изучению процесса ударного взаимодействия длинного кругового недеформируемого тела с поверхностью круговой цилиндрической полости упругого пространства, внутри которого находится тело. Формулируется нестационарная смешанная начально-краевая задача с наперед неизвестными границами, которые движутся с переменной скоростью. Для решения задачи применяются

методы теории интегральных преобразований, разложение искомых величин в ряды Фурье и метод квадратур, позволившие свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени. Конкретные числовые расчеты выполнены для случая, когда тело и полость имеют форму равных круговых цилиндров. Проанализировано влияние массы тела на характеристики переходного процесса контактного взаимодействия.
Ключевые слова: нестационарная смешанная задача, полость упругого пространства, цилиндрическое тело, преобразование Лапласа, разложение Фурье.

NONSTATIONARY PLANE CONTACT PROBLEM FOR CONFORMAL CYLINDRICAL SURFACES

Kubenko V. D., D.Sc. in Physics and Maths, academician of NAS of Ukraine,
Yanchevskyi I. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor

*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
3, Nesterova str., Kyiv, 03057, Ukraine*

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

A numerical-analytical approach is described to investigating the process of impact interaction of a long circular rigid body with the surface of a circular cylindrical cavity in elastic space accommodating the body. A nonstationary mixed initial boundary value problem is formulated with a priori unknown boundaries moving with variable velocity. The problem is solved using the methods of the theory of integral transforms, expansion of sought for values into a Fourier series, and the quadrature method to reduce the problem to solving a system of linear algebraic equations at each time step. The accepted problem statement excludes body breakaway from the cavity surface. Thereby the time interval, during which the computation results adequately describe the process considered, is limited. Concrete numerical computations were done for the case when the body and the cavity have the shape of equal circular cylinders. The body mass impact on the profile of the transient process of contact interaction (stress in the contact zone, medium resistance force and body motion velocity) has been analysed. Computations have confirmed with a fine level of accuracy the cos(θ)-distribution for normal stress over the cavity surface in the contact zone. Hence, to find the medium force of resistance it suffices to compute stress in the body frontal point.
Key words: nonstationary mixed problem, elastic space cavity, cylindrical body, Laplace transform, Fourier expansion.

ВСТУП

У механіці контактної взаємодії, у рамках якої перебувають і задачі пружного зіткнення тіл, розрізняють випадки взаємодії узгоджених та неузгоджених за формою тіл [1]. Неузгодженими називають взаємодіючі тіла, профілі яких, принаймні в тій своїй частині, що вступають в контакт з іншим тілом, не збігаються. Для таких тіл область контакту, зазвичай, суттєво менша їх характерних розмірів і при моделюванні задачі зіткнення тіл вона може бути апроксимована плоскою поверхнею (див., наприклад, [2-5]). Узгоджений контакт властивий «внутрішнім» контактним задачам і має місце, коли поверхні обох тіл у недеформованому стані в області контакту мають досить близькі або співпадаючі контури. В інженерній практиці, зокрема, такий тип контакту проявляється між цапфою вала (осі) і поверхнею опорної деталі, між зубцями сполучених коліс зачеплення Новікова та ін. [6, 7]. Незастосовність теорії Герца до розв’язання згаданих прикладних задач через сумірність розмірів області контакту з радіусами кривизни дотичних поверхонь, зокрема, циліндричної форми, обумовлюють інтерес до розвитку відповідних підходів до дослідження. Серед численних публікацій, присвячених розвитку ефективних методів розв’язання задач про контактну взаємодію узгоджених циліндричних тіл, слід відзначити монографії [1, 6, 8] та статті [9-14]. При цьому основна увага в публікаціях останніх років приділяється побудові наближених розв’язків задачі в статичній постановці при найменшій кількості незалежних параметрів. У той же час ударна контактна взаємодія узгоджених тіл залишається недостатньо вивченою [15, 16].

У нашій роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод розв’язання нестаціонарної задачі про ударний «внутрішній» контакт узгоджених тіл циліндричної форми. Розглядається випадок, коли тверде тіло, поперечний переріз якого окреслено досить гладкою у фронтальній частині кривою, ударяється з заданою початковою швидкістю о поверхню кругової циліндричної порожнини в пружному просторі. Напружено-деформований стан пружного середовища та характеристики руху тіла при його проникненні в середовище підлягають визначенню. Суть запропонованого підходу полягає в застосуванні інтегрального перетворення Лапласа за часом і розвиненні шуканих величин у ряди Фур'є за відповідною кутовою координатою. Сформульована нестаціонарна змішана крайова задача зводиться до розв'язання парних інтегральних рівнянь, ядра яких визначаються за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра. Розв'язок останнього будується через залучення регуляризуючого алгоритму, система парних рівнянь розв'язується шляхом дискретизації за часом і розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь на кожному часовому кроці. Чисельні результати отримані для найбільш типового випадку, коду радіуси порожнини та тіла збігаються. Для тіла різної маси визначені основні характеристики процесу зіткнення: напруження в області контакту, сила опору середовища, швидкість руху тіла. Відзначимо, що розглянутий випадок рівних радіусів порожнини та тіла є зручним для обчислень ще й тому, що в точках зміни граничних умов відсутній нормальний тиск на поверхню порожнини й тим самим вилучається поява особливостей розв'язку, який властивий змішаним задачам.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Ударна взаємодія тіла з пружним середовищем обумовлює, з одного боку, утворення в останньому пружних хвиль, які несуть частину енергії зіткнення, а з іншого – зміну швидкості руху тіла аж до зміни її знака та руху у зворотному напрямку. Адекватне моделювання розглянутого процесу вимагає розв'язання зв'язаної системи рівнянь, що складається з рівнянь теорії пружності, які описують рух пружного середовища, і рівнянь руху тіла. Очевидно, що на поверхні порожнини мають бути сформульовані такі змішані граничні умови:

- в області контакту тіла з середовищем має місце рівність переміщень тіла та середовища;
- на вільній поверхні порожнини нормальне напруження відсутнє;
- тертя в області контакту відсутнє, отже, дотичне напруження дорівнює нулеві на всій поверхні порожнини.

Зазначимо, що в загальному випадку при проникання тіла в середовище положення граничних точок, які відокремлюють на поверхні порожнини область контакту від вільної поверхні, невідомо. Більш того, зазначені точки рухаються по поверхні порожнини з невідомою змінною швидкістю і їх положення визначається в кожний момент часу з розв'язання загальної зв'язаної задачі.

Початкові умови також очевидні:

- для тіла задано початкове переміщення (зазвичай – нульове) і початкове значення швидкості (час t будемо відлічувати з моменту початкового контакту тіла з порожниною);
- у початковий момент часу пружне середовище перебуває в спокої.

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати змішану початково-крайову задачу із, загалом, наперед невідомою змінною в часі та просторі границею.

Довге тверде циліндричне тіло розташовано в циліндричній порожнині і в момент часу $t=0$ йому миттєво надається перпендикулярна до осі тіла швидкість руху $V(t)$. Будемо вважати, що швидкість $V(t)$ значно менша від швидкості звуку в середовищі, а глибини проникання тіла в середовище малі. Це дозволяє за рівняння руху середовища використовувати лінійні рівняння плоскої задачі теорії пружності та, крім того, відповідні граничні умови формулювати на недеформованій поверхні порожнини.

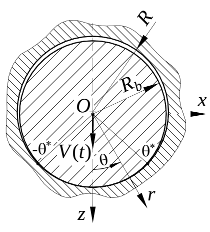


Рис. 1. Розрахункова схема

У довільному поперечному перерізі введемо декартову систему координат *Oxz* так, щоб напрямок осі *z*

збігався з напрямком вектора швидкості руху тіла $V(t)$, а початок координат O – з центром порожнини, і зв'яжемо з нею полярну систему координат $Or\theta$, полярний кут θ якої відлічується від осі z (див. рис. 1).
Позначимо радіус порожнини через R. Пружне середовище характеризується параметрами Ламе λ і μ, та густиною ρ. Циліндричне тіло торкається поверхні порожнини в точці ($r=R$; $\theta=0$) і в момент часу $t=0$ починає рухатися так, що його утворююча паралельна до осі порожнини, а початкове значення швидкості $V_0=V(t)\big|_{t=0}$. Має місце задача плоскої деформації, відповідно до якої деформації та переміщення з площини Oxz відсутні.
Для зручності інтерпретації результатів далі будемо користуватися безрозмірними позначаннями, які введемо за допомогою таких співвідношень:

$$\bar{r}=\frac{r}{R};$$

$$\bar{u}=\frac{u}{R};\quad \bar{v}=\frac{v}{R};\quad \bar{U}=\frac{U}{R};\quad \bar{R}=1;\quad \bar{V}=\frac{V}{c_p};\quad \bar{t}=\frac{c_p t}{R};\quad \bar{M}=\frac{M}{\pi R^3\rho};$$

$$\bar{\sigma}_{rr}=\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$$

$$;\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu};\quad \bar{\sigma}_{r\theta}=\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu};\quad \bar{Q}=\frac{Q}{\pi R^2\rho c_p^2}.$$

Тут u і v – радіальна і тангенціальна компоненти вектора переміщень пружного середовища; U – переміщення тіла; V – його швидкість ($V=dU/dt$); σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; $c_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ і $c_s=\sqrt{\mu/\rho}$ – відповідно, швидкості поздовжніх і поперечних хвиль у пружному середовищі; Q – сила реакції пружного середовища; M – погонна маса тіла, яка віднесена до маси пружного середовища ідентичного об'єму.
Нижче використовуються лише безрозмірні позначання, тому риска над ними буде опущена.
У випадку плоскої деформації рух пружного середовища описується скалярними потенціалами Φ і Ψ, які задовольняють хвильовим рівнянням [17]:

$$\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0;\quad \nabla^2\Psi-\xi^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0\quad \left(\xi=\frac{c_p}{c_s}\right) \tag{1}$$

і пов'язані з вектором пружних переміщень $\vec{U}$ за допомогою співвідношення

$$\vec{U}=\mathrm{grad}\Phi+\mathrm{rot}\Psi.$$

У формулах (1) через ∇^2 позначено оператор Лапласа, який у полярних координатах має вигляд:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}.$$

Напруження та переміщення представляються виразами:

$$u=\frac{\partial}{\partial r}\Phi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi;\quad v=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi-\frac{\partial}{\partial r}\Psi;$$

$$\sigma_{rr}=\left(\frac{\xi^2}{2}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Psi\right);$$

$$\sigma_{r\theta}=\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Phi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi\right); \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\Psi\right).$$

Сформулюємо граничні умови. Зображені на рис. 1 точки з полярними кутами $-\theta^*(t)$ і $\theta^*(t)$ відокремлюють область контакту тіла та порожнини від вільної поверхні останньої. Якщо позначити через U поступальне переміщення тіла в напрямку осі z, граничні умови на поверхні $r=1$ можна представити в наступному вигляді:

– рівність переміщень в області контакту ($|\theta|\le\theta^*$)

$$u=U(t)\cos\theta; \quad (3)$$

– відсутність нормального напруження на вільній поверхні порожнини ($|\theta|>\theta^*$)

$$\sigma_{rr}=0; \quad (4)$$

– відсутність дотичного напруження на всій поверхні порожнини ($|\theta|\le\pi$)

$$\sigma_{r\theta}=0. \quad (5)$$

Крім того, в області контакту ($r=1$, $|\theta|\le\theta^*$) напруження σ_{rr} має бути стискаючим –

$$\sigma_{rr}<0.$$

На нескінченності має місце умова загасання хвильових збурень –

$$\Phi\to0,\ \Psi\to0 \text{ при } r\to\infty. \quad (6)$$

Початкові умови для потенціалів такі:

$$\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial t}=0 \text{ при } t=0. \quad (7)$$

Нарешті, рівняння руху твердого тіла має вигляд:

$$M\frac{dV}{dt}=Q \quad (8)$$

при початковій умові

$$V(t)=V_0 \text{ при } t=0. \quad (9)$$

Протидіюча заглибленню тіла сила Q обчислюється як інтеграл по поверхні контакту від проекції на вісь z напруження σ_{rr} –

$$Q=2\int_0^{\theta^*}\sigma_{rr}(t,\theta)\cos\theta d\theta. \quad (10)$$

Кут $\theta^*(t)$ визначає область контакту тіла й порожнини. Будемо вважати, що θ^* є полярним кутом точки перетину контуру поперечного перерізу порожнини і кривою, що є контуром тіла. У цьому випадку кут θ^* обчислюється виключно з геометричної задачі як функція розмірів порожнини та тіла і глибини проникання $U(t)$. Зокрема, для тіла у вигляді кругового циліндра безрозмірного радіуса R_b і порожнини радіусу $R=1$ значення кута θ^* визначається формулою:

$$\theta^* = \arccos\frac{U^2/2+(1+U)(1-R_b)}{1-R_b+U}. \tag{11}$$

Якщо, наприклад, тіло має поперечний переріз у вигляді еліпса з безрозмірними півосями a і b, координати точок перетину є розв’язком системи рівнянь:

$$x=\sqrt{1-z^2} \quad \wedge \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{(z+1-b+U)^2}{b^2}=1,$$

а саме,

$$\theta^* = \arccos\frac{2a^2U+2a^2-2a^2b\pm 2b\sqrt{a^4+b^2-2ba^2-a^2\left(2bU+2U+U^2\right)}}{2\left(b^2-a^2\right)}.$$

Співвідношення (2)-(11) представляють математичне формулювання розглянутої змішаної крайової задачі з початковими умовами.

МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ

Для розв’язання сформульованої задачі застосуємо до рівнянь (1) інтегральне перетворення Лапласа по t з параметром s [18]. Відповідні трансформанти будемо позначати верхнім індексом L. Тоді рівняння (1) з урахуванням нульових початкових умов (7) будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial^2\Phi^L}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^L}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi^L}{\partial\theta^2}-s^2\Phi^L=0; \quad \frac{\partial^2\Psi^L}{\partial t^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi^L}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi^L}{\partial\theta^2}-s^2\xi^2\Psi^L=0,$$

а їх загальний розв’язок, що загасає на нескінченності (див. (6)), запишеться у вигляді:

$$\Phi^L=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(s)K_n(sr)\cos n\theta; \quad \Psi^L=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(s)K_n(s\xi r)\sin n\theta. \tag{12}$$

Тут $K_n(x)$ – модифікована циліндрична функція Бесселя уявного аргументу [18]; A_n, B_n – невідомі коефіцієнти.

Переміщення, швидкість та напруження на поверхні порожнини ($r=1$) також представимо у вигляді рядів Фур’є, наприклад:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\cos n\theta; \quad \sigma_{rr}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{rr\,n}(t)\cos n\theta; \quad \sigma_{r\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{r\theta\,n}(t)\sin n\theta. \tag{13}$$

Для того, щоб отримати розв’язок сформульованої змішаної граничної задачі, розглянемо спочатку розв’язання допоміжної задачі для системи рівнянь (1) при наступних граничних умовах: дотичне напруження на поверхні порожнини ($r=1$) відсутнє, однак відома швидкість її деформування у вигляді деякої функції $W(t,\theta)$, тобто:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=1}=W(t,\theta)\,;\quad \left.\sigma_{r\theta}\right|_{r=1}=0\,. \tag{14}$$

Функція $W(t,\theta)$ має бути представлена рядом Фур'є –

$$W(t,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\cos n\theta\,.$$

У зображеннях за Лапласом з використанням розв'язків (12) отримаємо, що коефіцієнти рядів (13) будуть мати вигляд:

$$(\partial u_n/\partial t)^L=A_n(s)T_{1n}+B_n(s)T_{2n}\,;\quad \sigma^L_{rr\,n}=A_n(s)T_{5n}+B_n(s)T_{6n}\,; \tag{15}$$

$$\sigma^L_{r\theta\,n}=A_n(s)T_{3n}+B_n(s)T_{4n}\,;\quad \sigma^L_{\theta\theta\,n}=A_n(s)T_{7n}+B_n(s)T_{8n}\,.$$

Тут позначено:

$$T_{1n}=snK_n(s)-s^2K_{n+1}(s)\,;\quad T_{2n}=nsK_n(s\xi)\,;\quad T_{3n}=-n(n-1)K_n(s)+nsK_{n+1}(s)\,;$$

$$T_{4n}=-\left(\frac{\xi^2}{2}s^2+n(n-1)\right)K_n(s\xi)-s\xi K_{n+1}(s\xi)\,;\ T_{5n}=\left(\frac{\xi^2}{2}s^2+n(n-1)\right)K_n(s)+sK_{n+1}(s)\,;\ T_{7n}=\left(\left(\frac{\xi^2}{2}-1\right)s^2-n(n-1)\right)\times$$

$$\times K_n(s)-sK_{n+1}(s)\,;\quad T_{6n}=n(n-1)K_n(s\xi)-ns\xi K_{n+1}(s\xi)\,;\quad T_{8n}=-n(n-1)K_n(s\xi)+ns\xi K_{n+1}(s\xi)\,.$$

З умов (14) і співвідношень (15) знаходимо:

$$A_n(s)=W_n^L\frac{T_{4n}}{T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}}\,;\quad B_n(s)=W_n^L\frac{-T_{3n}}{T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}}\,;\quad \sigma^L_{rr\,n}=W_n^L\frac{T_{4n}T_{5n}-T_{3n}T_{6n}}{T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}}\,.$$

Якщо скористатися асимптотичним поданням циліндричних функцій 3-го роду для великих значень аргументу виду $K_n(s)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{-s}(1+\ldots)$ [18] та теоремою про граничні співвідношення операційного обчислення [19], то можна визначити початковий стрибок значення напруження – $\left.\sigma_{rr\,n}\right|_{t=0}=-(\xi^2/2)W_n$. Тоді у виразі для $\sigma^L_{rr\,n}$ можна виділити зазначений стрибок і представити компонент напруження у вигляді двох доданків

$$\sigma^L_{rr\,n}=W_n^L\left[-\frac{\xi^2}{2}+P_n^L(s)\right], \tag{16}$$

де

$$P_n^L(s)=\frac{T_{4n}T_{5n}-T_{3n}T_{6n}+\frac{\xi^2}{2}(T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n})}{T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}}\,. \tag{17}$$

Вираз (16) тепер можна переписати в просторі оригіналів, скориставшись правилом згортки [19]

$$\sigma_{rr\,n}(t)=-\frac{\xi^2}{2}W_n(t)+\int_0^t W_n(\tau)P_n(t-\tau)d\tau. \tag{18}$$

Якщо тепер повернутися до початкової граничної задачі (3)-(5), то отримане співвідношення (18) дозволяє сформувати систему парних рівнянь відносно коефіцієнтів $W_n(t)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\cos n\theta=V(t)\cos\theta,\quad |\theta|<\theta^*;\\&\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{\xi^2}{2}W_n(t)+\int_0^t W_n(\tau)P_n(t-\tau)d\tau\right]\cdot\cos n\theta=0,\quad |\theta|>\theta^*.\end{aligned} \tag{19}$$

Тут $P_n(t)$ є оригіналом $P_n^L(s)$. Фігуруюча в правій частині системи (19) швидкість тіла $V(t)$ має задовольняти рівнянню руху (8), у якому сила Q, відповідно до формул (10) та (13), має вигляд:

$$Q=2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\sigma_{rr\,n}(t) \tag{20}$$

і, відповідно до (18), також може бути виражена через функції $W_n(t)$. При цьому коефіцієнти χ_n визначаються рівностями:

$$\chi_0=\sin\theta^*;\quad \chi_1=\frac{\theta^*}{2}+\frac{\sin 2\theta^*}{4};\quad \chi_n=\frac{\sin(n-1)\theta^*}{2(n-1)}+\frac{\sin(n+1)\theta^*}{2(n+1)}.$$

Обчисливши з системи (19) коефіцієнти $W_n(t)$, за допомогою формул:

$$\begin{aligned}&u(t,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t W_n(\tau)d\tau\cdot\cos n\theta;\\&\sigma_{rr}(t,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{\xi^2}{2}W_n(t)+\int_0^t W_n(\tau)P_n(t-\tau)d\tau\right]\cdot\cos n\theta\end{aligned} \tag{21}$$

можна знайти напруження $\sigma_{rr}(t,\theta)$ і радіальне переміщення $u(t,\theta)$ точок порожнини на поверхні $r=1$.

ПОБУДОВА ОРИГІНАЛІВ ФУНКЦІЙ $P_n^L(s)$

Для розв'язання системи (19) необхідно мати ефективний алгоритм обчислення підінтегральних функцій $P_n(t)$, зображення яких представлені формулою (17). Викладемо тут механізм обчислення зазначених функцій. Функцію $P_n^L(s)$ представимо так:

$$P_n^L(s)=\frac{S_n^L(s)}{R_n^L(s)}, \tag{22}$$

де чисельник і знаменник мають вигляд:

$$R_n^L(s)=\frac{1}{s^4}\left[T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}\right]=-\frac{\xi^2}{2}n\frac{1}{s}K_n(s)K_n(s\xi)+\left(\frac{\xi^2}{2}-n\frac{1}{s^2}\right)K_{n+1}(s)K_n(s\xi)-$$

$$-\xi n\frac{1}{s^2}K_n(s)K_{n+1}(s\xi)+\xi\frac{1}{s}K_{n+1}(s)K_{n+1}(s\xi);$$

$$S_n^L(s)=\frac{1}{s^4}\left[T_{4n}T_{5n}-T_{3n}T_{6n}+\frac{\xi^2}{2}\left(T_{1n}T_{4n}-T_{2n}T_{3n}\right)\right]=-\left(\frac{\xi^4}{4}+\xi^2 n(n-1)\frac{1}{s^2}\right)K_n(s)K_n(s\xi)-$$

$$-\left(\frac{\xi^2}{2}\frac{1}{s}+n(n^2-1)\frac{1}{s^3}\right)K_{n+1}(s)K_n(s\xi)-\left(\frac{\xi^3}{2}\frac{1}{s}+\xi n(n^2-1)\frac{1}{s^3}\right)K_n(s)K_{n+1}(s\xi)+\xi(n^2-1)\frac{1}{s^2}K_{n+1}(s)K_{n+1}(s\xi)+\frac{\xi^2}{2}R_n^L(s).$$

Вираз (22) перепишемо у вигляді:

$$P_n^L(s)e^{s(1+\xi)}R_n^L(s)=e^{s(1+\xi)}S_n^L(s).$$

Якщо до останнього виразу застосувати теорему про згортку оригіналів [19], то для функцій $P_n(t)$ можна отримати інтегральне рівняння Вольтерра I-го роду

$$\int_0^t P_n(\tau)\tilde{R}_n(t-\tau)d\tau=\tilde{S}_n(t),\quad n=0,1,\ldots,\infty. \tag{23}$$

Ядро $\tilde{R}_n(t)$ і права частина $\tilde{S}_n(t)$ цього рівняння обчислюються за допомогою згорток на основі табличних подань оригіналів циліндричних функцій Макдональда [20]:

$$F_n^{(0)}=L^{-1}\left\{e^{\alpha s}K_n(\alpha s)\right\}=\frac{z_1^n+z_2^n}{2\alpha Z};\ F_n^{(1)}=L^{-1}\left\{\frac{e^{\alpha s}}{s}K_n(\alpha s)\right\}=\frac{z_1^n-z_2^n}{2n};$$

$$F_n^{(2)}=L^{-1}\left\{\frac{e^{\alpha s}}{s^2}K_n(\alpha s)\right\}=\alpha\left[\frac{z_1^{n+1}-z_2^{n+1}}{4n(n+1)}-\frac{z_1^{n-1}-z_2^{n-1}}{4n(n-1)}\right],$$

де

$$z_{1,2}(\alpha,t)=z_0(\alpha,t)\pm Z,\quad Z=\sqrt{z_0^2(\alpha,t)-1},\quad z_0(\alpha,t)=1+t/\alpha,\quad \alpha=1,\xi.$$

Для побудови оригіналів з індексом $n\geq 2$ можна також скористатися рекурентними співвідношеннями:

$$F_n^{(0)}=2z_0F_{n-1}^{(0)}-F_{n-2}^{(0)};\quad F_n^{(1)}=2z_0\frac{n-1}{n}F_{n-1}^{(1)}-\frac{n-2}{n}F_{n-2}^{(1)};\quad F_n^{(2)}=\frac{\alpha}{2n}\left(F_{n+1}^{(1)}-F_{n-1}^{(1)}\right),$$

при цьому для малих значень n справедливі вирази:

$$F_0^{(0)}=\frac{1}{\alpha Z};\quad F_1^{(0)}=\frac{z_0}{\alpha Z};\quad F_0^{(1)}=\ln z_1;\quad F_1^{(1)}=Z;\quad F_0^{(2)}=\alpha\left(z_0\ln z_1-Z\right);\quad F_1^{(2)}=\frac{\alpha}{2}\left(z_0Z-\ln z_1\right).$$

ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

При проведенні чисельних експериментів розглянута найбільш поширена ситуація, коли тіло та порожнина мають форму кругового циліндра, причому їх радіуси настільки мало відрізняються один від одного, що їх можна вважати однаковими ($R=R_b$). У цьому випадку, очевидно, початкове значення полярного кута θ^*, який визначає границю контакту поверхонь, дорівнює $\pi/2$ (рис. 1). Коефіцієнт ξ при обчисленнях прийнято рівним 1,87, що відповідає значенню коефіцієнта Пуассона матеріалу середовища, близького до 0,3.

Розв'язання системи рівнянь (21), як і інтегральних рівнянь Вольтерра (23), здійснювалося чисельно, при цьому заміна інтегралів скінченними сумами виконана за допомогою формули прямокутників (метод середньої точки). Крок дискретизації за часовою координатою Δt приймався постійним. Значення Δt та кількість утримуваних членів у рядах Фур'є N обиралися з умови забезпечення прийнятної точності обчислень. Так, на досліджуваному тимчасовому інтервалі [0; T] ($T=3$) різниця максимальних значень розрахункових величин при $N=120$ і $\Delta t=0{,}005$ та $N=160$ і $\Delta t=0{,}0025$ не перевищувала 1%. Прискорення збіжності рядів Фур'є здійснювалося за допомогою використання σ-множників Ланцоша. При розв'язанні інтегральних рівнянь (23) залучався регуляризуючий алгоритм Тихонова зі стабілізатором 1-го порядку, який широко використовується при розв'язанні некоректних задач обчислювальної математики [21]. Фігуруючий в алгоритмі параметр регуляризації обчислювався на підставі принципу нев'язки, при цьому відносний рівень нев'язки був прийнятий рівним 0,0001.

Отже, система рівнянь (21) розв'язувалася на кожному m-му кроці за часом ($m=1,2,\ldots,T/\Delta t$) відносно $N+1$ невідомих – коефіцієнтів $W_n(m\Delta t)$ ($n=\overline{0,N}$). Обчислені на попередніх кроках значення $W_n(p\Delta t)$ ($p=\overline{1,m-1}$) вважалися відомими і тому переносилися в праву частину на поточному розрахунковому кроці за часом. При цьому був застосований такий підхід. Замість безперервної кутової координати θ розглядалася дискретна величина θ_k з кроком $\Delta\theta=\pi/K$ ($\theta_k=k\Delta\theta$; $k=\overline{0,K}$; $K\geq N$). Це дозволило перейти від системи з двох рівнянь (21) до її скінченно-вимірного аналога, який є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з $K+1$ рівнянь відносно $W_n(m\Delta t)$ ($n=\overline{0,N}$). Перші $k_\theta+1$ рівнянь цієї системи представляють перше рівняння вихідної системи (21), записані для $\theta_k\leq\theta^*$, а решта рівнянь – друге з $\theta^*<\theta_k\leq\pi$. Отже, k_θ є таке значення k, для якого $k_\theta\leq\dfrac{\theta^*}{\Delta\theta}<k_\theta+1$. Згадана СЛАР з урахуванням прийнятої квадратурної формули може бути представлена у вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta_k\cdot W_n(m\Delta t)=V(m\Delta t)\cos\theta_k,\quad k=\overline{0,k_\theta};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta_k\left(-\frac{\xi^2}{2}+P_n(0.5\Delta t)\Delta t\right)\cdot W_n(m\Delta t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta_k\cdot\left[\sum_{p=1}^{m-1}W_n(p\Delta t)P_n\big((m-p+0.5)\Delta t\big)\Delta t\right],$$
$$k=\overline{k_\theta+1,K}.$$

Отриману систему можна записати в матричній формі

$$\mathbf{AX}=\mathbf{Y}\tag{24}$$

так, що елементи матриць визначаються рівностями:

$$\{\mathbf{A}\}_{k+1,n+1}=\cos n\theta_k;\quad \{\mathbf{Y}\}_{k+1}=V(m\Delta t)\cos\theta_k\quad \text{для}\quad k=\overline{0,k_\theta};$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k+1,n+1}=\cos n\theta_k\left(-\frac{\xi^2}{2}+P_n(0.5\Delta t)\Delta t\right);\ \{\mathbf{Y}\}_{k+1}=-\cos n\theta_k\cdot\sum_{p=1}^{m-1}W_n(p\Delta t)P_n\big((m-p+0.5)\Delta t\big)\Delta t\ \text{ для }\ k=\overline{k_\theta+1,K};$$

$$\{\mathbf{X}\}_{n+1}=W_n(m\Delta t)\quad (n=\overline{0,N}).$$

Тоді, при $K=N$ розв'язок системи (24) може бути отриманий відповідно до класичної формули $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$. У випадку $K>N$ її розв'язок будується методом найменших квадратів – $\mathbf{X}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$, де індекс Т позначає операцію транспонування.

Обчислені з системи (24) коефіцієнти $W_n(m\Delta t)$ дозволяють визначити як радіальне переміщення u і нормальне напруження σ_{rr} на поверхні порожнини (див. (21)), так і силу реакції середовища Q (див. (18), (20)), і швидкість проникання V (див. (8)).

Результати обчислення при початковому значенні швидкості проникання $V_0=0{,}01$ і різних значеннях безрозмірної погонної маси тіла ($M\to\infty$; $M=10{,}5$; 3,5; 1 і 0,35) представлені на рис. 2 і 3 кривими 1-5, відповідно. Як і слід було очікувати, у початковий момент часу ($t=0$) сила Q миттєво приймає деяке значення $Q(0)$ (рис. 2). При цьому $Q(0)$ не залежить від маси тіла M і у випадку рівності радіусів циліндричних поверхонь ($R=R_b$) маємо $Q(0)=-V_0\theta^*\xi^2/2$. Подальший характер зміни $Q(t)$ визначається масою M. Так, при нескінченно великому значенні M швидкість руху тіла залишається незмінною (рис. 3, крива 1), однак спостерігається деяке зростання Q у часі (рис. 2, крива 1). Інша картина має місце при скінченних значеннях маси. Для досить важкого тіла з масою $M=10{,}5$ зміна в часі сили Q практично не відбувається (рис. 2, крива 2), але відповідна цьому значенню маси швидкість руху тіла V зменшується за законом, який близький до лінійного (рис. 3, крива 2). При менших значеннях маси тіла M швидкість V і сила Q з часом зменшуються, при цьому чим менша M, тим більша швидкість зміни (криві 3 на рис. 2 і 3 побудовані для $M=3{,}5$, криві 4 – для $M=1$, а криві 5 – для $M=0{,}35$). Відзначимо, що $M=1$ відповідає випадку, коли густини матеріалів тіла та середовища збігаються.

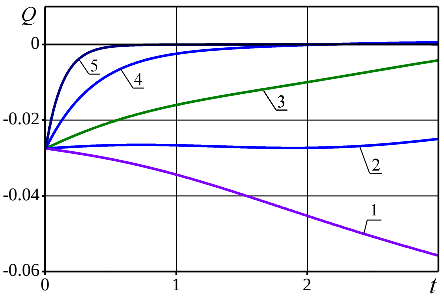


Рис. 2. Сила реакції середовища

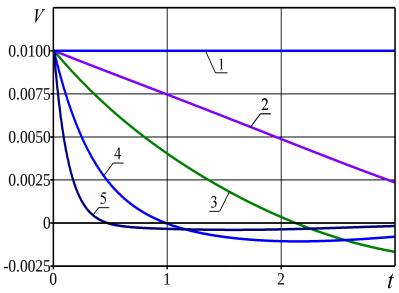


Рис. 3. Швидкість тіла

З рис. 3 також видно, що в певний момент часу $t=t_v$, коли $V(t)=0$, тіло зупиняється, а потім середовище починає «виштовхувати» тіло (має місце зворотний рух тіла). Виявилося, що після зміни напряму руху ($t>t_v$) швидкість зворотного руху тіла V зростає до моменту часу, коли сила реакції стає рівною нулеві. Після зміни знака Q швидкість, як і сама сила реакції середовища, повільно зменшується, асимптотично наближаючись до нульового значення.

Нескладно показати, що на початковому етапі взаємодії швидкість проникання тіла $V(t)$ змінюється за законом $V(t)=V_0e^{-(\xi^2/M)t}$, тобто зменшується експоненціально з показником експоненти ξ^2/M. Це випливає з того, що при малих t, коли за розв'язок системи (18) можна використовувати перше наближення $W(t,\theta)=H(\theta^*-|\theta|)V(t)\cos\theta$, $\sigma_{rr}=-\frac{\xi^2}{2}W(t,\theta)$, рівняння руху тіла (8), з врахуванням (9) і (10), запишеться:

$$M\frac{dV}{dt}=-\xi^2\int_0^{\theta^*}V(t)\cos\theta d\theta=-\xi^2V(t),\quad V(t)\big|_{t=0}=V_0.$$

Розв'язком цього рівняння є функція $V(t)=V_0 e^{-(\xi^2/M)t}$. Аналогічна залежність від часу при малих t буде мати місце для напруження σ_{rr} та сили реакції Q.

Зазначимо, що при побудові графіків на рисунках 2 і 3 число K, яке визначає кількість розрахункових точок за кутовою координатою, прийняте $K=200$.
На рис. 4 представлені графіки розподілення за кутовою координатою θ нормального напруження σ_{rr} для різних моментів часу ($t=0$; 0,25; 0,5; 1; 2 і 3). Значення маси тіла дорівнює $M=3{,}5$. Можна стверджувати, що з достатньою точністю ці криві можуть бути апроксимовані виразом

$$\sigma_{rr}(t,\theta)=H\left(\theta^*-|\theta|\right)\sigma_{rr}(t,0)\cos(\theta), \tag{25}$$

де $\sigma_{rr}(t,0)$ – напруження в лобовій точці $\theta=0$ (див. також [1]). Для порівняння на рис. 4 відповідний до цього виразу розподіл напруження σ_{rr} для моменту часу $t=2$ показаний штриховою кривою. Встановлено також, що в розглянутому випадку ($R=R_b$) сила реакції середовища $Q(t)$ прямо пропорційна напруженню в лобовій точці $\sigma_{rr}(t,0)$ – $Q(t)\approx\sigma_{rr}(t,0)\theta^*$. Аналогічні залежності встановлені і для інших значень безрозмірної маси тіла M.

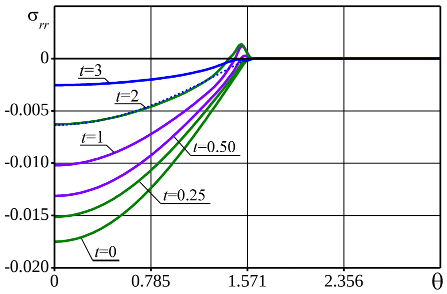


Рис. 4. Розподіл напруження

Зазначимо, що на графіках має місце локальне (в околі точки θ^*) розтягувальне напруження, яке, очевидно, обумовлено прийнятими граничними умовами, які виключають відрив тіла від поверхні порожнини.

ВИСНОВКИ

Запропонована методика чисельно-аналітичного розв'язання задачі про ударне проникання (нестаціонарне втискування) твердого циліндричного тіла в поверхню циліндричної порожнини в пружному просторі дозволяє в рамках лінійної задачі теорії пружності при швидкостях проникання, які значно менші швидкості пружних хвиль у середовищі, обчислити всі характеристики процесу взаємодії тіла та середовища. Слід пам'ятати, що розглянута постановка задачі не передбачає відрив тіла від поверхні порожнини. Тим самим інтервал часу, впродовж якого результати обчислень адекватно описують розглянутий процес, є обмеженим. Проведені обчислення для випадку, коли радіуси тіла та порожнини збігаються, з гарним ступенем точності підтвердили розподіл відповідно до $\cos(\theta)$ нормального напруження σ_{rr} по поверхні порожнини в області контакту – див. (25). Отже, для визначення сили опору середовища достатньо обчислити напруження $\sigma_{rr}(t,0)$ у лобовій точці тіла.

ЛІТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 509 с.
2. Adda-Bedia B. M. Supersonic and subsonic stages of dynamic contact between bodies / B.M. Adda-Bedia, Smith S.G. Llewellyn // Proc. R. Soc. A. – 2006. – Vol. 462. – P. 2781-2795.
3. Кубенко В. Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды / В.Д. Кубенко // Успехи механики (в 6-ти томах). – Т. 5 : К. : Літера Лтд., 2009. – С. 566-607.
4. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости / В.Б. Поручиков. – М. : Наука, 1986. – 328 с.

5. Thompson J. C. An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body / J.C. Thompson, A.R. Robinson // J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, Iss. 4. – P. 583-586.

6. Александров В. М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов-на-Дону : Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.

7. Чебаков М. И. К теории расчета двухслойного цилиндрического подшипника / М.И. Чебаков // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 3. – С. 163-170.

8. Кравчук А. С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами / А.С. Кравчук, А.В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 196 с.

9. Ciavarella M. The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact / M. Ciavarella, P. Decuzzi // Int. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P.4507-4523.

10. Коваленко Е. В. Математическое моделирование упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями / Е.В. Коваленко // Трение и износ. – 1995. – Т. 16, № 4. – С. 667-678.

11. Liu C. The compliance contact model of cylindrical joints with clearances / C. Liu, K. Zhang, L. Yang // Acta Mech Sinica. – 2005. – Vol. 21. – P. 451-458.

12. Мелешко И. Н. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для твердых тел с согласованными контактными поверхностями / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // Наука и техника. – 2013. – № 6. – С. 79-83.

13. Pedersen P. On the influence of clearance in orthotropic disc-pin contacts / P. Pedersen // Composite Structures. – 2007. – Vol. 79, Iss. 4. – P. 554-561.

14. Wang Q. J. Conformal-contact elements and systems / Q.J. Wang // Encyclopedia of Tribology. – 2013. – P. 434-440.

15. Gilardi G. Literature survey of contact dynamics modelling / G. Gilardi, I. Sharf // Mechanism and Machine Theory. – 2002. – Vol. 37, No. 10. – P. 1213-1239.

16. Zhong Z.-H. Contact-impact problems: A Review with bibliography / Z.-H. Zhong, Ja. Mackerle // Appl. Mech. Rev. – 1994. – Vol. 47, Iss. 2. – P. 55-76.

17. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К. : Наук. думка, 1978. – 308 с.

18. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – 295 с.

19. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Высшая школа, 1965. – 466 с.

20. Методы расчета оболочек : [в 5 т.] / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек / Гузь А.Н., Кубенко В.Д. – К. : Наук. думка, 1982. – 400 с.

21. Тихонов А. Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

REFERENCES

1. Johnson, K.L. (2003), *Contact mechanics*, Cambridge Univ. Press, New York, USA.

2. Adda-Bedia, B.M. and Llewellyn, Smith S.G. (2006), “Supersonic and subsonic stages of dynamic contact between bodies”, *Proc. R. Soc. A.*, vol. 462, pp. 2781-2795.

3. Kubenko, V.D. (2004), “Impact of blunted bodies on a liquid or elastic medium”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 40, iss. 11, pp. 1185-1225.

4. Poruchikov, V.B. (1993), *Methods of the classical theory of elastodynamics*, Springer, Berlin, Germany.
5. Thompson, J.C. and Robinson, A.R. (1977), “An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body”, *J. Appl. Mech.*, vol. 44, iss. 4, pp. 583-586.
6. Alexandrov, V.M. and Chebakov, M.I. (2007), *Vvedenie v mehaniku kontaktnogo vzaimodeistviia* [Introduction to the mechanics of contact interactions], Publ. OOO “TsVVR”, Rostov-on-Don, Russia.
7. Chebakov, M.I. (2009), “To the theory of analysis of a two-layer cylindrical bearing”, *Mechanics of Solids*, vol. 44, iss. 3, pp. 473-479.
8. Kravchuk, A.S. and Chigarev, A.V. (2000), *Mehanika kontaktnogo vzaimodeistviia tel s krugovymi granitsami* [Mechanics of contact interaction for solids with round boundaries], Tehnoprint, Minsk, Belarus.
9. Ciavarella, M. and Decuzzi, P. (2001), “The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact”, *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 38, pp.4507-4523.
10. Kovalenko, E.V. (1995), “Contact problems for conforming cylindrical bodies”, *J. Friction and Wear*, vol. 16, iss. 4, pp. 35-44.
11. Liu, C., Zhang, K. and Yang, L. (2005), “The compliance contact model of cylindrical joints with clearances”, *Acta Mech Sinica*, vol. 21, pp. 451-458.
12. Meleshko, I.N., Pronkevich, S.A. and Chigarev, A.V. (2013), “Numerical-analytical solution of Prandtl equations for solids with conformal contact surfaces”, *Nauka i tehnika*, iss. 6, pp. 79-83.
13. Pedersen, P. (2007), “On the influence of clearance in orthotropic disc-pin contacts”, *Composite Structures*, vol. 79, iss. 4, pp. 554-561.
14. Wang, Q.J. (2013), “Conformal-contact elements and systems”, *Encyclopedia of Tribology*, pp. 434-440.
15. Gilardi, G. and Sharf, I. (2002), “Literature survey of contact dynamics modelling”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, no. 10, pp. 1213-1239.
16. Zhong, Z.-H. and Mackerle, Ja. (1994), “Contact-impact problems: A Review with bibliography”, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, iss. 2, pp. 55-76.
17. Guz’, A.N., Kubenko, V.D. and Cherevko, M.A. (1978), Diffraction of elastic waves, *Sov. Appl. Mech.*, vol. 14, iss. 8, pp. 789-798.
18. Erdélyi A., et al. *Higher Transcendental Function*. Vol. **1**., McGraw Hill Book Co., Inc., New York, USA.
19. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. and Marichev, O.I. (1992) *Integrals and series* [in 5 v.]. Vol. 5: Inverse Laplace Transforms, Gordon and Breach Science Publ., New York, USA.
20. Guz’, A.N. and Kubenko, V.D. (1982), *Teoriia nestatsionarnoi aerogidrouprugosti obolochek* [The theory of nonstationary aerohydroelascticity of shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
21. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. (1995), *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Netherlands.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

Курпа Л. В., д. т. н., профессор, Шматко Т. В., к. т. н., доцент

Национальный технический университет «ХПИ», ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

L.Kurpa@mail.ru, ktv_ua@yahoo.com

В работе предлагается метод исследования геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек с различной формой плана. Постановка задачи выполнена в рамках уточненной нелинейной теории пологих оболочек первого порядка. Используемый алгоритм базируется на предложенных ранее идеях, в основу которых положены теория R-функций, вариационные методы и метод Рунге-Кутта. Выполнено тестирование предложенного подхода и исследованы функционально-градиентные пологие оболочки со сложной формой плана.
Ключевые слова: геометрически нелинейные колебания, функционально-градиентные материалы, пологие оболочки, теория R-функций, сложная геометрия.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ІЗ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ

Курпа Л. В., д. т. н., професор, Шматко Т. В., к. т. н., доцент

Національний технічний університет «ХПІ», вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна

L.Kurpa@mail.ru, ktv_ua@yahoo.com

У роботі пропонується метод дослідження геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з різною формою плану. Постановка задачі виконана у рамках уточненої нелінійної теорії пологих оболонок першого порядку. Використовуваний алгоритм базується на запропонованих раніше ідеях, в основу яких покладені теорія R-функцій, варіаційні методи і метод Рунге-Кутта. Виконано тестування запропонованого підходу і досліджені функціонально-градієнтні пологі оболонки із складною формою плану.
Ключові слова: геометрично нелінійні коливання, функціонально-градієнтні матеріали, пологі оболонки, теорія R-функцій, складна геометрія.

INVESTIGATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATIONS OF THE FUNCTIANALLY-GRADED SHALLOW SHELLS WITH COMPLEX PLANFORM

Kurpa L. V., D. of Technical Science, Professor,
Shmatko T. V., D. of Technical Science, Associate Professor

National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine

Kharkiv, Ukraine

The method for studying the geometrically nonlinear vibrations of functionally-graded shallow shells with a complex planform is proposed. Formulation of the problem is carried out using the refined geometrically nonlinear theory of shallow shells of the first order (Timoshenko's type). The R-functions theory, variational and Runge-Kytta methods are used in the developed approach. Test and new problems have been solved for FG shallow shells with elliptical and complex plan form.
Key words: geometrically nonlinear vibrations, functionally-graded materials, shallow shells, R-functions theory, complex geometry.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и изготовлении современных аэрокосмических объектов широко используются различные композиты и, в частности, функционально-градиентные материалы (ФГМ). Учитывая, что основные применения ФГМ связаны с работой в высокотемпературных средах, отметим, что первоначально большинство публикаций были посвящены исследованию температурных напряжений и деформаций. Позже в работах [1-6] были подняты проблемы прочности, колебаний и устойчивости ФГ объектов, связанные с влиянием на них механических воздействий. Достаточно полный обзор по нелинейному статическому и динамическому поведению пластин и оболочек из ФГМ представлен в работах [1, 5]. Следует заметить, что в основном для расчета ФГ пластин и оболочек используются приближенные методы, и наиболее применяемым является метод конечных элементов (МКЭ). Если же используются вариационные методы, то авторы ограничиваются прямоугольной формой плана и, как правило, одним типом граничных условий вдоль всей границы области (жесткое защемление или шарнирное опирание). Учитывая возможности теории R-функций, в настоящей работе предложен подход, позволяющий исследовать нелинейные колебания ФГ оболочек с практически произвольной формой плана и различными граничными условиями.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать композитные оболочки, изготовленные из смеси керамики и металла. При этом, как и в работе [9], примем степенной закон изменения объемной доли керамики:

$$V=\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k, \tag{1}$$

где h – толщина оболочки, k – показатель степени объемной доли материала, который может изменяться от 0 до бесконечности, т.е. ($0\le k\le\infty$). При этом, если $k=0$, то структура является полностью керамической, если же $k=\infty$, то – металлической. В общем случае материальные свойства ФГМ (модуль Юнга, коэффициент теплового расширения и др.) могут быть представлены как

$$P=\sum_{j=1}P_jV_j\,,$$

где P и V_j – материальные свойства и объемная доля составляющего материала. Следует заметить, что ФГ структуры используются, как правило, в высокотемпературных средах, следовательно, механические свойства материалов могут существенно изменяться с изменением температуры. Поэтому эта зависимость должна приниматься в расчет для получения более точного решения. Воспользуемся этими зависимостями, приведенными в работах [4, 5]

$$P_j=P_0\left(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3\right),$$

где P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3 – коэффициенты, определяемые для каждого конкретного материала. Таблица значений этих коэффициентов для некоторых материалов представлена в работах [1, 4, 5]. Механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z,T)=\left(P_c(T)-P_m(T)\right)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^k+P_m(T). \tag{2}$$

Выражение (2) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости E, коэффициента Пуассона ν и плотности ρ композита; P_c, P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Обозначим перемещения в любой точке оболочки через u_1, u_2, u_3. Согласно нелинейной теории пологих оболочек первого порядка, учитывающей деформации сдвига, перемещения u_1, u_2, u_3 могут быть представлены как [2, 4]:

$$u_1 = u + z\psi_x,\quad u_2 = v + z\psi_y,\quad u_3 = w,$$

где u, v и w – перемещения оболочки в срединной поверхности в направлении осей Ox, Oy, Oz соответственно; ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей Oy и Ox. Соотношения для деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{11};\varepsilon_{22};\varepsilon_{12}\}^T$, $\chi = \{\chi_{11};\chi_{22};\chi_{12}\}^T$ выражаются с помощью следующих формул:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND},\quad (i, j = 1,2),$$

где

$$\varepsilon_{11}^L = u,_x + w/R_x,\quad \varepsilon_{22}^L = v,_y + w/R_y,\quad \varepsilon_{12}^L = u,_y + v,_x,$$

$$\varepsilon_{11}^{ND} = \frac{1}{2}w,_x^2,\quad \varepsilon_{22}^{ND} = \frac{1}{2}w,_y^2,\quad \varepsilon_{12}^{ND} = w,_x w,_y,$$

$$\varepsilon_{13} = w,_x + \psi_x,\quad \varepsilon_{23} = w,_y + \psi_y,\quad \chi_{11} = \psi_x,_x,\quad \chi_{22} = \psi_y,_y\quad \chi_{12} = \psi_x,_y + \psi_y,_x.$$

В настоящей работе будем рассматривать материалы, для которых коэффициент Пуассона не зависит от температуры и будет одинаковым для керамики и металла, т.е., $\nu_m = \nu_c$. В этом случае усилия $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$ и моменты $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$ в рамках теории пологих оболочек первого порядка (типа теории Тимошенко) с учетом степенного закона (1) определяются как:

$$N = \{N_{11};N_{22};N_{12}\}^T = \frac{1}{1-\nu^2}[C](E_1\varepsilon + E_2\chi),\quad M = \{M_{11};M_{22};M_{12}\}^T = \frac{1}{1-\nu^2}[C](E_2\varepsilon + E_3\chi),$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},\quad E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1}\right)h,\quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)}\right)\right)h^3.$$

Плотность композита ρ определяется с помощью следующей формулы:

$$\rho = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1}\right)h.$$

Потенциальная и кинетическая энергия определяются следующим образом:

$$U = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12})d\Omega +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left(Q_x(w,_x + \psi_x) + Q_y(w,_y + \psi_y)\right)d\Omega,$$

$$T = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} I_0\left(u,_t^2 + v,_t^2 + w,_t^2\right) + 2I_1\left(u,_t \psi_x,_t + v,_t \psi_y,_t\right) + I_2\left(\psi_x,_t^2 + \psi_y,_t^2\right)dxdy,$$

где

$$I_o = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1}\right)h\,, \quad I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m)k}{2(k+1)(k+2)} h^2\,,$$

$$I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)}\right)\right)h^3\,.$$

Перерезывающие силы Q_x, Q_y определяются как:

$$Q_x = K_s^2 A_{33}\varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33}\varepsilon_{23}\,,$$

где K_s^2 – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным $5/6$.

Применяя метод Остроградского-Гамильтона можно получить уравнения движения, которые дополняются граничными условиями, определяемыми способом закрепления краев оболочки. Начальные условия принимаются в виде:

$$w\big|_{t=0} = w_{\max}\,, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,. \tag{3}$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Предлагаемый метод исследования геометрически нелинейных колебаний ФГ пологих оболочек предусматривает на первом шаге решение линейной задачи. Для её решения используется вариационно-структурный метод (RFM), базирующийся на применении теории R-функций и вариационных методах, в данном случае – методе Ритца. Метод решения линейных задач ФГ пологих оболочек описан в работе [9]. При решении нелинейной задачи будем игнорировать силами инерции в плоскости пластины. Представим неизвестные функции в виде разложения по собственным функциям $w_1^{(c)}(x,y)$, $u_1^{(c)}(x,y)$, $v_1^{(c)}(x,y)$, $\psi_{x1}^{(c)}(x,y)$, $\psi_{y1}^{(c)}(x,y)$, соответствующим основной форме колебаний:

$$w = y(t) w_1^{(c)}(x,y), \quad \psi_x = y(t)\psi_{x1}^{(c)}(x,y), \quad \psi_y = y(t)\psi_{y1}^{(c)}(x,y), \tag{4}$$

$$u = y(t) u_1^{(c)}(x,y) + y^2(t) u_{11}, \quad v = y(t) v_1^{(c)}(x,y) + y^2(t) v_{11}\,.$$

Коэффициенты этого разложения представляют собой функцию $y(t)$, зависящую от времени, а функции u_{11}, v_{11} должны быть решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_{11}) + L_{12}(v_{11}) &= -Nl_1^{(2)}\left(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}\right), \\ L_{21}(u_{11}) + L_{22}(v_{11}) &= -Nl_2^{(2)}\left(w_1^{(c)}, w_1^{c}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$Nl_1^{(2)}\left(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}\right) = w_1^{(c)},_x L_{11} w_1^{(c)} + w_1^{(c)},_y L_{12} w_1^{(c)},$$

$$Nl_2^{(2)}\left(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}\right) = w_1^{(c)},_x L_{12} w_1^{(c)} + w_1^{(c)},_y L_{22} w_1^{(c)}\,.$$

Операторы $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ в уравнениях (5) определяются как:

$$L_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2}\left((\ ),_{xx} + \frac{1-\nu}{2}(\ ),_{yy}\right), \quad L_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2}\left(\frac{1-\nu}{2}(\ ),_{xx} + (\ ),_{yy}\right), \quad L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1-\nu)}(\ ),_{xy}\,.$$

Система (5) дополняется соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи также выполняется с помощью вариационного метода Ритца и RFM. В результате такого выбора функций $u_{11}(x,y)$ и $v_{11}(x,y)$, после подстановки выражений (4) в уравнения движения и применения процедуры Бубнова-Галеркина, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y''(t)+\omega_L^2 y_1(t)+y_1^2(t)\beta+y_1^3(t)\gamma=0. \tag{6}$$

Выражения для коэффициентов этого уравнения получены в аналитическом виде и выражены через двойные интегралы от известных функций:

$$\beta=\frac{-1}{m_1\left\|w_1^{(c)}\right\|^2}\iint\limits_{\Omega 11}\Big(N_{11}^{(L)}\left(w_1^{(c)}\right)_{,xx}+N_{22}^{(L)}\left(w_1^{(c)}\right)_{,yy}+2N_{12}^{(L)}\left(w_1^{(c)}\right)_{,xy}+$$

$$+M_{11}^{(NL)}{}_{,xx}+M_{22}^{(NL)}{}_{,22}+2M_{12}^{(NL)}{}_{,12}-k_1N_{11}^{(NL)}-k_2N_{22}^{(NL)}\Big)w_1^{(c)}d\Omega,$$

$$\gamma=-\frac{1}{m_1\left\|w_1^{(c)}\right\|^2}\iint\limits_{\Omega}\Big(N_{11}^{(NL)}\left(u_{11},v_{11},w_1^{(c)}\right)\left(w_1^{(c)}\right)_{,xx}+N_{22}^{(NL)}\left(u_{11},v_{11},w_1^{(c)}\right)\left(w_1^{(c)}\right)_{,yy}+$$

$$+2N_{12}^{(NL)}\left(u_{11},v_{11},w_1^{(c)}\right)\left(w_1^{(c)}\right)_{,xy}\Big)w_1^{(c)}d\Omega,$$

где

$$N^{(L)}=\left\{N_{11}^{(L)};N_{22}^{(L)};N_{12}^{(L)}\right\}^T=\frac{1}{1-\nu^2}[C]\left(E_1\varepsilon^{(L)}+E_2\chi\right),$$

$$N^{(NL)}=\left\{N_{11}^{(NL)};N_{22}^{(NL)};N_{12}^{(NL)}\right\}^T=\frac{E_1}{1-\nu^2}[C]\varepsilon^{(NL)},\quad M^{(NL)}=\left\{M_{11}^{(NL)};M_{22}^{(NL)};M_{12}^{(NL)}\right\}^T=\frac{E_3}{1-\nu^2}[C]\varepsilon^{(NL)},$$

$$\varepsilon^{(L)}=\varepsilon^{(L)}\left(u_1^{(c)},v_1^{(c)},w_1^{(c)}\right)=\left\{\left(u_1^{(c)}\right)_{,x}+k_1w_1^{(c)};\quad\left(v_1^{(c)}\right)_{,y}+k_2w_1^{(c)};\quad\left(\left(u_{i1}^{(c)}\right)_{,y}+\left(v_1^{(c)}\right)_{,x}\right)\right\}^T,$$

$$\varepsilon^{(NL)}=\varepsilon^{(NL)}\left(u_{11},v_{11},w_1^{(c)}\right)=\Big\{(u_{11})_{,x}+\frac{1}{2}\left(\left(w_1^{(c)}\right)_{,x}\right)^2;(v_{11})_{,y}+\frac{1}{2}\left(\left(w_1^{(c)}\right)_{,y}\right)^2,$$

$$\left(u_{11}\right)_{,y}+\left(v_{11}\right)_{,x}+\left(w_1^{(c)}\right)_{,x}\left(w_1^{(c)}\right)_{,y}\Big\}^T.$$

Для решения уравнения (6) с начальными условиями (3) воспользуемся методом Рунге Кутта.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача 1. С целью проверки достоверности предложенного подхода рассмотрим решение некоторых тестовых задач.

Исследуем нелинейные свободные колебания сферической жестко защемленной оболочки, опирающейся на эллиптический план. В работе [9] эта задача была решена только в линейной постановке, и выполнено сравнение для двух сплавов:

FG1: $Al/Al_2O_3 : E_m/E_c=70/380\,GPa;\ \nu_m=\nu_c=0{,}3;\ \rho_m/\rho_c=2707/3800\,kg/m^3$;

FG2: $Al/ZrO_2 : E_m/E_c=70/151\,GPa;\ \nu_m=\nu_c=0{,}3;\ \rho_m/\rho_c=2707/3000\,kg/m^3$.

На рис. 2 представлены зависимости отношения нелинейной частоты к линейной от прогиба для материала FG2 и значений параметра $k=10$, $k=100$. Сравнение скелетных кривых с результатами работы [6] подтверждает достоверность предложенного подхода. В рамках точности графика полученные результаты практически совпадают. Максимальное отклонение не превышает 1,5%.

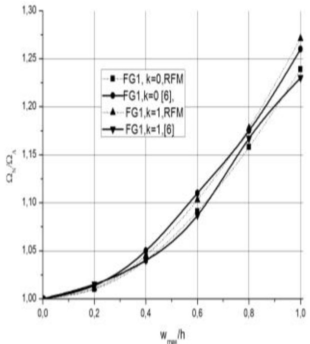


Рис. 1

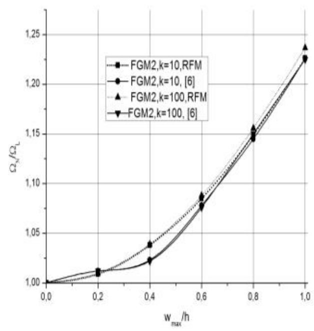


Рис. 2

Задача 2. Для иллюстрации возможностей разработанного подхода, рассмотрим аналогичную задачу для сферических оболочек, план которых представлен на рис. 3. Предполагается, что оболочка полностью жестко закреплена. Для построения системы координатных функций будем использовать следующие структурные формулы:

$$u=\omega\Phi_1,\quad v=\omega\Phi_2,\quad w=\omega\Phi_3,\quad \psi_x=\omega\Phi_4,\quad \psi_y=\omega\Phi_5 .$$

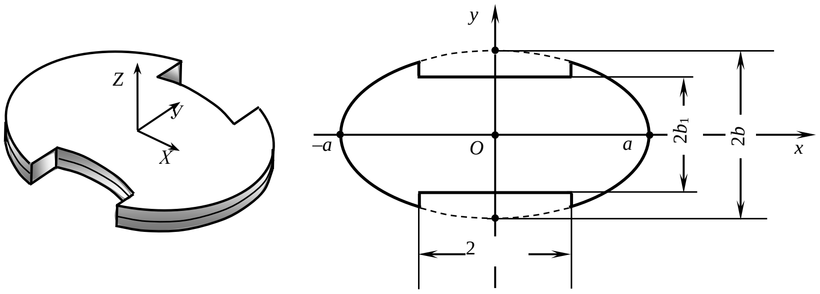


Рис. 3

Уравнение границы области $\omega=0$ построим с помощью теории R-функций:

$$\omega=\left(f_1\vee_0 f_2\right)\wedge_0 f_3,$$

где f_1, f_2, f_3 определяют следующие множества точек:

$$f_1=\left(\left(x^2-a_1^{\,2}\right)/2a_1\right)\geq 0;\quad f_2=\left(\left(b_1^{\,2}-y^2\right)/2b_1\right)\geq 0;\quad f_3=\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\geq 0 .$$

Символы $\wedge_0$, $\vee_0$ определяют R-операции: R-конъюнкцию и R-дизъюнкцию соответственно [10]. Неопределенные компоненты в структурных формулах аппроксимировались с учетом симметрии поставленной задачи относительно осей Ox и Oy. Интегрирование выполнялось по 1/4 области. Результаты решения линейной задачи для материалов FG1 и FG2 представлены на рис. 4, 5. в виде зависимостей линейной частоты $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ от значений показателя *к*-объемной доли керамики.

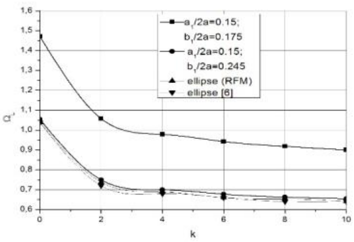


Рис. 4

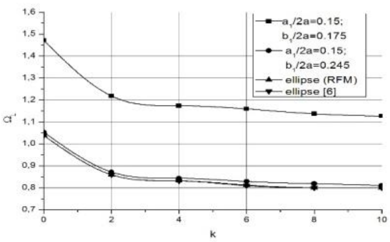


Рис. 5

При этом было принято, что $b_1/2a = 0{,}175$; $a_1/2a = 0{,}15$. Наряду с такими значениями была решена задача для отношений $b_1/2a = 0{,}245$; $a_1/2a = 0{,}15$. В последнем случае геометрическая форма плана (рис. 3) стремится к эллиптической, и результаты можно сравнить с результатами работы [6]. Из приведенных графиков видно, что они практически совпадают, что подтверждает достоверность решения линейной задачи в случае сложной геометрии.

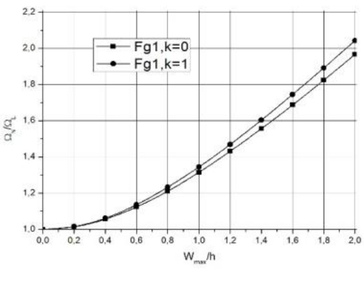


Рис. 6

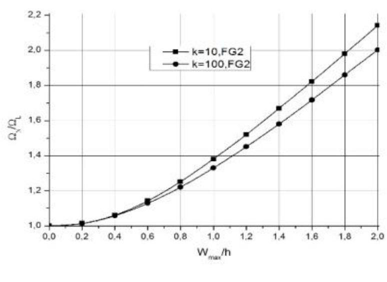


Рис. 7

На рис. 6, 7 изображены скелетные кривые оболочек, изготовленных из смесей FG1 и FG2 соответственно. Геометрические параметры совпадают с параметрами, выбранными для линейной задачи и принято, что $b_1/2a = 0{,}175$; $a_1/2a = 0{,}15$. В обоих случаях кривые имеют жесткий характер, монотонно возрастают, что характерно для умеренно толстых жестко закрепленных оболочек ($h/2a = 0{,}1$).

При проведении вычислительного эксперимента было установлено, что при движении отношения $b_1/2a \to 0{,}25$, т.е. $b_1/b \to 1$ скелетные кривые совпадают с соответствующими кривыми для эллиптического плана, что подтверждает достоверность полученных результатов.

ВЫВОДЫ

В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. Метод основан на использовании теории R-функций, вариационном методе Ритца, процедуры Бубнова-Галеркина и методе Рунге-Кутта. Для уточненной теории пологих оболочек 1-го порядка предложенный подход реализован в рамках системы POLE-RL. Проведенное тестирование для оболочек, опирающихся на эллиптический план, доказывает достоверность и эффективность предложенного метода, иллюстрация которого выполнена для оболочек со сложной формой плана. В будущем разработанный метод планируется применять не только для граничных условий, отвечающих жестко закрепленным ФГ оболочкам, но и для других, в том числе смешанных. Кроме этого, интересно было бы применить разработанный подход для математической постановки задачи в смешанной форме, а не только в перемещениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alijani F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells / F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, F. Bakhtiari-Nejad// Journal of Sound and Vibration. – 2011. – 330. – P. 1432-1454. Print.
2. Reddy J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy // Int J Mech Sci. – 1999. – 41. – P. 309-324. Print.
3. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory / H. Matsunaga // Composite Structures. – 2008. – 84. – P. 132-146. Print.
4. Reddy J. N. Analysis of functionally graded plates / J.N. Reddy // International Journal for numerical methods in engineering. – 2000. – 47. – P. 663-684. Print.
5. Shen H. S. Functionally Graded Materials of Plates and Shells / H.S. Shen. – Florida : CPC Press, 2009. – 266 p. Print.
6. Chorfi S.M. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form / S.M. Chorfi, A. Houmat // Composite Structures. – 2010. – 92. – P. 2573-2581. Print.
7. Курпа Л. В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана / Л.В. Курпа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85.
8. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л.В. Курпа. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
9. Курпа Л. В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана / Л.В. Курпа, Т.В. Шматко // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 8(54). – С. 77-85.
10. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

REFERENCES

1. Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K. and Bakhtiari-Nejad, F. (2011), “Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells” *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp. 1432–1454.
2. Reddy, J.N., Loy, C.T. and Lam, K.Y. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *Int J Mech Sci*, 41, pp. 309-324.
3. Matsunaga, H. (2008), “Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory”, *Composite Structures*, 84, pp. 132-46.
4. Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *International Journal for numerical methods in engineering*, 47, pp. 663-684.
5. Shen, H.S. (2009), “Functionally Graded Materials of Plates and Shells”, CPC Press, Florida.
6. Chorfi, S.M. and Houmat, A. (2010), “Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form”, *Composite Structures*, 92, pp. 2573-2581.

7. Kurpa, L.V. (2008), “Nelinejnye svobodnye kolebaniya mnogoslojnyx pologix obolochek simmetrichnogo stroeniya so slozhnoj formoj plana”, *Mat. metodi ta fiz.-mex. polya*, 51, no. 2, pp. 75-85.
8. Kurpa, L.V. (2009), “Metod R-funkcij dlya resheniya linejnyx zadach izgiba i kolebanij pologix obolochek”, NTU “XPI”, Xar'kov.
9. Kurpa, L.V. and Shmatko, T.V. (2014), “Svobodnye kolebaniya funkcional'no-gradientnyx pologix obolochek so slozhnoj formoj plana”, *Teoret. i prikladnaya mexanika*, issue 8(54), pp. 77-85.
10. Rvachev, V.L. (1982), “Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya”, Nauk.dumka, Kiev, 1982.

УДК 519.6 (075.8)+536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ТОПЛИВНОЙ КАССЕТЕ ТВЭЛОВ

[1,2]Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., [1]Шейко Т. И., д. т. н., профессор

[1]*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

[2]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61000, Украина*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Целью работы является математическое и компьютерное моделирование сопряженной задачи конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛов методом R-функций и исследование влияния вида упаковки и формы кассеты на распределение скорости и температуры.
Рассмотрены сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналам неканонического сечения, обтекая пучок стержней. Рассмотрены различные упаковки ТВЭЛов и формы кассет. Показано, что метод R-функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы.
Ключевые слова: теория R-функций; метод Ритца; сопряженная задача; теплообмен; топливная кассета; треугольная, циклическая, прямоугольная упаковки; трансляционная и циклическая симметрии.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПАЛИВНІЙ КАСЕТІ ТВЕЛІВ

[1,2]Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., [1]Шейко Т. І., д. т. н., професор

[1]*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

[2]*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків, 61000, Україна*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Метою роботи є математичне і комп’ютерне моделювання сполученої задачі конвективного теплообміну в гратках ТВЕЛів методом R-функцій та дослідження впливу вигляду упакування та форми касети на розподіл швидкості та температури.
Розглянуто сполучені крайові задачі теплообміну для випадків, коли в’язка нестислива рідина рухається по каналах неканонічного перерізу, обтікаючи пучок стрижнів. Розглянуто різні упакування ТВЕЛів та форми касет. Показано, що метод R-функцій є ефективним методом розв’язання задач розрахунку фізичних полів в елементах конструкцій ядерних енергетичних установок складної форми.
Ключові слова: теорія R-функцій; метод Ритца; сполучена задача; теплообмін; паливна касета; трикутне, циклічне, прямокутне упакування; трансляційна і циклічна симетрії.

THE CONVECTIVE HEAT-TRANSFER ANALYSIS IN FUEL ELEMENT CARTRIDGE

[1,2]Maksimenko-Sheiko K. V., D. of Technical Science, Senior Researcher
[1]Sheiko T. I., D. of Technical Science, Professor

[1]*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine, Pozharsky st., 2/10, Kharkov, 61000, Ukraine*

[2]*V.N. Karazin Kharkov Narional University, sq. Liberty, 4, Kharkov, 61000, Ukraine*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

The world nuclear fuel market is divided between three global level concerns- Russian Fuel company “TVEL”, the American company “Westinghouse” and the French one “Areva”. There is a competitive struggle between these companies. The companies aspire to win each other a part of the market. Thus the designs of reactors' active zone are essentially various. Everyone has the advantages and drawbacks. So, for example, at the Westinghouse TBC-W fuel the spacer grids were the weak elements. However the fuel made by this company is more effective than Russian one on some significant parameters. One of the primary goals of a reactor' calculation is the temperature field finding as to fuel elements made great demands concerning their reliability. The failure of several fuel elements can result in an emergency. There is a necessity for the solving of corresponding transfer problems as conjugate problems in this case. These solutions allow carry out the researches of real heat-transfer processes where the mutual influence of a moving liquid, the forms of the channel walls, the kind of fuel elements' packings etc. is essentially shown. The plenty of fuel elements is located in each fuel cartridge, and the cartridges' shapes and the packings' kind are rather various. It creates the certain difficulties during mathematical and computer modelling of real physical processes. In this case the R-functions method is rather useful. This method allows to realize analytical identification of complex-shape geometrical objects and to build the structures of solutions of boundary value problems, precisely satisfying boundary conditions.
The goal of this work is the mathematical and computer modelling of the conjugate problem of convective heat exchange in fuel lattices with the help of the R-functions method and the research of influence of the packing kind and of the cartridge shape at the speed and temperature distribution.
The conjugate boundary value problems of heat exchange are considered for cases when the viscous incompressible liquid flowing around a bunch of rods on non-classical section channels. The influence of the packing kind and of the cartridge shape at the speed and temperature distribution is investigated. The R-functions theory in combination with variational Ritz method was used. The various fuel elements' packings and cartridges' shapes are considered. Each packing contains from 81 up to 91 rods. The corresponding equations are constructed using the new R-functions theory' constructive means. This means have allowed reduce essentially the R-operations quantity. It has resulted in reduction of calculation time. The cubic Schönberg splines were used as the approximation means with splitting from 60×60 up to 100×100. It is shown that the R-functions method is effective for the solving of the physical fields' calculation problems in the complex shape designs' elements of nuclear power installations. The lead researches allow designers to choose those or other packings' kinds depending on technical requirements. Thus the calculation of the temperature field for the cartridge as a whole is essential. The mathematical modelling and the computer experiment are irreplaceable when the natural experiment is impossible or complicated for whatever reasons. The computing experiments with models of objects allow to study them in detail and deeply, basing on modern numerical methods.
Key words: R-functions theory; Ritz method; conjugate problem; heat transfer; fuel element cartridge; triangle, cyclic, rectangular packing; translation and cyclic symmetry.

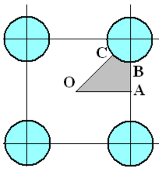
ВВЕДЕНИЕ

Мировой рынок ядерного топлива поделен между тремя концернами мирового уровня – российской Топливной компанией «ТВЭЛ», американской Westinghouse и французской Areva, между которыми идет конкурентная борьба. Компании стремятся отвоевать друг у друга часть рынка. При этом конструкции активной зоны реакторов существенно различны и каждая имеет свои преимущества и недостатки. Так, например, у топлива Westinghouse ТВС-W был слабый элемент – это дистанционирующие решетки, однако топливо, производимое этой компанией, по некоторым значимым показателям эффективнее российского.

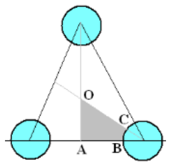
В активной зоне современных ядерных энергетических установок ядерное топливо сконцентрировано в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛах). Одна из основных задач расчета реактора – определение поля температур, так как к ТВЭЛам предъявляются очень высокие требования в отношении их надежности. Выход из строя нескольких ТВЭЛов, а в реакторе их тысячи, может привести к аварийной ситуации. В этом случае появляется необходимость в решении соответствующих задач переноса в сопряженной постановке, так как эти решения позволяют проводить исследования реальных теплообменных процессов, где существенно проявляется взаимное влияние движущейся жидкости, стенок канала, ТВЭЛов и др. Так как в каждой топливной кассете расположено большое количество ТВЭЛов, а формы кассет и вид упаковок весьма разнообразны, то это создаёт определенные трудности в процессе проведения математического и компьютерного моделирования реальных физических процессов. В этом случае весьма полезным является метод R-функций, позволяющий реализовать аналитическую идентификацию сложных геометрических объектов и строить структуры решений краевых задач математической физики, точно удовлетворяющие граничным условиям.

Рассмотрим сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналу неканонического сечения, обтекая пучок стержней. Предполагается, что физические свойства жидкости постоянны, ламинарное течение гидродинамически стабилизировано, процесс теплообмена стационарен. На внешней поверхности канала могут быть заданы условия первого, второго, третьего рода. Предполагается, что изменение плотности теплового потока вдоль оси канала за счет аксиальной теплопроводности пренебрежимо мало по сравнению с изменением теплового потока, обусловленного конвекцией. Предполагается также, что стенки трубы и внутренние стержни выполнены из изотропного материала, причем теплопроводность последнего можно считать постоянной в рассматриваемом интервале температур [1-3].

Наличие внутренних источников тепла в элементах реактора усложняет как уравнение теплопроводности, так и методы его решения. В работах [1, 3] рассматривался теплообмен в пучке продольно обтекаемых бесконечных цилиндров. Предполагалась симметрия температурного поля в силу симметрии системы, и рассматривалась лишь область *OABC* (рис.1).



а)



б)

Рис. 1. Расположение рабочих каналов в активной зоне реактора: а) – коридорное; б) – шахматное

Целью работы является совершенствование конструктивных средств и алгоритмов метода R-функций для математического и компьютерного моделирования сопряженной задачи конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛов и исследование влияния вида упаковки и формы кассеты на распределение скорости и температуры.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \dfrac{q_V}{\rho c_p} + \dfrac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \dfrac{D\vec{V}}{D\tau} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu\Delta\vec{V}, \\ div\vec{V} = 0, \end{cases}$$

где $\dfrac{D}{D\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)$ – субстанциальная (или полная) производная, $\mu\Phi$ – диссипативная функция, $a=\dfrac{\lambda}{\rho c_p}$ – коэффициент температуропроводности, c_p – теплоемкость среды, q_V – мощность внутренних источников тепла.

В случае стационарных процессов температура тела не зависит от времени, и уравнение теплопроводности при продольном обтекании ТВЭЛов принимает вид:

$$V_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\Delta T+\frac{q_V}{\rho c_p},$$

а математическая модель поля скоростей при ламинарном течении имеет вид $\Delta V_z=-\dfrac{\nabla P}{\mu l}=-C$, где ∇P – постоянное вдоль трубы падение давления на произвольно выбранном участке длины l.

В области тепловой стабилизации, когда $\dfrac{\partial T}{\partial z}=\mathrm{const}$, получим

$$-div(\lambda\nabla T)=q_V-V_zC_1.$$

Таким образом, математическая модель теплообмена при ламинарном движении жидкости по кассете с ТВЭЛами сводится к системе уравнений

$$\begin{cases}\Delta V_z=-C & \text{в} \quad \Omega_b\bigcap\overline{\Omega_{tv}},\\ -div\left(\lambda_i\nabla T_i\right)=F_i & \text{в} \quad \Omega_b,\end{cases}$$

где

$$\begin{cases}F_1=-V_z & \text{в} \quad \Omega_b\bigcap\overline{\Omega_{tv}},\\ F_2=q_V & \text{в} \quad \Omega_{tv}\end{cases}$$

с граничными условиями вида

$$V_z\big|_{\partial\Omega_b\bigcap\overline{\partial\Omega_{tv}}}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial n}+hT\Big|_{\Omega_b}=0,\quad T_1\big|_{\partial\Omega_{tv}}=T_2\big|_{\partial\Omega_{tv}},\quad \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}\bigg|_{\partial\Omega_{tv}}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial n_2}\bigg|_{\partial\Omega_{tv}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим типовую конструктивную схему реактора, активная зона которого собирается из большого числа топливных кассет [2, 3]. Кассеты представляют собой шестигранные кожухи, в которых размещены тепловыделяющие элементы.

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема 1. Пусть трансляционная область $\Sigma_0=\left[\sigma_0(x,y,z)\geq 0\right]$ симметрична относительно оси Oy и может быть заключена в вертикальную полосу $-a<x<a$, а области $\Sigma_i=\left[\sigma_0(x-hi,y.z)\geq 0\right]$ получены в результате преобразования переноса области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h>2a$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega=\bigcup\limits_{i\in Z}\Sigma_i$ имеет вид

$$\omega(x,y,z)\equiv\sigma_0(\mu(x,h),y,z)=0,$$

где $\mu(x,h)=\frac{4h}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2}\sin\frac{(2i-1)x\pi}{h}$.

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема 2. Пусть трансляционная область $\Sigma_0=[\sigma_0(x,y,z)\ge 0]$ симметрична относительно оси абсцисс, а область $\Sigma_1=[\sigma_0(x-r_0,y,z)\ge 0]$ может быть размещена внутри сектора $-\alpha\le\theta\le\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{n}$. Области $\Sigma_k=\left[\sigma_0\left(r\cos\left(\theta-{2\pi k}/{n}\right)-r_0, r\sin\left(\theta-{2\pi k}/{n}, z\right)\right)\ge 0\right]$ получены в результате поворота области $\Sigma_1=[\sigma_0(x-r_0,y,z)\ge 0]$ в плоскости xOy вокруг начала координат на углы ${2\pi k}/{n}$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega=\bigcup_{k=0}^{n-1}\Sigma_k$ имеет вид $\omega(x,y)\equiv\sigma_0(r\cos\mu(\theta,n)-r_0, r\sin\mu(\theta,n),z)=0,\ \left(r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=arctg\frac{y}{x}\right)$, где

$$\mu(n\theta)=\frac{8}{n\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Построим уравнение топливной кассеты с 91 ТВЭЛом и раздвинутой треугольной упаковкой, которую иногда называют шахматной. Заметим, что при применении обычной методики, используемой в теории R-функций [5], мы получим в результате 93 R-операции в уравнении. Громоздкая формула приведет не только к увеличению времени счета, но и, возможно, к некоторому нарушению симметрии из-за неассоциативности R-операций. Поэтому для построения уравнения шестигранного кожуха воспользуемся *теоремой 2*. Рассмотрим уравнение прямой $\sigma\equiv R_v-x\ge 0$ и периодическую функцию $\mu_v=\frac{4}{3\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin[(2k-1)3\theta]}{(2k-1)^2}$. В результате получим $\omega_b\equiv R_v-r\cos\mu_v=0$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=arctg\frac{y}{x}$. Для построения треугольной упаковки ТВЭЛов воспользуемся *теоремой 1*. Зададим

$$f_1=R^2-\mu_x^2-\mu_y^2\ge 0,$$

$$\text{где } \mu_x=\frac{4h_x}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2},$$

$$\mu_y=\frac{4h_y}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_y}\right]}{(2k-1)^2},\ \text{и}\ f_2=R^2-\mu_{x1}^2-\mu_{y1}^2\ge 0,$$

где $\mu_{x1}=\frac{4h_x}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(x-h_x/2)}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}$, $\mu_{y1}=\frac{4h_y}{\pi^2}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(y-h_y/2)}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}$.

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид $\omega\equiv\omega_b\wedge_0\overline{\omega_{tv}}\ge 0, \omega_{tv}\equiv(f_1\vee_0 f_2)\ge 0$.

Построение функции $\omega(x,y)$ выполнено при следующих значениях буквенных параметров: $R=0,2$; $h_x=2,32$; $h_y=1,35$; $n_0=6$; $r_k=6,7$. Следует отметить, что при построении уравнения кассеты по новой методике R-операции использовались лишь два раза.

Остановимся также на построении функции $\omega(x,y)\equiv\omega_b\wedge_0\overline{\omega_{tv}}\geq 0$, когда ТВЭЛ транслируется с циклической симметрией n_d раз вдоль окружности радиуса R и n_b раз вдоль окружности радиуса R_1 и n_c раз вдоль окружности радиуса R_2. Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией n_d раз вдоль окружности радиуса R, воспользуемся *теоремой 2* $\omega_o\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(x-R)^2-y^2\right)$ и формулой $\mu_d=\frac{8}{n_d\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_d\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$. В результате получим $\omega_{tv1}\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(r\cos\mu_d-R)^2-(r\sin\mu_d)^2\right)\geq 0$.

Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией n_b раз вдоль окружности радиуса R_1, воспользуемся функцией $\omega_{o1}\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(x-R_1)^2-y^2\right)$ и формулой $\mu_b=\frac{8}{n_b\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_b\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$. Тогда $\omega_{tv2}\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(r\cos\mu_b-R_1)^2-(r\sin\mu_b)^2\right)\geq 0$.

Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией n_c раз вдоль окружности радиуса R_2, воспользуемся функцией $\omega_{o2}\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(x-R_2)^2-y^2\right)$ и формулой $\mu_c=\frac{8}{n_c\pi}\sum_k(-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_c\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}$. Тогда $\omega_{tv3}\equiv\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-(r\cos\mu_c-R_2)^2-(r\sin\mu_c)^2\right)\geq 0$.

Таким образом, уравнение границы кассеты с 91 ТВЭЛом имеет вид $\omega\equiv\left(\omega_b\wedge_0\overline{\omega_{tv1}\vee_0\omega_{tv2}\vee_0\omega_{tv3}}\right)\geq 0$, при $n_d=38$, $R=6$, $n_b=32$, $R_1=4,5$, $n_c=21$, $R_2=3$ и является семипараметрическим ($n_b, n_d, n_c, R, R_1, R_2, R_{tv}$) семейством кривых (рис. 2, б). Следует отметить, что R-операции использовались лишь три раза. При наличии центрального ТВЭЛа получим $\omega\equiv\omega_b\wedge_0\overline{\omega_{tv1}\vee_0\omega_{tv2}\vee_0\omega_{tv3}\vee_0\frac{1}{2R_{tv}}\left(R_{tv}{}^2-x^2-y^2\right)}\geq 0$ при $n_c=20$.

Зная уравнения кассеты и ТВЭЛов, мы можем постановку задачи (1) переписать в виде $\begin{cases}\Delta V_z=-C\\-div(\lambda\nabla T)=F\end{cases}$, с граничными условиями $V_z\big|_{\partial\Omega_b\cap\overline{\partial\Omega_{tv}}}=0$, $\frac{\partial T}{\partial n}+hT\big|_{\Omega_b}=0$, $T_1\big|_{\partial\Omega_{tv}}=T_2\big|_{\partial\Omega_{tv}}$, $\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}\bigg|_{\partial\Omega_{tv}}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial n_2}\bigg|_{\partial\Omega_{tv}}$, где

$$\lambda=\lambda_1\frac{1-sign\omega_{tv}}{2}+\lambda_2\frac{1+sign\omega_{tv}}{2},\quad F=-V_z\frac{1-sign\omega_{tv}}{2}+q_V\frac{1+sign\omega_{tv}}{2}.$$

Для решения использовался метод R-функций в сочетании с вариационным методом Ритца. Структура решения задачи о ламинарном течении при продольном обтекании ТВЭЛов жидкости имеет вид $V_z = \omega p_1$, где $\omega(x, y) \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv}} \geq 0$ – уравнение границы поперечного сечения кассеты, а неопределенную компоненту $p_1 = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \varphi_{ik}(x, y)$ будем отыскивать, минимизируя функционал $I = \int_{\Omega} \left((\nabla V_z)^2 - 2CV_z \right) d\Omega$. Заметим, что решение V_z получаем в аналитическом виде и используем без какой-либо дальнейшей обработки (аппроксимации, интерполяции). Поэтому полученное распределение скорости мы подставляем в правую часть уравнения теплопроводности. Структура решения задачи определения температурного поля использовалась как точно удовлетворяющая граничным условиям на $\partial\Omega_b$ $u = p_2 + \omega_b(-D_1 p_2 + hp_2)$, так и в виде $T = p_2$, где, как и ранее, $p_2 = \sum_{i=1}^{N} d_{ik} \varphi_{ik}(x, y)$. Здесь следует отметить, что граничные условия $\left. \frac{\partial T}{\partial n} + hT \right|_{\Omega_b} = 0$ и $\left. \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right|_{\partial\Omega_{tv}} = \left. \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \right|_{\partial\Omega_{tv}}$ являются естественными и следуют из функционала Ритца $I = \int_{\Omega} \left(\lambda (\nabla T)^2 - 2FT \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_b} hT^2 d\partial\Omega_b$. В качестве аппроксимационных средств $\varphi_{ik}(x, y)$ использовались кубические сплайны Шенберга при $N = 6400,\ 10000$. Вычислительные эксперименты проводились в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов ИПМаш НАН Украины.

Ниже (рис. 2-5) приведены результаты исследований для различных упаковок ТВЭЛов. Каждая упаковка содержит 91 стержень при всех прочих равных условиях $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 10,\ h = 1,\ q_V = 4$. Меняя значения буквенных параметров, получим различные распределения исследуемых полей.

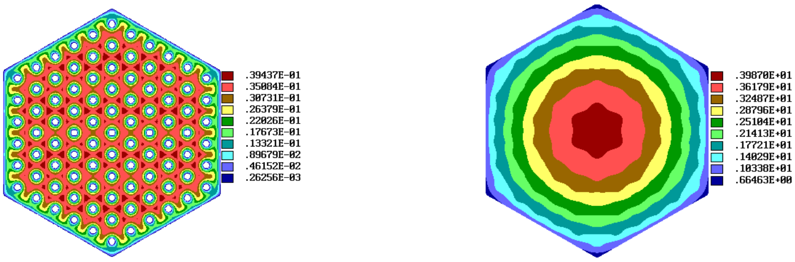


Рис. 2. Картины распределения скорости и температуры в шестигранной кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

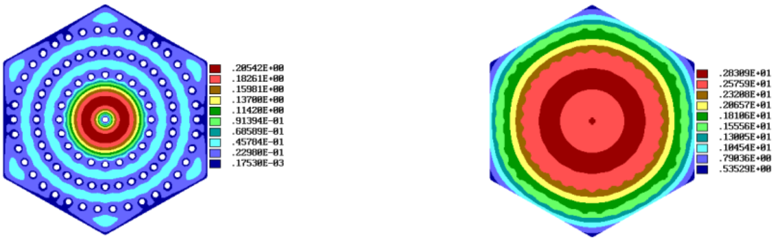


Рис. 3. Картины распределения скорости и температуры в кассете с циклически расположенными ТВЭЛами и центральным ТВЭЛом

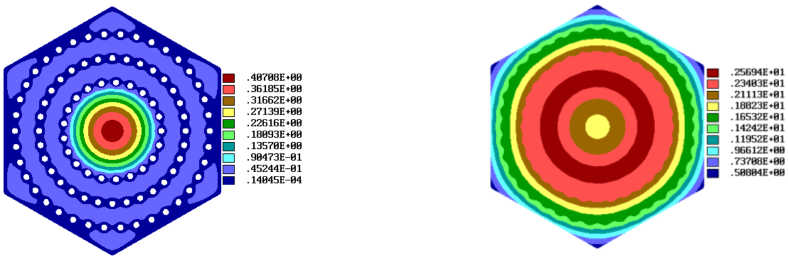


Рис. 4. Картины распределения скорости и температуры в шестигранной кассете с циклически расположенными ТВЭЛами без центрального ТВЭЛа

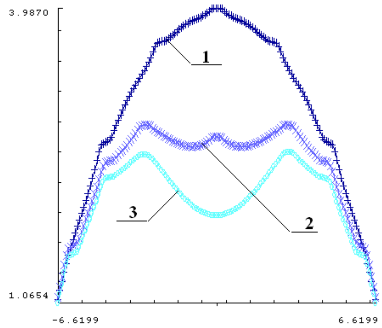


Рис. 5. Графики поля температур для различных упаковок ТВЭЛов в сечении $y = 0$: 1 – шахматная схема; 2 – циклическая симметрия с центральным ТВЭЛом; 3 – циклическая симметрия без центрального ТВЭЛа

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что наличие стержней в центральной зоне приводит к более высокой температуре. Поэтому, меняя конструктивный характер упаковки и типы симметрии, можно регулировать характер течения и распределение температуры по кассете, добиваясь необходимого значения, обусловленного техническим заданием. Анализ характера распределения скорости и температуры позволяет сделать вывод, что рассмотрение поля скоростей для ячейки (рис. 1), в случае ее достаточной удаленности от границы, является целесообразным. Однако поле температур при этом будет весьма далеким от действительности, чему свидетельствуют результаты, полученные для кассеты в целом.

Различные компании используют различные формы кассет: шестигранные, круглые, квадратные, прямоугольные. Метод R-функций позволяет оперативно изменять информацию о форме рассматриваемой области. На рисунках 6-9 приведены результаты исследования для различных упаковок ТВЭЛов и форм кассеты.

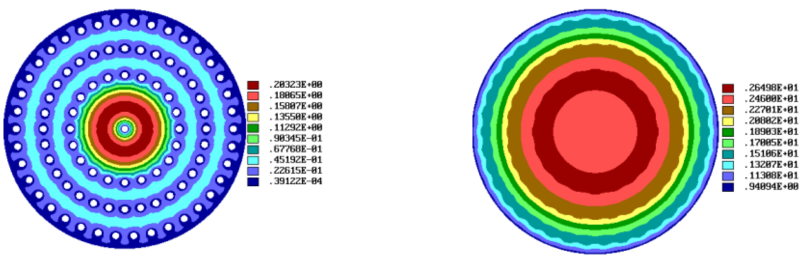


Рис. 6. Картины распределения скорости и температуры в круглой кассете с циклически расположенными ТВЭЛами и центральным ТВЭЛом

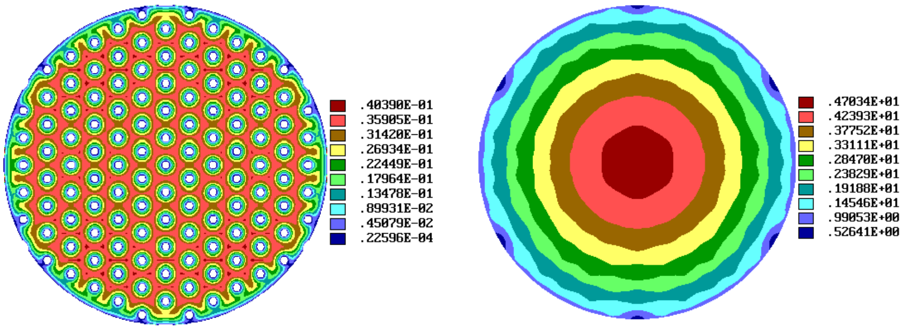


Рис. 7. Картины распределения скорости и температуры в круглой кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

При коридорной упаковке ТВЭЛов в квадратной кассете для построения уравнения квадратного кожуха воспользуемся *теоремой 2*. Рассмотрим уравнение прямой $\sigma \equiv R_v - x \geq 0$ и периодическую функцию $\mu_v = \frac{4}{3\pi}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin[(2k-1)2\theta]}{(2k-1)^2}$. В результате получим $\omega_b \equiv R_v - r\cos\mu_v = 0$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$. Заметим, что процесс построения аналогичен построению шестигранного кожуха, а изменяется лишь значение n.

Для построения коридорной упаковки ТВЭЛов воспользуемся *теоремой 1*. Зададим

$$f_1 = R^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

где

$$\mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}, \quad \mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2}\sum_k (-1)^{k+1}\frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_y}\right]}{(2k-1)^2},$$

при $h_x = h_y$.

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид $\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv}} \geq 0, \omega_{tv} \equiv f_1 \geq 0$.

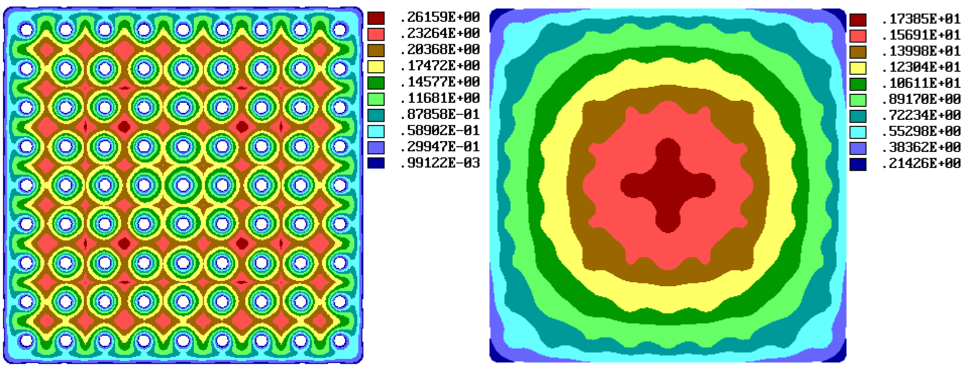
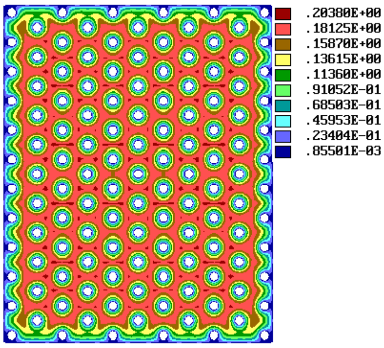


Рис. 8. Картины распределения скорости и температуры в квадратной кассете с ТВЭЛами, расположенными по коридорной схеме



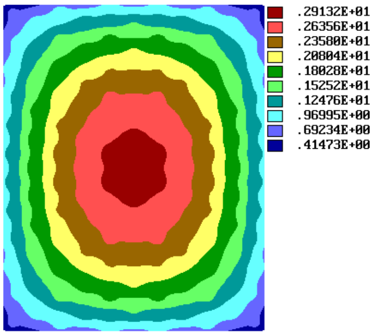


Рис. 9. Картины распределения скорости и температуры в прямоугольной кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

ВЫВОДЫ

Показано, что метод R-функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы. Разработанные конструктивные средства построения уравнений границ областей с трансляционным и циклическим типами симметрии позволили существенно уменьшить количество операций с последующей автоматизацией этого процесса, а, следовательно, уменьшить и время решения задач. Проведенные исследования позволяют конструкторам выбирать те или иные виды упаковок в зависимости от технических требований. При этом существенным является расчет температурного поля для кассеты в целом. Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Кроме того, работа с математической моделью процесса и вычислительный эксперимент дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать свойства и поведение процесса в различных ситуациях. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на современные численные методы, подробно и глубоко их изучать. Достоверность аналитической идентификации геометрических объектов подтверждена их визуализацией. Достоверность методов расчета, результатов и выводов подтверждена сравнением со сведениями, известными в литературе, анализом численной сходимости решений и вычислением невязки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слесаренко А. П. Регионально-аналитический и вариационные методы в решении сопряженных задач конвективного теплообмена / А.П. Слесаренко, Д.А. Котульский // Тепломассообмен ММФ-2000, Труды IV Минского международного форума (Беларусь, Минск, май 2000). – Минск : ИТМО АН Беларуси, 2000. – Т. 3. С. 135-142.

2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах / Б.С. Петухов. – М. : Энергия, 1967. – 412 с.

3. Петухов Б. С. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалев. – М. : Атомиздат, 1974. – 367 с.

4. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко. – Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

REFERENCES

1. Slesarenko, A.P. and Kotulskiy, D.A. (2000), "Regionalno-analiticheskiy i variatsionnyye metody v reshenii sopryazhennyh zadach konvektivnogo teploobmena", *Trudy IV Minskogo mezhdunarodnogo foruma*, vol. .3, pp. 135-142.
2. Petukhov, B.S. (1967), "Teploobmen i soprotivleniye pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh", Energiya, Moskow.
3. Petukhov, B.S., Genin, L.G. and Kovalev, S.A. (1974), "Teploobmen v yadernykh energeticheskikh ustanovkakh", Atomizdat, Moskow.
4. Rvachev, V.L. (1982), "Teoriya R-funktsiy i nekotoryye yeye prilozheniya", Nauk. dumka, Kiev.
5. Maksimenko-Sheyko, K.V. (2009), "R-funktsii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh obyektov i fizicheskikh poley", IPMash NAN Ukrainy, Kharkov.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОКЛИНОВОГО КОМПОЗИТУ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Махоркін М. І., к. ф.-м. н.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна

mahorkin@ukr.net

Запропоновано методику з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинових композитів за допомогою постановки узагальненої задачі спряження. Отримано аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються у явному вигляді з відповідних крайових умов. Отримані вирази апробовано при визначенні напруженого стану навантаженої зосередженими силами триклинової системи.
Ключові слова: багатоклиновий композит, порядок сингулярності, асимптотики напружень, плоска задача теорії пружності.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОКЛИНЬЕВОГО КОМПОЗИТА ПРИ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Махоркин Н. И., к. ф.-м. н.

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова 3-б, 79060, Львов, Украина

mahorkin@ukr.net

Предложена методика определения напряженно-деформированного состояния составных клиньев с помощью постановки обобщенной задачи сопряжения. Получены аналитические выражения для напряжений и перемещений в многоклиньевой системе как функции только четырех неизвестных, которые определяются в явном виде из соответствующих краевых условий. Полученные выражения апробированы при определении напряженного состояния нагруженной сосредоточенными силами триклиньевой системы.
Ключевые слова: многоклиньевой композит, порядок сингулярности, асимптотики напряжений, плоская задача теории упругости.

DETERMINATION OF STRESSED-STRAINED STATE OF MULTI-WEDGE COMPOSITE UNDER CONDITIONS OF THE PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY

Makhorkin M. I., Ph.D. in Physics and Maths

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU, 3b Naukova str, 79060 Lviv, Ukraine

mahorkin@ukr.net

The procedure is offered, giving the possibility to clarify the stressed-strained state of composite system is offered. The system consists of an arbitrary number n of connected wedges S_i with apex angler α_i and it contains numerous defects on the lines of their connection.

The basis of the procedure makes up the method of generalized conjugation problem, method of jump function and apparatus of generalized functions. So the system is considered as whole entity, its physical-mechanical characteristics and parameters of the stressed-strained state are presented in the form of generalized functions $p(\varphi) = p_1 + \sum_{i=1}^{n}(p_{i+1} - p_i)S_+(\varphi - \varphi_i)$ ($\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_i$; $p_i = \{u_i, v_i, \nu_i, \mu_i\}$ – displacements and elastic constants in the i -th wedge; $S_\pm(x)$ – Heviside unit function) and the radially located defects ones are modeled by the jumps of stresses and displacements. By such approach of determination the stressed-strained state in a multi-wedge composite me reduced to finding the solution of the boundary-value problem for a system of two partly degenerated differential equations. The solution of this system is found by the method of Mellin integral transform in the transforms. The preference of this procedure is that the transforms of stresses and displacements for an arbitrary number of components of a wedge system are written in terms of four functions which are determined from the boundary conditions.

By means of the procedure offered the expressions of transforms of stresses and strains in the three-wedge system loaded on the edges by concentred forces are constructed. Using them the order of singularity of stresses and distribution of asymptotics of normal stresses $\sigma_{\varphi\varphi}$ in the vicinity of the system vertex are calculated for different values of its geometric and mechanical parameters.

Key words: multi-wedge composite, singularity order, stresses assymptotics, plane problem of elasticity.

ВСТУП

У царині механіки руйнування важливе місце займає вивчення напружено-деформованого стану в багатоклинових композитах [1-6]. Такі композити широко використовують у мікроелектроніці та при моделюванні міжфазних включень у композитних матеріалах і з’єднань зерен у полікристалічних структурах. Наразі вивчення напружено-деформованого стану таких систем переважно зводиться до з’ясування порядку сингулярності в околі точки сходження клинів [1, 3]. Дослідження ж розподілу поля напружень обмежуються околом вершини тріщини, що виходить на прямолінійну межу поділу двох середовищ [2, 6]. Це зумовлено використанням для розв’язування поставленої задачі класичного методу спряження, методу комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі чи методу власних функцій [1, 2, 4], що призводило до громіздких виразів та унеможливлювало запис прозорого аналітичного виразу для напружень та деформацій у багатоклиновій системі як єдиного цілого.

У роботі адаптовано метод узагальненої задачі спряження [7-9] для кусково-однорідних структур, у яких пружні сталі змінюються залежно від полярної координати φ (багатоклинових систем) за умов плоскої задачі теорії пружності. Запропонована методика дала змогу записати єдині аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі з довільною кількістю елементів, як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються у явному вигляді з крайових умов.

ПОСТАНОВКА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ

Розглянемо напружено-деформований стан багатоклинового композиту (рис. 1), що складається з кутового вирізу з розхилом кута $\alpha_{n+1} \ge 0$ та довільної кількості «n» різнорідних ізотропних клинів $S_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ з кутами розхилу α_i $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n+1} = 2\pi)$. На поверхнях зчеплення клинів $\varphi = \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_i$ розташовані тонкі стрічкові включення $r \in [a_i, b_i]$. Береги вирізу перебувають під дією навантаження, що реалізує в системі умови плоскої задачі теорії пружності $u = u(r,\varphi)$, $v = v(r,\varphi)$, $w = 0$.

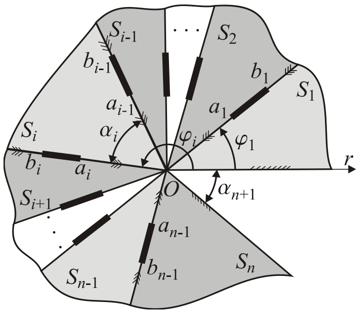


Рис. 1. Загальна схема багатоклинової системи

Розглядаємо систему як єдину область $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup ... \bigcup S_n$, складену із підобластей S_i з поверхнями поділу $\varphi = \varphi_i$. У межах кожної із областей S_i виконуються рівняння рівноваги [10], а на лініях зчеплення $\varphi = \varphi_i$ виконуються умови спряження

$$\begin{gathered}\left(\sigma_{\varphi\varphi}^{[i+1]} - \sigma_{\varphi\varphi}^{[i]}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_i} = f_{\sigma i}(r) N_i(r), \ \left(\sigma_{r\varphi}^{[i+1]} - \sigma_{r\varphi}^{[i]}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_i} = f_{\tau i}(r) N_i(r), \\ \left(u_{i+1} - u_i\right)\Big|_{\varphi=\varphi_i} = f_{ui}(r) N_i(r), \ \left(v_{i+1} - v_i\right)\Big|_{\varphi=\varphi_i} = f_{vi}(r) N_i(r),\end{gathered} \tag{1}$$

де $f_{\sigma i}(r)$, $f_{\tau i}(r)$ та $f_{ui}(r)$, $f_{vi}(r)$ відповідно функції стрибка напружень та переміщень (за їх допомогою моделюється [10] наявність радіальних дефектів на лініях з'єднання клинів); $S_{\pm}(x) = \{1\,(x>0);\ 0{,}5 \mp 0{,}5\ (x=0);\ 0\,(x<0)\}$ – асиметрична одинична функція Гевісайда [8]; $N_i(r) = \left[S_-(r-a_i) - S_+(r-b_i)\right]$ – функція проміжку; $i = \overline{1, n-1}$.

Згідно з методом постановки узагальненої задачі спряження [7] функції переміщень $u_i(r,\varphi)$, $v_i(r,\varphi)$ та сталі в областях S_i коефіцієнти μ_i, λ_i продовжимо на всю область S у вигляді [7, 8]:

$$f = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[f_{i+1} - f_i\right] S_+(\varphi - \varphi_i), \ f \sim \{u(r,\varphi), v(r,\varphi), \lambda(\varphi), \mu(\varphi)\}. \tag{2}$$

Якщо використати зв'язок між узагальненими та класичними похідними [8], то замість системи $2n$ рівнянь рівноваги з умовами спряження (1) прийдемо до системи двох частково вироджених диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами

$$\begin{gathered}\partial_\varphi\left[\partial_r v + r^{-1}\left(v - \partial_\varphi u\right)\right] - r(\lambda + 2\mu)\mu^{-1}\partial_r\left[\partial_r u + r^{-1}\left(u + \partial_\varphi v\right)\right] = -r^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} C_{u1}^i \delta_+'(\varphi - \varphi_i) - \\ -\left\langle r^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} C_{u2}^i - \sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left[1 - (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})\mu_{i+1}^{-1}\right]\partial_r C_{v1}^i + \left[1 + (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})\mu_{i+1}^{-1}\right] r^{-1} C_{v1}^i\right\}\right\rangle \delta_+(\varphi - \varphi_i), \\ \partial_\varphi\left[\partial_r u + r^{-1}\left(u + \partial_\varphi v\right)\right] + r\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}\partial_r\left[\partial_r v + r^{-1}\left(v - \partial_\varphi u\right)\right] = r^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} C_{v1}^i \delta_+'(\varphi - \varphi_i) + \\ +\left\langle r^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} C_{v2}^i + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1 + \mu_{i+1}(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1}\right)\partial_r C_{u1}^i - \mu_{i+1}(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1} r^{-1} C_{u1}^i\right]\right\rangle \delta_+(\varphi - \varphi_i),\end{gathered} \tag{3}$$

де $C_{u1}^{i}=f_{ui}(r)N_i(r)$, $C_{v1}^{i}=f_{vi}(r)N_i(r)$, $\partial_l^k=\dfrac{\partial^k}{\partial l^k}$, $l=\{r,\varphi\}$, $k=\{1,2\}$,

$$C_{u2}^{i}=r\mu_{i+1}^{-1}f_{\tau i}(r)N_i(r)-r\mu_{i+1}^{-1}\Big[(\mu_{i+1}-\mu_i)\Big(\partial_r v\big|_{\varphi_i-0}-vr^{-1}\big|_{\varphi_i-0}\Big)+$$
$$+\mu_{i+1}\Big(\partial_r\big[f_{vi}(r)N_i(r)\big]-r^{-1}f_{vi}(r)N_i(r)\Big)+r^{-1}(\mu_{i+1}-\mu_i)\partial_\varphi u\big|_{\varphi_i-0}\Big],$$
$$C_{v2}^{i}=r(\lambda_{i+1}+2\mu_{i+1})^{-1}\Big\{f_{\sigma i}(r)N_i(r)-\Big[(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\Big(\partial_r u\big|_{\varphi_i-0}+r^{-1}u\big|_{\varphi_i-0}\Big)+$$
$$+2r^{-1}(\mu_{i+1}-\mu_i)u\big|_{\varphi_i-0}+\lambda_{i+1}\Big(\partial_r\big[f_{ui}(r)N_i(r)\big]+r^{-1}f_{ui}(r)N_i(r)\Big)+$$
$$+r^{-1}\big[(\lambda_{i+1}-\lambda_i)+2(\mu_{i+1}-\mu_i)\big]\partial_\varphi v\big|_{\varphi_i-0}+2r^{-1}\mu_{i+1}f_{ui}(r)N_i(r)\Big]\Big\}.$$

Для однозначності задачі, система рівнянь (3) доповнюється відповідними крайовими умовами, що описують характер навантаження (першої, другої та мішаної крайової задачі).

Систему диференціальних рівнянь (3) разом із крайовими умовами назвемо узагальненою задачею спряження [7] щодо клинового композиту з тонкими радіальними дефектами при плоскій деформації. Зазначимо, що рівняння (3) записано для випадку плоскої деформації. Якщо в них формально замінити сталі Ляме λ, μ на λ^*, μ^* ($\mu^*=\mu$, $\lambda^*=2\lambda\mu(2\mu-\lambda)^{-1}$), то ці рівняння будуть описувати плоский напружений стан багатоклинової системи.

ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СФОРМУЛЬОВАНОЇ ЗАДАЧІ

Після застосування до (3) інтегрального перетворення Мелліна в просторі зображень отримано таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}\mu\tilde{u}''-(\lambda+2\mu)p^+p^-\tilde{u}-\big[\mu(3+p)+\lambda p^+\big]\tilde{v}'=-\sum_{i=1}^{n-1}\mu\tilde{C}_{u1}^{i}(p)\delta_+'(\varphi-\varphi_i)+\\+\sum_{i=1}^{n-1}\big\{p^+(\lambda+2\mu)-p^-\mu\big\}\tilde{C}_{v1}^{i}(p)\delta_+(\varphi-\varphi_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\mu\tilde{C}_{u2}^{i}(p)\delta_+(\varphi-\varphi_i),\\(\lambda+2\mu)\tilde{v}''-\mu p^+p^-\tilde{v}+\big[\lambda p^-+\mu(3-p)\big]\tilde{u}'=-\sum_{i=1}^{n-1}\big[(\lambda+3\mu)p+\mu\big]\tilde{C}_{u1}^{i}(p)\delta_+(\varphi-\varphi_i)+\\+(\lambda+2\mu)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{C}_{v1}^{i}(p)\delta_+'(\varphi-\varphi_i)+\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{C}_{v2}^{i}(p)\delta_+(\varphi-\varphi_i)\right],\end{gathered}\tag{4}$$

де

$$\tilde{C}_{v2}^{i}(p)=(\lambda_{i+1}+2\mu_{i+1})^{-1}\Big\{\tilde{f}_{\sigma i}(p+1)-(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(1-p)\tilde{u}\big|_{\varphi_i-0}-2(\mu_{i+1}-\mu_i)\tilde{u}\big|_{\varphi_i-0}-$$
$$-\lambda_{i+1}(1-p)\tilde{f}_{ui}(p)-2\mu_{i+1}\tilde{f}_{ui}(p)\big[(\lambda_{i+1}-\lambda_i)+2(\mu_{i+1}-\mu_i)\big]\tilde{v}'\big|_{\varphi_i-0}\Big\},$$
$$\tilde{C}_{u2}^{i}(p)\mu_{i+1}^{-1}\Big[\tilde{f}_{\tau i}(p+1)+(\mu_{i+1}-\mu_i)(1+p)\tilde{v}\big|_{\varphi_i-0}+\mu_{i+1}(1+p)\tilde{f}_{vi}(p)-(\mu_{i+1}-\mu_i)\tilde{u}'\big|_{\varphi_i-0}\Big],$$
$$\tilde{C}_{u1}^{i}(p)=\tilde{f}_{ui}(p),\ \tilde{C}_{v1}^{i}(p)=\tilde{f}_{vi}(p),\quad p^{\pm}=1\pm p.$$

Тут $\tilde{b}=\tilde{b}(p,\varphi)=\int_0^\infty b(r,\varphi)r^{p-1}dr$ – перетворення Мелліна відповідних функцій $b\sim\{u,v,f\}$ [11]; $\tilde{b}'=\partial_\varphi\tilde{b}(p,\varphi)$ – узагальнена похідна по змінній φ від відповідної функції [8].

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (4) шукаємо у такому вигляді:

$$\tilde{u}(p,\varphi)=\tilde{u}_1+\sum_{i=2}^{n-1}\tilde{u}_i S_+(\varphi-\varphi_{i-1}),\;\; \tilde{v}(p,\varphi)=\tilde{v}_1+\sum_{i=2}^{n-1}\left[\tilde{v}_i-\tilde{R}_{i-1}\right]S_+(\varphi-\varphi_{i-1}), \tag{5}$$

де $\tilde{u}_i=\tilde{A}_i\cos\beta+\tilde{B}_i\sin\beta+\tilde{C}_i\cos\alpha+\tilde{D}_i\sin\alpha$, $\tilde{v}_i=\tilde{v}_i^*\left(\tilde{B}_i\cos\beta-\tilde{A}_i\sin\beta\right)-\tilde{C}_i\sin\alpha+\tilde{D}_i\cos\alpha$, $\tilde{v}_i^*=\left[\lambda_i p^-+\mu_i(3-p)\right]\left[\lambda_i p^++\mu_i(3+p)\right]^{-1}$, $\tilde{A}_i=A_i(p)$, $\tilde{B}_i=B_i(p)$, $\tilde{C}_i=C_i(p)$, $\tilde{D}_i=D_i(p)$, $\alpha=\varphi p^-$, $\beta=\varphi p^+$, $\tilde{R}_i=\tilde{R}_i(p,\varphi)=\left(\tilde{v}_{i+1}^*-\tilde{v}_i^*\right)\left[\left(\tilde{A}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{A}_k\right)\sin\beta-\left(\tilde{B}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{B}_k\right)\cos\beta\right]$.

Підставивши подання (5), у рівняння (4) та скориставшись означенням загального розв'язку системи диференціальних рівнянь, одержимо систему $4(n-1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих функцій $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$, $\tilde{D}_i$ ($i=\overline{1,n}$). Внаслідок розв'язування отриманої системи з'ясовано, що всі значення $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$, $\tilde{D}_i$ $i=\overline{2,n}$, не залежно від кількості елементів системи, рекурентно виражаються через чотири невідомі функції $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{D}_1$ так:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{i+1}&=\left(p^--p^+\tilde{v}_{i+1}^*\right)^{-1}\left(p^-R_{1i}+R_{4i}\right)\cos\beta_i+\left(p^+-p^-\tilde{v}_{i+1}^*\right)^{-1}\left(p^-R_{i1}-R_{3i}\right)\sin\beta_i,\\
\tilde{B}_{i+1}&=\left(p^-\tilde{v}_{i+1}^*-p^+\right)^{-1}\left(p^-R_{2i}-R_{3i}\right)\cos\beta_i-\left(p^+\tilde{v}_{i+1}^*-p^-\right)^{-1}\left(p^-R_{1i}+R_{4i}\right)\sin\beta_i,\\
\tilde{C}_{i+1}&=\left(v_{i+1}^*-p^-\right)^{-1}\left(R_{4i}+p^+\tilde{v}_{i+1}^*R_{1i}\right)\cos\alpha_i-\left(p^+-p^-\tilde{v}_{i+1}^*\right)^{-1}\left(p^+R_{2i}-R_{3i}\tilde{v}_{i+1}^*\right)\sin\alpha_i,\\
\tilde{D}_{i+1}&=\left(p^+-p^-\tilde{v}_{i+1}^*\right)^{-1}\left(p^+R_{2i}-R_{3i}\tilde{v}_{i+1}^*\right)\cos\alpha_i+\left(p^+\tilde{v}_{i+1}^*-p^-\right)^{-1}\left(R_{4i}+p^+R_{1i}\tilde{v}_{i+1}^*\right)\sin\alpha_i.
\end{aligned} \tag{6}$$

де $L_i=\left(\tilde{v}_{i+1}^*-\tilde{v}_i^*\right)\left[\left(\tilde{A}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{A}_k\right)\sin\beta_i-\left(\tilde{B}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{B}_k\right)\cos\beta_i\right]$, $R_{1i}=\tilde{C}_{u1}^i$, $R_{2i}=\tilde{C}_{v1}^i+L_i$, $R_{3i}=\tilde{C}_{u2}^i$, $M_i=p^+\left(\tilde{v}_{i+1}^*-\tilde{v}_i^*\right)\left[\left(\tilde{A}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{A}_k\right)\cos\beta_i+\left(\tilde{B}_1+\sum_{k=2}^{i}\tilde{B}_k\right)\sin\beta_i\right]$, $\alpha_i=\varphi_i p^-$, $\beta_i=\varphi_i p^+$, $R_{4i}=\tilde{C}_{v2}^i+M_i$.

Для визначення невідомих $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{D}_1$ використовують крайові умови, які в просторі зображень за Мелліном мають такий вигляд:

1) за умов першої крайової задачі теорії пружності (на берегах вирізу задані напруження) –

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}\big|_{\varphi=0}=\tilde{\sigma}_0(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{r\varphi}\big|_{\varphi=0}=\tilde{\tau}_0(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{\sigma}_{n+1}(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{r\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{\tau}_{n+1}(p+1); \tag{7}$$

2) за умов другої крайової задачі (на берегах кутового вирізу задані переміщення) –

$$\tilde{u}\big|_{\varphi=0}=\tilde{u}_0(p),\; \tilde{u}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{u}_{n+1}(p),\; \tilde{v}\big|_{\varphi=0}=v_0(p),\; \tilde{v}\big|_{\varphi=\varphi_n}=v_{n+1}(p); \tag{8}$$

3) у випадку змішаної задачі теорії пружності можливі декілька комбінацій крайових умов на берегах вирізу сформовані з величин

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}\big|_{\varphi=0}=\tilde{\sigma}_0(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{\sigma}_{n+1}(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{r\varphi}\big|_{\varphi=0}=\tilde{\tau}_0(p+1),\;\; \tilde{\sigma}_{r\varphi}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{\tau}_{n+1}(p+1),\\
&\tilde{u}\big|_{\varphi=0}=\tilde{u}_0(p),\; \tilde{u}\big|_{\varphi=\varphi_n}=\tilde{u}_{n+1}(p),\; \tilde{v}\big|_{\varphi=0}=v_0(p),\; \tilde{v}\big|_{\varphi=\varphi_n}=v_{n+1}(p).
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут зображення напружень відповідно до закону Гука мають вигляд:

$$\tilde{\sigma}_{rr} = M\left[r\sigma_{rr}\right] = \lambda\left(\left\{\partial_\varphi \tilde{v}\right\} - \tilde{v}\right) - \left(\lambda + 2\mu\right) p\tilde{u},$$
$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = M\left[r\sigma_{\varphi\varphi}\right] = \lambda\left[\left(1-p\right)\tilde{u} + \left\{\partial_\varphi \tilde{v}\right\}\right] + 2\mu\left(\left\{\partial_\varphi \tilde{v}\right\} - p\tilde{u}\right), \tag{10}$$
$$\tilde{\sigma}_{zz} = M\left[r\sigma_{zz}\right] = \lambda\left[\left(1-p\right)\tilde{u} + \left\{\partial_\varphi \tilde{v}\right\}\right], \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} = M\left[r\sigma_{r\varphi}\right] = \mu\left[\left\{\partial_\varphi \tilde{u}\right\} - \left(p+1\right)\tilde{v}\right],$$

де $\left\{\partial_\varphi \tilde{u}\right\}$, $\left\{\partial_\varphi \tilde{v}\right\}$ – похідні узагальнених функцій (5) у класичному сенсі [8].

Отже, у випадку кожної крайової задачі для з'ясування чотирьох функцій $A_1\left(p\right)$, $B_1\left(p\right)$, $C_1\left(p\right)$, $D_1\left(p\right)$ маємо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, записану на основі умов (7)-(9) і подання (5). Зазначимо, що з крайових умови, при $\varphi = 0$, зразу ж визначаються $C_1\left(p\right)$ через $A_1\left(p\right)$ і $D_1\left(p\right)$ через $B_1\left(p\right)$ у явному вигляді.

Переміщення і напруження в композиті визначаються за формулою оберненого перетворення Мелліна в такому вигляді:

$$\Phi\left(r,\varphi\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\Phi}\left(p,\varphi\right) r^{-p} dp, \tag{11}$$

де $\tilde{\Phi}\left(p,\varphi\right) = \left\{\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{r\varphi}, \tilde{u}, \tilde{v}\right\}$ – зображення Мелліна напружень та переміщень, записані відповідно до (5), (10).

Якщо функції стрибка невідомі, то для їх з'ясування слід використати умови взаємодії дефекту та оточуючого матеріалу [10]. Підставивши подання (11) у ці умови, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибка.

НАПРУЖЕНО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТРИКЛИНОВИХ СИСТЕМ

Розглянемо триклинову систему ($n = 3$), навантажену на берегах у точках з координатами $r = r_0$, $\varphi = 0, \varphi_3$ зосередженими силами $\vec{P} = \vec{T} + \vec{Q}$ за відсутності включень (рис. 2).

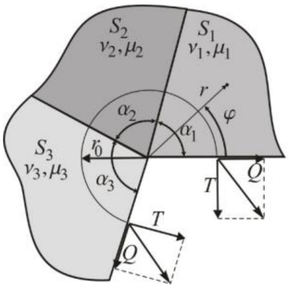


Рис. 2. Схема триклинової системи

Відтак функції стрибка напружень та переміщень в умовах спряження (1) дорівнюють нулю, а трансформанти крайових умов (7) мають такий вигляд:

$$\tilde{\sigma}_0\left(p+1\right) = \tilde{\sigma}_0 = Qr_0^p, \; \tilde{\sigma}_4\left(p+1\right) = \tilde{\sigma}_4 = Qr_0^p, \; \tilde{\tau}_0\left(p+1\right) = \tilde{\tau}_0 = Tr_0^p, \; \tilde{\tau}_4\left(p+1\right) = \tilde{\tau}_4 = Tr_0^p; \tag{12}$$

Підстановка в умови (12) подань зображень напружень (10), з урахування рекурентних співвідношень (6) та правил диференціювання узагальнених функцій, приводить до системи чотирьох рівнянь для визначення коефіцієнтів $\tilde{A}_1\left(p\right)$, $\tilde{B}_1\left(p\right)$, $\tilde{C}_1\left(p\right)$, $\tilde{D}_1\left(p\right)$. З умови при $\varphi = 0$ отримано, що $\tilde{C}_1 = \tilde{\tau}_0\left(2\mu_1 p\right)^{-1} - \tilde{A}_1 p^-\left(3-4\nu_1+p\right)^{-1}$, $\tilde{D}_1 = \tilde{\sigma}_0\left(2\mu_1 p\right)^{-1} + \tilde{B}_1 p^+\left(3-4\nu_1+p\right)^{-1}$

(ν_i – коефіцієнт Пуассона матеріалу відповідного клина), а з умови при $\varphi = \varphi_3$ систему двох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_0 g_\sigma + \tilde{\sigma}_0 f_\sigma + A_\sigma \tilde{A}_1 + B_\sigma \tilde{B}_1 = \tilde{\sigma}_4, \\ \tilde{\tau}_0 g_\tau + \tilde{\sigma}_0 f_\tau + A_\tau \tilde{A}_1 + B_\tau \tilde{B}_1 = \tilde{\tau}_4, \end{aligned} \qquad (13)$$

з якої, за методом Крамера, знайдено вигляд $\tilde{A}_1$ та $\tilde{B}_1$. Виразів для g_σ, g_τ, f_σ, f_τ, A_σ, A_τ, B_σ, B_τ не наводимо за обмеженістю місця. Відтак напружено деформований стан триклинової системи повністю визначено у вигляді (11) з урахуванням (5), (6) та (10).

Знаходження інтегралів (11) зазвичай ускладнене, тому для обчислення оригіналів використовують теорему про лишки. Відтак вирази для переміщень та напружень подано у вигляді:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\phi}(p,\varphi) r^{-p} dp = \sum_{k=0}^{n} r^{-p_k}\phi_k(\varphi), \quad \sigma(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\sigma}(p,\varphi) r^{-p} dp = \sum_{k=0}^{n} r^{-(p_k+1)}\sigma_k(\varphi), \quad (14)$$

де $\sigma_k(\varphi) = \mathrm{Res}\left(\tilde{\sigma}(p,\varphi), p_k\right)$, $\phi_k = \mathrm{Res}(\tilde{\phi}(p,\varphi), p_k)$, $\sigma = \left\{\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}\right\}$, $\phi = \{u, v\}$.

Полюсами підінтегральної функції є корені рівняння такого вигляду:

$$\Delta = B_\sigma A_\tau - A_\sigma B_\tau = 0. \qquad (15)$$

Зазначимо, що корінь характеристичного рівняння (15) $p = 0$ не є особливою точкою підінтегральної функції тому, під час застосування теореми про лишки, вибрано значення $s = 0$ і інтегрування зведено на уявну вісь. При цьому, якщо нас цікавить поле напружень в околі точки сходження клинів ($r < r_0$), слід вибирати полюси, що лежать ліворуч від прямої інтегрування ($\mathrm{Re}\, p_k < 0$) [11]. У протилежному разі вибираємо полюси, що лежать праворуч від прямої інтегрування ($\mathrm{Re}\, p_k > 0$).

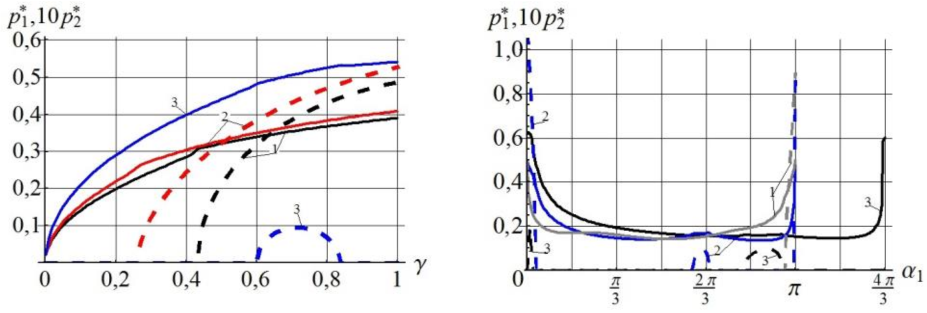
Під час досліджень обмежуються, як правило, вивченням асимптотичної поведінки напружень у малому околі точки сходження клинів. Оскільки сингулярність напружень визначається співвідношенням $\lambda = \mathrm{Re}\, p + 1$, для з’ясування цих асимптотик напруженого стану достатньо обчислити лишки у полюсах p_i, котрі забезпечують максимальну сингулярність поля напружень. Зважаючи на те, що в околі точки сходження клинів лишки обчислюємо в полюсах із від’ємною дійсною частиною ($\mathrm{Re}\, p < 0$), такими полюсами будуть корені рівняння (15) із дійсною частиною, що належить проміжку $(-1, 0)$.

Отримані результати у часткових випадках повністю збігаються із відомими в літературі дослідженнями інших авторів, зокрема з результатами [1, 2, 6, 11].

ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ АНАЛІЗ

За отриманими співвідношеннями здійснено числові дослідження максимального порядку сингулярності $\lambda^* = 1 - p^*$ ($p^* = p_1^* \pm i\, p_2^*$, $\mathrm{Re}\, p^* = \min\left\{-\mathrm{Re}\left(p_i\right) > 0\right\}$, p_i – корінь характеристичного рівняння (15)) та розподілу асимптотики нормальних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ в околі вершини системи.

Результати досліджень коренів характеристичного рівняння (15) для різних геометричних конфігурацій триклинової системи (рис. 2) подані на рис. 3 (суцільні лінії відповідають значенням дійсних частин, а штрихові – уявних). Оскільки дослідження показали, що зміна коефіцієнтів Пуассона клинів у діапазоні $0{,}2 < \nu_i < 0{,}35$ та відношення модулів зсуву крайніх клинів системи мало впливає на числові значення порядку сингулярності напружень, то обчислення здійснювалися для таких співвідношень механічних характеристик матеріалів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,25$, $\mu_3/\mu_1 = 10$.



а б

Рис. 3. Дійсна p_1^* та уявна p_2^* частини кореня характеристичного рівняння, що забезпечує максимальну сингулярність напружень в околі вершини системи

Поведінка коренів характеристичного рівняння залежно від відношення модулів зсуву $\gamma = \mu_2/\mu_1 \in (0,1)$ зображена на рис. 3 а. Лінії 1 відповідають кореням характеристичного рівняння, складеного для клинової системи з розхилом кутів $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$ (міжфазна тріщина, що виходить під прямим кутом на прямолінійну межу поділу матеріалів, ці результати збігаються з поданими в [1, 2]); лінії 2 і 3 – системам з розхилом кутів $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\pi/3$ (міжфазна тріщина, що виходить на ламану межу поділу матеріалів) та $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$ відповідно.

На рис. 3 б зображена залежність значення кореня характеристичного рівняння (15) від зміни кута розхилу клина S_1, зафіксованого відношення $\mu_2/\mu_1 = 0,1$ для таких випадків: міжфазна тріщина, що виходить на ламану межу поділу матеріалів ($\alpha_3 = \alpha_1$, $\alpha_2 = 2\pi - 2\alpha_1$) – лінії 1; тріщина, що виходить під кутом на прямолінійну межу поділу матеріалів ($\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \pi - \alpha_1$) – лінія 2; міжфазна тріщина, яка виходить із кутової точки межі поділу матеріалів, що зламана під кутом $\alpha = \alpha_2 = 2\pi/3$ ($\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = 4\pi/3 - \alpha_1$) – лінія 3.

Подані на рис. 3 результати досліджень свідчать, що: порядок сингулярності напружень у триклиновій системі буде тим менший, чим ближчими за значеннями будуть механічні характеристики клинів S_1 та S_2 або S_3 та S_2, при цьому його мінімальне значення залежить від конкретної геометричної конфігурації системи та наявності в ній вирізу; наявність комплексних коренів більшою мірою залежить від співвідношення механічних характеристик системи, а меншою від їх геометричних характеристик; при фіксованих механічних характеристиках системи для широкого діапазону значень розхилів кутів системи сингулярність напружень буде в межах $0,9 < \lambda < 0,7$ (рис. 3 б).

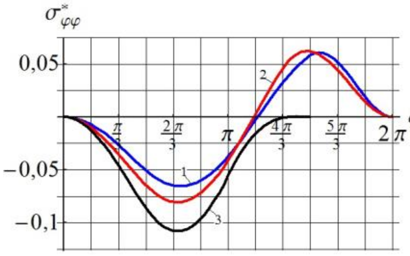
Поведінку асимптотики поля напружень у малому околі вістря системи визначає член ряду (14), котрий містить максимальне значення порядку сингулярності, тобто

$$\sigma(r) = r^{-(1+p^*)}\sigma^*(\varphi), \tag{16}$$

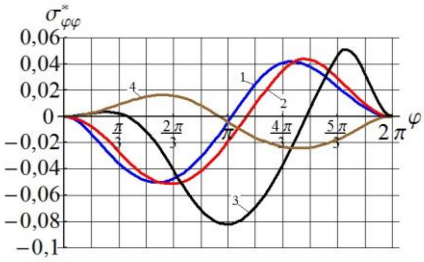
де p^* – корінь характеристичного рівняння (15) з максимальною від'ємною дійсною частиною; $\sigma^*(\varphi) = \mathrm{Res}\left(\tilde{\sigma}(p,\varphi), p^*\right)$ $\sigma(\varphi) = \left\{\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}\right\}$ – функція, котра описує розподіл поля напружень за полярним кутом φ.

Використовуючи знайдені з (13) значення $\tilde{A}_1(p)$, $\tilde{B}_1(p)$, $\tilde{C}_1(p)$, $\tilde{D}_1(p)$, на основі співвідношень (5), (10) записано вирази трансформант напружень у вигляді (2). Відтак, вираз, що описує поведінку асимптотик напружень в околі точки сходження клинів, записано у вигляді (16).

На рис. 4 подано вигляд розподілу асимптотики нормального напруження $\sigma^*_{\varphi\varphi}(\varphi)$ за полярним кутом φ поблизу вістря навантаженої на берегах ($\varphi = 0, \varphi_3$, $r_0 = 1$) одиничною силою $T = 1$, $Q = 0$ триклинової системи (рис. 2), за різних її геометричних конфігурацій. При обчисленнях приймали: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,25$, $\mu_3/\mu_1 = 10$, $\mu_2/\mu_1 = 0,1$.



а



б

Рис. 4. Розподіл асимптотики нормального напруження $\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi)$ за кутовою координатою

На рис. 4 а подано розподіли асимптотик напружень $\sigma^*_{\varphi\varphi}(\varphi)$ для таких систем: міжфазна тріщина, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів ($\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$) – крива 1; міжфазна тріщина, що виходить в точку сходження трьох клинів з кутами розхилу – $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\pi/3$ – крива 2; три клини з кутами розхилу $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$ – крива 3.

Розподіли асимптотик напружень $\sigma^*_{\varphi\varphi}(\varphi)$ для міжфазної тріщини, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів під кутом α ($\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \pi - \alpha$), зображено на рис. 4 б. Тут крива 1 відповідає значенню $\alpha = \pi/6$, крива 2 – $\alpha = \pi/3$, крива 3 – $\alpha = 2\pi/3$, крива 4 – $\alpha = 5\pi/6$.

З графіків, поданих на рис. 4 видно, що максимальними напруження будуть в клині S_2, причому, за наявності в системі міжфазної тріщини, максимальні за модулем напруження в клинах S_1 та S_2 будуть більшими в клині з більшим модулем зсуву. За наявності вирізу локальний екстремум у клині із найбільшим модулем зсуву значно зменшується. Максимальні напруження у клинах S_1 та S_2 діють на лініях спаю. У випадку міжфазної тріщини, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів, спостерігається така ж тенденція стосовно місця дії максимальних напружень у матеріалі клинів.

ВИСНОВКИ

Запропоновано методику з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинових композитів за допомогою постановки узагальненої задачі спряження. За її допомогою записано аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються в явному вигляді з відповідних крайових умов. Отримані вирази були апробовані в задачі про визначення напруженого стану навантаженої зосередженими силами триклинової системи (достовірність отриманих результатів підтвердилася їх збігом у часткових випадках з відомими [1, 2, 6, 11]).

Апробація засвідчила, що методика використання постановки узагальненої задачі спряження уможливлює ефективне проведення комплексного вивчення напруженого стану в околі вершин тріщин та гострокінцевих вирізів багатокомпонентних систем. У подальшому цю методику доцільно використовувати при прогнозуванні розвитку процесів руйнування в багатокомпонентних системах, що містять злами межі поділу матеріалів у випадку анізотропних матеріалів чи матеріалів функціонально градієнтних за полярним кутом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carpinteri A. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear problems / A. Carpinteri, M. Paggi // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – Vol. 74. – Pp. 59-74.
2. Carpinteri A. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // A. Carpinteri, M. Paggi / International Journal of Fracture. – 2006. – Vol. 135. – Pp. 267-283.
3. Shang L. Y. Evaluation of fracture mechanics parameters for free edges in multi-layered structures with weak singularities // L.Y. Shang, Z.L. Zhang, B. Skallerud / Int. J. Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46, №5. – Pp. 1134-1148.
4. Ghadiri M. Analysis of bonded anisotropic wedges with interface crack under anti-plane shear loading // M. Ghadiri, A.R. Shahani / Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 35, Iss. 5. – Pp. 637-654.
5. Linkov A. Plane elasticity problem for a multi-wedge system with a thin wedge / A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek // Int. J. Solids and Structures. – 2010. – 47, №24. – Pp. 3297-3304
6. Дудик М. В. Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред / М.В. Дудик, Ю.В. Дихтяренко, Г.А. Хазин // Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка. – 2013. – Т. 18, Вип. 3. – С. 59-68.
7. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
8. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
9. Makhorkin M. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation/ M. Makhorkin, H. Sulym // Civil and environmental engineering reports. – 5. – 2010. – Pp. 235-251.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : Монографія / Г.Т. Сулим. – Львів : ДВЦ НТШ, 2007. – 716 с.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М. : Наука, 1963. – 368 с.

REFERENCES

1. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2007), “Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear problems”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 74, pp. 59-74.
2. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2006), “On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials”, *International Journal of Fracture*, vol. 135, pp. 267-283.

3. Shang, L.Y., Zhang, Z.L. and Skallerud, B. (2009), "Evaluation of fracture mechanics parameters for free edges in multi-layered structures with weak singularities", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 46, no. 5, pp. 1134-1148.
4. Ghadiri, M. and Shahani, A.R. (2014), "Analysis of bonded anisotropic wedges with interface crack under anti-plane shear loading", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 35, iss. 5, pp. 637-654.
5. Linkov, A. and Rybarska-Rusinek, L. (2010), "Plane elasticity problem for a multi-wedge system with a thin wedge", *Int. J. Solids and Structures*, 47, no. 24, pp. 3297-3304.
6. Dudyk, M.V., Dikhtjarenko, Ju.V. and Hazin, G.A. (2013) "Tensely-deformed state at the tops of crack of the normal tearing away, going out an angular point border of division of environments", Visnyk Odeskogo nacionalnogo universitetu. Matematyka. Mekhanika, vol. 18, iss. 3, pp. 59-68.
7. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M. and Osadchuk, V.A. (2003), *Pruzhnyj ta pruzhno-plastychnyj granychnyj stan obolonok z defektamy* [There is the resilient and resiliently-plastic maximum state of shells slipshod], SPOLOM, Lviv, Ukraine.
8. Podstrigach, Ja.S., Lomakin, V.A. and Koljano, Ju.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoj struktury* [Thermoelasticity of bodies of heterogeneous structure], Nauka, Moskow.
9. Makhorkin, M. and Sulym, H. (2010), "On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation", *Civil and environmental engineering reports*, 5, pp. 235-251.
10. Sulym, G.T. (2007), *Osnovy matematychnoi teorii termopruzhnoi rivnovagy deformivnyh tverdykh til z tonkymy vkljuchennjamy: Monografija* [Bases of mathematical theory of термопружної equilibrium of the deformed solids with the thin including: Monograph], DVC NTSh, Lviv, Ukraine.
11. Ufliand, Ja.S. (1963), *Integralnye preobrazovanija v zadachah teorii uprugosti* [Integral transformations are to the tasks of theory of resiliency], Nauka, Moskow.

УДК 539.3

ЕЛЕКТРОПРОВІДНА ТРІЩИНА МІЖ РІЗНОРІДНИМИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ

Оноприєнко О. Д., магістр, Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна

djgrking@gmail.com

У роботі розглядається біматеріальне тіло з міжфазною тріщиною. Знаходяться основні характеристики його напружено-деформованого стану при різних властивостях матеріалів, а також залежно від зовнішнього навантаження. Як зовнішнє навантаження вибираються розтягуючі та зсувні напруження, а також електричне поле. Зокрема, розглядається міжфазна тріщина у випадку нескінченного п'єзоелектричного біматеріалу. Вважається, що тріщину заповнено електропровідною рідиною і враховується контакт берегів тріщини, а також електричне поле в зоні контакту.

Ключові слова: міжфазна тріщина, п'єзоелектрик, біматеріал, зона контакту, електричне поле.

ЭЛЕКТРОПРОВОДНАЯ ТРЕЩИНА МЕЖДУ РАЗНОРОДНЫМИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ МАТЕРИАЛАМИ С КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ

Оноприенко О. Д., магистр, Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина

djgrking@gmail.com

В работе рассматривается биматериальное тело с межфазной трещиной. Находятся основные характеристики его напряженно-деформированного состояния при различных свойствах материалов, а также в зависимости от внешней нагрузки. В качестве внешней нагрузки выбираются растягивающие и сдвиговые напряжения, а также электрическое поле. В частности, рассматривается межфазная трещина в случае бесконечного пьезоэлектрического биматериала. Считается, что трещину заполнено электропроводящей жидкостью и учитывается контакт берегов трещины, а также электрическое поле в зоне контакта.
Ключевые слова: межфазная трещина, пьезоэлектрик, биматериал, зона контакта, электрическое поле.

CONDUCTIVE CRACK BETWEEN DISSIMILAR PIEZOELECTRIC MATERIALS WITH CONTACT ZONES

Onopriienko O. D., Magister, Loboda V. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine

djgrking@gmail.com

This paper considers the bimaterial body with an interface crack. The main characteristics of its stress-strain state at various properties of materials depending on the external load were considered. As an external tensile load the tensile-shear stress and the electric field were chosen. In particular, the interface crack in an infinite piezoelectric bimaterial was observed. It is consider assumed that the crack is filled with an electrically conductive fluid and the contact of the crack faces is taken into account. If Since the crack is filled with a conductive fluid, the electric field in its open part is zero. At the same time in the closed part from which the liquid is displaced, the electric field is nonzero and can affect the electro-elastic state. Basic value obtained on the basis of all others can be formulated as a large number of mixed problems for piezoelectric bodies with cracks. The problem of a crack between two piezoelectric materials are critical is important to the practice because interface cracks are usually the main reason of composite materials failure. it generates Therefore this problem calls a considerable attention of researchers. In such problem in the "open" model in its top there is oscillating root feature that leads to physically unrealistic mutual penetration of materials. The numerical analysis results found dependence of the length of the contact shear stresses and the intensity of the electric field in the contact zone. The nature of crack opening. shows the change in normal stress zone of contact and continuing to crack.
Key words: interfacial crack, piezoelectric, biomaterial, contact zone, the electric field.

ВСТУП

Проблема тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами є виключно важливою для практики, тому завжди була в центрі уваги дослідників. При розгляді такої проблеми в рамках «відкритої» моделі в її вершинах виникає осцилююча коренева особливість, що призводить до фізично нереального взаємного проникнення матеріалів. У роботі [1] для тріщини між двома ізотропними матеріалами була запропонована контактна модель, яка усунула цей недолік. Для тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами вказана модель була застосована в роботах [2, 3], відповідно для моделей електрично проникної та електрично ізольованої тріщин. Але часто виникають ситуації, коли береги тріщини в п'єзоелектричному матеріалі є електродованими або ж тріщина заповнена деякою провідною рідиною. Дослідженню контактної моделі для такого випадку якраз і присвячена ця робота.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається тріщина $x_1 \in [c,b]$, $x_3 = 0$ в області розділу матеріалів у нескінченній п'єзоелектричній біматеріальній матриці. Вважається, що тріщина заповнена деякою електропровідною рідиною, наприклад, водою. Відомо, що в тріщині між двома матеріалами (міжфазній тріщині) біля її вершин завжди виникають зони контакту берегів. При цьому або обидві зони дуже малі (порядку 10^{-10} розміру тріщини), або одна з них може бути макрозоною і досягати третини довжини тріщини, а довжина другої зони при цьому стає ще меншою, ніж у першому випадку. Отже, завжди при конкретній зовнішній дії без втрати загальності можна враховувати лише одну зону контакту. Якщо тріщину заповнено електропровідною рідиною, то електричне поле в її відкритій частині дорівнює нулю. В той же час у закритій частині, з якої рідина витісняється, електричне поле відмінне від нуля та може впливати на характеристики електропружного стану.

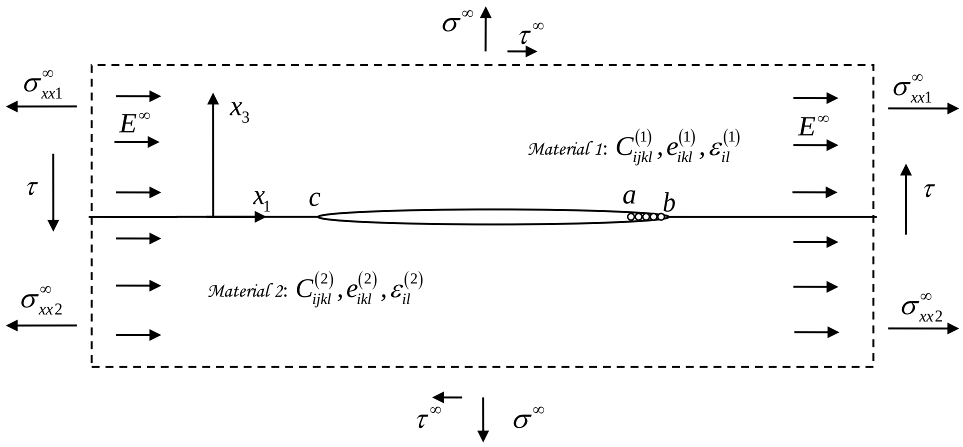


Рис. 1. Електропровідна тріщина з зоною контакту

Умови навантаження на нескінченності $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma^{\infty}$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau^{\infty}$, $\sigma_{11}^{(m)} = \sigma_{xxm}^{\infty}$. Тут і в подальшому $m=1$ позначає верхню область, а $m=2$ – нижню. Припускається, що умова неперервності для деформації ε_{xx} задовольняються по межі поділу матеріалів за рахунок $\sigma_{11}^{(m)} = \sigma_{xxm}^{\infty}$. Оскільки навантаження не залежить від координати x_2, то має місце задача плоскої деформації в площині (x_1, x_3), що зображена на рис. 1. Припускається, що поверхня тріщини вільна від навантаження на $x_1 \in [c,a] = L_1$, у той же час маємо зону контакту $x_1 \in (a,b) = L_2$, і положення точки *a* поки що обирається довільно. У роботі [4] показано, що справедливі співвідношення:

$$\langle \mathbf{L}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^{+}(x_1) - \mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{1}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\,\mathbf{W}^{+}(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{2}$$

де $\mathbf{L} = [u_1', u_2', u_3', D_3]^T$, $\mathbf{P} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1]^T$, $\mathbf{W}(z)$ є чотирьохкомпонентною вектор-функцією, аналітичною у всій площині за виключенням тріщини, $\mathbf{W}^{+}(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i \cdot 0)$, $\mathbf{W}^{-}(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i \cdot 0)$. Тут і далі позначення $\langle g(x_1) \rangle$ для функції $g(z)$ означає стрибок цієї функції через межу поділу матеріалів. Крім того, матриця **S** має таку структуру (без другого рядка і стовпця)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

де всі s_{ij} дійсні та справедливі рівності $s_{31}=-s_{13}$, $s_{41}=s_{14}$, $s_{43}=-s_{34}$. Крайові умови на лінії розділу матеріалів можна записати у вигляді:

$$x_1 \in L: \quad \mathbf{P}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{P}^{(2)}(x_1,0), \quad \mathbf{L}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{L}^{(2)}(x_1,0), \tag{4}$$

$$x_1 \in L_1: \quad \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0)=0, \quad \sigma_{33}^{\pm}(x_1,0)=0, \quad E_1^{\pm}(x_1,0)=0, \tag{5}$$

$$x_1 \in L_2: \quad \langle u_3(x_1,0)\rangle=0, \quad \sigma_{13}^{\pm}(x_1,0)=0, \ \langle \sigma_{33}(x_1)\rangle=0, \quad E_1^{\pm}(x_1,0)=E^{*}. \tag{6}$$

Треба відзначити, що в більшості випадків $E^{*}=E^{\infty}$, однак для загальності будемо розглядати E^{*} як незалежну величину, що виникає за наявності додаткових електричних полів у зоні контакту.

ОТРИМАННЯ БАЗОВИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ТА РОЗГЛЯД «ВІДКРИТОЇ» МОДЕЛІ ТРІЩИНИ

Розглянемо довільну матрицю-рядок $\mathbf{R}=[R_1,R_3,R_4]$. На підставі (2) представимо

$$\mathbf{RP}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{RSW}^{+}(x_1)-\mathbf{R\bar{S}W}^{-}(x_1). \tag{7}$$

Вводимо функцію

$$F(z)=\mathbf{TW}(z) \tag{8}$$

з $\mathbf{T}=[T_1,T_3,T_4]=\mathbf{RS}$ і вважаємо, що

$$\mathbf{R\bar{S}}=-\gamma\mathbf{RS}. \tag{9}$$

Тоді (7) набуває вигляду

$$\mathbf{RP}^{(1)}(x_1,0)=F^{+}(x_1)+\gamma F^{-}(x_1), \tag{10}$$

де γ і $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ – власне значення і власний вектор системи

$$\left(\gamma\mathbf{S}^{T}+\bar{\mathbf{S}}^{T}\right)\mathbf{R}^{T}=0. \tag{11}$$

Корені рівняння $\det\left(\gamma S^{T}+\bar{S}^{T}\right)=0$ мають вигляд

$$\gamma_1=\frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3=\gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4=1, \tag{12}$$

$$\delta^2=\frac{s_{13}s_{41}s_{34}+s_{31}s_{43}s_{14}-s_{31}s_{13}s_{44}-s_{11}s_{34}s_{43}}{s_{33}(s_{11}s_{44}-s_{41}s_{14})}. \tag{13}$$

Власний вектор $\mathbf{R}_j^{T}=\left[R_{j1},R_{j3},R_{j4}\right]^{T}$, пов'язаний з власним значенням γ_j $(j=1,3,4)$, можна знайти з системи (9). Аналіз показує, що для $\delta^2>0$, матриця $\mathbf{R}$, складена з власних векторів $\mathbf{R}_j^{T}$, має таку структуру:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} \\ ir_{41} & 0 & i \end{bmatrix}, \tag{14}$$

де величини $r_{14}=\dfrac{s_{11}s_{34}-s_{14}s_{31}}{\delta\left(s_{11}s_{44}-s_{14}s_{41}\right)}$, $r_{31}=-r_{11}$, $r_{34}=-r_{14}$, $r_{41}=-\dfrac{s_{43}}{s_{13}}$ приймають дійсні значення. Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзокерамік, поляризованих у напрямку x_3, нерівність $\delta^2>0$ є справедливою. Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзокерамік, поляризованих у напрямку x_3, нерівність $\delta^2>0$ є справедливою. Компоненти матриці

$$\mathbf{T}=\mathbf{RS}, \tag{15}$$

що складається з матриць-рядків $\mathbf{T}_j=\left[T_{j1},T_{j3},T_{j4}\right]=\mathbf{R}_j\mathbf{S}$ $\left(j=1,3,4\right)$, для $\delta^2>0$ може бути представлена у вигляді $T_{j1}=t_{j1}$, $T_{j3}=it_{j3}$, $T_{j4}=t_{j4}$, де всі t_{jk} $\left(j,k=1,3,4\right)$ дійсні і $t_{43}=0$. Враховуючи співвідношення (10) і (12), отримаємо:

$$\mathbf{R}_j\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1,0\right)=F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_jF_j^-\left(x_1\right). \tag{16}$$

З останнього рівняння витікає, що функції $F_j\left(z\right)$ мають ті ж властивості, що й $\mathbf{W}\left(z\right)$. А саме, для крайових умов (4)-(6) вони аналітичні у всій площині з розрізом вздовж $\left(-\infty,+\infty\right)\setminus L$. З урахуванням властивостей матриць **R, T** та формул (7) і (10), отримаємо:

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)+ir_{j4}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_jF_j^-\left(x_1\right), \tag{17}$$

$$t_{j1}\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle+it_{j3}\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle+t_{j4}\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle=F_j^+\left(x_1\right)-F_j^-\left(x_1\right)\setminus, \tag{18}$$

де $r_{13}=r_{33}=r_{44}=1$ і $r_{43}=0$.

Співвідношення (17) і (18) відіграють важливу роль для подальшого аналізу, тому будемо їх називати базовими. На основі цих співвідношень можна сформулювати велику кількість мішаних задач для п'єзоелектричних тіл з тріщинами.

Розглянемо для ілюстрації «відкриту» модель, що має місце при $a=b$, тобто для $L_2=\varnothing$. У цьому випадку, використовуючи рівняння (17) з умов (4), маємо

$$F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_jF_j^-\left(x_1\right)=0,\quad \left(j=1,3,4\right)\quad x_1\in L_1. \tag{19}$$

Враховуючи, що для $x_1\in L$ справедливі рівності $F_j^+\left(x_1\right)=F_j^-\left(x_1\right)=F_j\left(x_1\right)$ з (17) отримаємо

$$\left(1+\gamma_j\right)F_j\left(x_1\right)=ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)+ir_{j4}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right),\quad \text{для}\quad x_1\to\infty. \tag{20}$$

Але, беручи до уваги, що функції $F_j\left(z\right)$ є аналітичними на всій площині з розрізом $L_1\cup L_2$ і використовуючи умови на нескінченності, отримаємо з рівнянь (20):

$$F_j\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j, \tag{21}$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^\infty}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^\infty+r_{j4}E^\infty\right)$, $\left(j=1,3,4\right)$,

$$\vartheta_k=\left(1+\gamma_k\right),\quad \left(k=1,3\right),\quad \vartheta_4=2.$$

Розв'язок задачі Гільберта (19), (20) при $j=4$ може бути отриманий на основі [6] у вигляді:

$$F_4\left(z\right)=\frac{C_{04}+C_{14}z}{\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-a\right)}}. \tag{22}$$

Для визначення коефіцієнтів C_{04}, C_{14}, використані умови на нескінченності (20) для $j=4$ та теорема Гауса для контуру, що лежить на нижньому та верхньому берегах тріщини, яка може бути представлена у вигляді [5]:

$$\int_c^b \left[F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1)\right] dx_1 = 0. \tag{23}$$

Зазначені умови приводять до формули:

$$F_4(z) = \frac{ih_4}{2}\left(z - \frac{c+b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \tag{24}$$

де $h_4 = r_{41}\tau^{\infty} + r_{44}E^{\infty}$. $\vartheta_k = (1+\gamma_k)$, $(k=1,3)$, $\vartheta_4 = 2$.

З рівняння (15) з урахуванням $r_{43}=0$ і (24) отримаємо:

$$r_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + r_{44}E_1^{(1)}(x_1,0) = \frac{2}{i}F_4(x_1) = \frac{h_4}{2}\left(x_1 - \frac{c+b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \text{ для } x_1 > b. \tag{25}$$

Проводячи подібний аналіз для $j=1$ та комбінуючи результат з (25), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої для $x_1 > b$ можна легко знайти механічне напруження $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$ та електричну напруженість $E_1^{(1)}(x_1,0)$. Враховуючи формули (23) і (18) при $j=4$, і з урахуванням $t_{43}=0$, маємо:

$$t_{41}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + t_{44}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle = F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1) =$$

$$= h_4\left(x_1 - \frac{c+b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \; x_1 \in L_1 \cup L_2. \tag{26}$$

Використовуючи далі співвідношення (18) при $j=1$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої можна знайти вирази для $\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle$ і $\left\langle D_3(x_1)\right\rangle$ для «відкритої» моделі тріщини.

КОНТАКТНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ДОВІЛЬНОЇ ДОВЖИНИ ЗОНИ КОНТАКТА З УРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В ЦІЙ ЗОНІ

Розглянемо тепер сформульовану вище контактну модель. З представлень (17), (18) та граничних умов (5) витікає

$$\operatorname{Im}\left[F_k^+(x_1) + \gamma_k F_k^-(x_1)\right] = r_{j4}\,\mathrm{E}^*,\ \operatorname{Im}\left[F_k^+(x_1) - F_k^-(x_1)\right] = 0 \quad \text{для} \quad x_1 \in L_2, \quad (k=1,3), \tag{27}$$

$$F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1) = 0 \quad \text{для} \quad x_1 \in L_2. \tag{28}$$

Крайові умови (4) і комбінація співвідношень (27) дає:

$$F_k^+(x_1) + \gamma_k F_k^-(x_1) = 0 \quad \text{для} \quad x_1 \in L_1, \tag{29}$$

$$\operatorname{Im} F_k^{\pm}(x_1) = \frac{r_{j4}}{\gamma_j}\mathrm{E}^* \quad \text{для} \quad x_1 \in L_2, \quad (k=1,3). \tag{30}$$

Це є неоднорідна комбінована задача Діріхле-Римана. Розглянемо її розв'язок при $k=1$. Він отриманий аналітичним способом у вигляді [7]:

$$F_1(z)=P(z)X_1(z)+Q(z)X_2(z)+\Phi_0(z), \tag{31}$$

$$X_1(z)=ie^{i\varphi(z)}/\sqrt{(z-c)(z-b)},\ X_2(z)=e^{i\varphi(z)}/\sqrt{(z-c)(z-a)},$$
$$\varphi(z)=2\varepsilon\ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}},\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\gamma, \tag{32}$$

$P(z)=C_1z+C_2$ и $Q(z)=D_1z+D_2$ – поліноми з дійсними коефіцієнтами. Частковий розв'язок $\Phi_0(z)$ неоднорідної задачі може бути представлений у формі [8]

$$\Phi_0(z)=X_1(z)\Gamma(z),\ \Gamma(z)=\frac{Y(z)}{2\pi}\int_a^b\frac{q^+(t)+q^-(t)}{Y^+(t)(t-z)}dt+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{q^+(t)-q^-(t)}{t-z}dt;$$

$$q^{\pm}(t)=\frac{r_{14}\,\mathrm{E}^*}{\gamma_1X_1^{\pm}(t)},\quad Y(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Враховуючи, що на L_2

$$X_1^{\pm}(x)=\pm\frac{e^{\pm\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-c)(b-x)}},\quad \varphi_0(x)=2\varepsilon\, arctg\sqrt{\frac{(a-c)(b-x)}{(b-c)(x-a)}}$$

і перетворюючи попередній вираз для $\Gamma(z)$, отримаємо:

$$\Gamma(z)=\frac{r_{14}}{\pi\gamma_1}E^*\left[\int_a^b\frac{\sqrt{(t-c)(b-t)}\cosh\varphi_0(t)}{t-z}dt-\sqrt{(z-a)(b-z)}\int_a^b\sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\frac{\sinh\varphi_0(t)}{t-z}dt\right]. \tag{33}$$

Враховуємо, що

$$X_1(z)\Big|_{z\to\infty}=iz^{-2}e^{i\beta}\left(z+i\beta_1+\frac{c+b}{2}\right)+o\left(z^{-3}\right),$$
$$X_2(z)\big|_{z\to\infty}=z^{-2}e^{i\beta}\left(z+i\beta_1+\frac{c+a}{2}\right)+o\left(z^{-3}\right),$$
$$\Gamma(z)\big|_{z\to\infty}=-iR+o\left(z^{-1}\right),$$

$$R=\frac{r_{14}}{\pi\gamma_1}E^*\int_a^b\sqrt{\frac{t-c}{t-a}}\sinh\varphi_0(t)\,dt,\quad \beta=\varepsilon\ln\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},\quad \beta_1=\varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)}.$$

Порівнюючи члени при однакових степенях z у співвідношенні (21), отримаємо

$$D_1=\tilde{\sigma}\cos\beta-\tilde{\tau}\sin\beta,\quad C_1=-\tilde{\sigma}\sin\beta-\tilde{\tau}\cos\beta,$$
$$C_2=-\frac{c+b}{2}C_1-\beta_1D_1,\quad D_2=\beta_1C_1-\frac{c+a}{2}D_1-R.$$

Ці константи визначають розв'язок комбінованої задачі Діріхле-Рімана (29), (30) для довільного положення точки a.

Тоді $F_1(z)=[P(z)+\Gamma(z)]X_1(z)+Q(z)X_2(z)$. Вирази для напружень витікають з представлень (17) і мають вигляд:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{\vartheta_1\left[P(x_1)+\Gamma(x_1)\right]}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}\left[\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\cosh\varphi_0(x_1)+\sinh\varphi_0(x_1)\right]+$$

$$+\frac{\vartheta_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\left[\cosh\varphi_0(x_1)+\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\sinh\varphi_0(x_1)\right] \quad \text{для} \quad x_1\in[a,b], \tag{34}$$

$$ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+ir_{14}E_1^{(1)}(x_1,0)=$$

$$=\left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}}+\frac{i\left[P(x_1)+\Gamma(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-b}}\right]\frac{\vartheta_1\exp\left[i\varphi(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для} \quad x_1\in L. \tag{35}$$

Для $j=4$ з використанням (19), (27) приходимо до задачі

$$F_4^+(x_1)+F_4^-(x_1)=0 \quad \text{для} \quad x_1\in L_1\cup L_2, \tag{36}$$

з умовою на нескінченності (21). Її розв’язок співпадає з (24), тобто в цьому випадку справедливі формули (25). Комбінуючи ці формули з уявною частиною співвідношень (34), отримаємо вирази для напруження $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$ та електричного поля $E_1^{(1)}(x_1,0)$ для $x_1\in L$.

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАЛЬНОЇ ДОВЖИНИ ЗОНИ КОНТАКТУ

Для знаходження реальної довжини області контакту необхідно забезпечити виконання таких нерівностей:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)\le 0 \quad \text{для} \quad x_1\in L_2, \quad \langle u_3(x_1)\rangle\ge 0 \quad \text{для} \quad x_1\in L_1. \tag{37}$$

Показано, що необхідною умовою для виконання цих нерівностей є плавне закриття тріщини, що є еквівалентним відсутності особливості нормального напруження при підході до точки a з боку області контакту. З використанням (29) отримаємо, що $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ при $x_1\to a+0$ буде скінченним, якщо $Q(a)=0$. З цього співвідношення отримаємо рівняння

$$tg\beta=\frac{\sqrt{1-\lambda}\sigma^\infty+2\varepsilon h_1}{2\varepsilon\sigma^\infty-\sqrt{1-\lambda}h_1}-\frac{S}{\cos\beta\left(2\varepsilon\sigma^\infty-\sqrt{1-\lambda}h_1\right)}, \tag{38}$$

де $S=\dfrac{2R(1+\gamma_1)}{l\sqrt{1-\lambda}}$, а $\lambda=\dfrac{b-a}{b-c}$ – відносна довжина зони контакту. Останнє співвідношення є трансцендентним рівнянням для визначення відносної довжини зони контакту λ біля правої вершини тріщини. Його розв’язок зазвичай знаходиться чисельно та обирається максимальний корінь рівняння (38) з інтервалу (0, 1).

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Чисельний аналіз проводився для біматеріалу PZT4-PZT5. У таблиці 1 наведено зміну значення λ_0 залежно від величини E^* при $\tau^\infty=0\,Па$, $\sigma^\infty=10^4\,Па$ і $E^\infty=-3\times10^4\ В/м$ (I рядок), $E^\infty=-2\times10^4 В/м$ (II), $E^\infty=-10^4 В/м$ (III).

Таблиця 1

$E^*\ В/м$	$-2\cdot10^4$	-10^4	$-0{,}5\times10^4$	0	$0{,}5\times10^4$	10^4	$2\cdot10^4$
$100\lambda_0$	37,5	16,3	11,3	8,6	7,1	5,8	4,4
$100\lambda_0$	15,3	5,38	8,21	4,02	3,21	2,66	1,97
$100\lambda_0$	9,32	4,92	4,02	3,41	3,36	2,61	2,11

На рис. 2 показане розкриття тріщини на відрізку (c,a) при $E^{\infty}=-8\cdot10^{4}\,В/м$, $\sigma^{\infty}=1\cdot10^{5}\,Па$, $\tau^{\infty}=10^{6}\,Па$, $l=0,02\,мм$ та різних значеннях E^{*}.

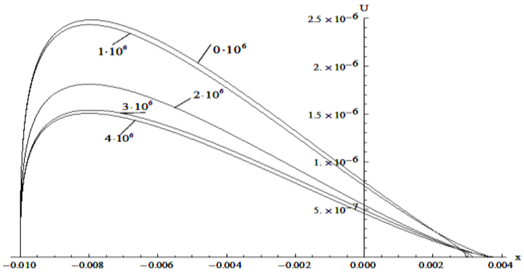


Рис. 2. Розкриття тріщини на відрізку (c, a)

На рис. 3 показано зміну напруження σ_{33} на продовженні тріщини ($x>b$), а на рис. 4 – зміну того ж напруження в зоні контакту (a,b).

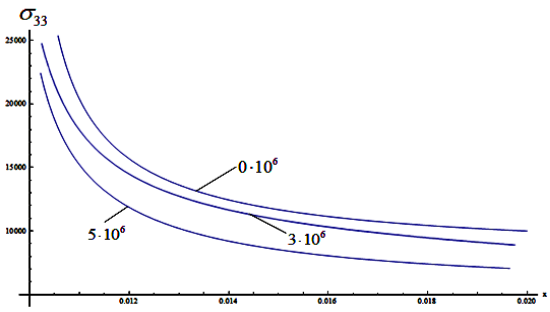


Рис. 3. Зміна нормального напруження при $x>b$

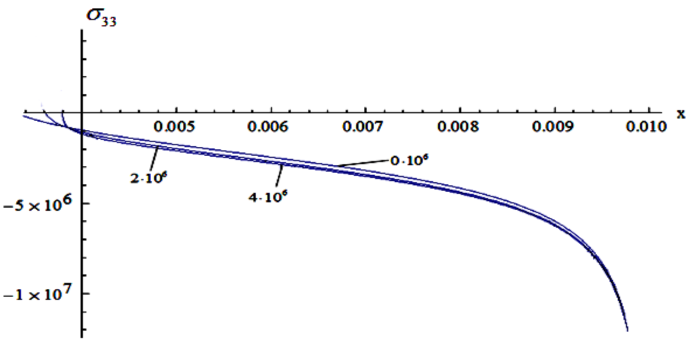


Рис. 4. Зміна нормального напруження в зоні контакту (a,b)

З наведених графіків видно, що розкриття тріщини на відрізку (c,a) відбувається без перетинання берегів, а нормальне напруження σ_{33} в зоні контакту є стискаючим.

ВИСНОВКИ

Розглянуто біматеріальне тіло з міжфазною тріщиною під дією розтягуючих та зсувних напружень на нескінченності, а також електричного поля. Вважається, що тріщину заповнено електропровідною рідиною і враховується контакт її берегів, а також електричне поле в зоні контакту. Проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої приведено точний аналітичний розв'язок. Показано зокрема, що при збільшенні електричного поля в зоні контакту довжина цієї зони зменшується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // Journal of Applied Mechanics. – 1977. – 44. – P. 631-636.
2. Herrmann K. P. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – 70. – P. 127-143.
3. Herrmann K. P. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial / K.P. Herrmann, V.V. Loboda, V.B. Govorucha // International J. of Fracture. – 2001. – 111. – P. 203-227.
4. Loboda V. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial / V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – V. 51. – P. 63-73.
5. Кныш П. Ю. Аналитическое и численное исследование электродированой трещины в пьезоэлектрическом материале / П.Ю. Кныш, В.В. Лобода // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2012. – С. 1-15.
6. Нахмейн Е. Л. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом / Е.Л. Нахмейн, Б.М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 663-673.
7. Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов / В.В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1991. – С. 78-86.
8. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М. : Наука, 1988. – 472 с.

REFERENCES

1. Comninou, M. (1977), "The interface crack", *Journal of Applied Mechanics*, 44, pp. 631-636.
2. Herrmann, K.P. and Loboda, V.V. (2000), "Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models", *Archive of Applied Mechanics*, 70, pp. 127-143.
3. Herrmann K.P., Loboda, V.V. and Govorucha, V.B. (2001), "On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial", *International J. of Fracture*, 111, pp. 203-227.
4. Loboda, V., Sheveleva, A. and Lapusta, Y. (2014), "An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 63-73.
5. Knish, P.U. and Loboda, V.V. (2012), "Analytical and numerical investigation of electricical cracks in the piezoelectric material", *Visnik Dnipropetrovskogo universitetu, Seriya «Mehanika»*, pp. 1-15.

6. Nahmein, E.L. and Nuller, B.M. (1986), "Contact of an elastic half-plane with partially exfoliated stamp", *Applying mathematics and mechanics*, p. 50, vol. 4, pp. 663-673.

7. Loboda, V.V. (1991), "About interfacial crack with contact zones", *Gidroaeromehanika i teoriya uprugosti*, pp. 78-86.

8. Parton, V.Z. and Kudryavcev, B.A. (1988), *Elektromagnitouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity piezoelectric and conductive bodies], Nauka, Moskow.

УДК 393.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА КРАЙОВОЮ РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Звізло І. С., к. ф.-м. н.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

У роботі досліджується двовісний згин нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та крайовою радіальною тріщиною. При розв'язуванні задачі вважалося, що береги тріщини приходять у гладкий контакт на верхній основі пластини по області постійної ширини по всій її довжині. Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі та кутів повороту нормалі до серединної площини в задачі згину на берегах тріщини, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактного зусилля між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, контакт берегів, контактне зусилля.

ДВУХОСНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И КРАЕВОЙ РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Звизло И. С., к. ф.-м. н.

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

В работе исследуется двухосный изгиб бесконечной изотропной пластины с круговым отверстием и краевой радиальной трещиной. При решении задачи считалось, что берега трещины приходят в гладкий контакт на верхней основе пластины по области постоянной ширины по всей ее длине. Решение задачи построено с использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов и сведено к системе сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений в плоской задаче и углов поворота в задаче изгиба на берегах трещины, которая решена численно с помощью метода механических квадратур. Проведен численный анализ задачи и построены графические зависимости контактного усилия между берегами трещины, коэффициентов интенсивности моментов и усилий.

Ключевые слова: трещина, изгиб, изотропная пластинка, комплексные потенциалы, контакт берегов, контактное усилие.

BIAXIAL BENDING THE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE AND EDGE RADIAL CRACKS WITH THE WIDTH OF THE CONTACT AREA IT'S SHORES

Opanasovich V. K., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Proffessor,
Zvizlo I.S., Ph. D. in Physics and Maths

Ivan Franko National Univercity of Lviv,
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

We investigate the biaxial bending infinite isotropic plate with a circular hole and the edge of the radial crack. To solve the problem it was thought that the crack edges come into smooth contact at the top plate based on the area of constant width along its entire length. Solution of the problem is constructed using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials and reduced to a system of singular integral equations in the jumping displacement in the plane problem and the angles of rotation in the bending problem on the crack, which is solved numerically using the method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the problem, on which constructed a graph of the contact force, intensity factors moments and efforts.
Key words: crack, bending, isotropic plate, complex potentials, contact shores, the contact force.

ВСТУП

Пластини широко застосовуються в машинобудуванні та інших галузях техніки. Їх дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та отворів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Формулювання та методи розв'язування плоских задач та задач згину пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів наведено в монографіях [1-5]. З фізичних міркувань зрозуміло, що контакт берегів тріщиноподібних дефектів впливає на напружено-деформований стан пластини, тому задачі з його дослідження є актуальними. Вперше аналітичний розв'язок задачі про згин пластини з однією тріщиною, береги якої гладко контактують по лінії по її усій довжині, побудовано Шацьким І.П. [6], а дещо пізніше аналогічні результати отримали Young M., Sun C. [7]. Задачі згину пластини з коловою межею поділу матеріалів (отвір, шайба) та з однією або двома тріщинами з урахуванням лінійчасного контакту їх берегів розв'язано в працях [8-10]. Напружено-деформований стан пластини з тріщиною, береги якої гладко контактують по області постійної ширини (смуговий контакт), за згину дослідили Slepyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. [11, 12], Опанасович В.К. [13]. Вплив кругового або еліптичного отвору на напружено-деформований стан пластини з однією прямолінійною тріщиною за смугового контакту її берегів вивчено в [14, 15].

У роботі досліджується двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною крайовою тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі, на основі якого побудовані відповідні графічні залежності контактного зусилля, коефіцієнтів інтенсивності моментів та критичного навантаження.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та крайову радіальну тріщину завдовжки $2l$, вільну від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Oxy\tilde{z}$, направивши вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O співпадає з центром кругового отвору, а вісь Ox направлена по тріщині. У площині Oxy

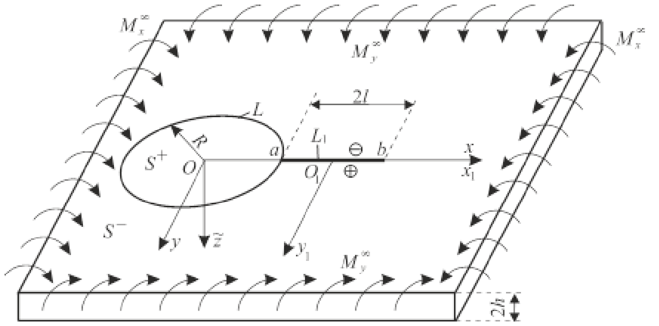


Рис. 1. Схема навантаження пластини

введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox і всім величинам, які відносяться до цієї системи координат, будемо приписувати відповідно індекси r і θ. Пов'яжемо з центром тріщини декартову систему координат $O_1x_1y_1$ (див. рис. 1). Точки площини Oxy, що співпадають з кінцями тріщини, позначимо через a і b, область у середині кругового отвору – через S^+, ззовні – через S^-, лінію, де розміщена тріщина, – через L_1, а межу кругового отвору – через L. Пластина на нескінченності згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞, під дією яких береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 на верхній основі пластини [13].

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (класична теорія); при таких крайових умовах

$$\sigma_{y_1y_1}^{\pm} = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^{\pm} = 0, \quad P^{\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{\pm} = h\beta N, \quad \partial_{x_1}[v_{\Pi}] + \alpha h\left[\partial^2_{x_1y_1} w\right] = 0, \quad x_1 \in L_1, \tag{1}$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad P_r = 0, \quad M_r = 0, \quad x \in L, \tag{2}$$

де $N-$ контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$ і σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень у декартовій та полярній системі координат відповідно, а u_{Π} і v_{Π} – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі, M_r і M_{y_1} – згинальні моменти, P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні силі; $\partial_s f = \partial f/\partial s$; $[f] = f^+ - f^-$, значками «+» і «–» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \to \pm 0$; константи α і β мають вигляд [13]:

$$\alpha = 0.5\left\{1 + \left(1 - \gamma^2\right)\right\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \; \gamma = h_1/h. \tag{3}$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [4] та класичної теорії згину пластин [5], аналогічно як у [8], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини в задачі згину $Y(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщини в плоскій задачі $G(\eta)$, яка набула вигляду:

$$\int_{-1}^{1}\left\{K(\eta,\xi)+L(\eta,\xi)\right\}Y_1(\eta)\,d\eta-\frac{\varepsilon^2c'}{X^2}=c',\quad \xi\in[-1,\,1],\tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{L(\eta,\xi)-K(\eta,\xi)\right\}Y_2(\eta)\,d\eta+\frac{2\beta\tilde{m}}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{R(\eta,\xi)+S(\eta,\xi)\right\}G_1(\eta)\,d\eta=P(\xi),\ \xi\in[-1,\,1],\tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{R(\eta,\xi)-S(\eta,\xi)\right\}G_2(\eta)\,d\eta=0,\quad \xi\in[-1,\,1],\tag{6}$$

де

$$P(\xi)=A-\tilde{\kappa}A+B+\frac{\varepsilon^2}{X^2}\left(A-\tilde{\kappa}A+B-B/\tilde{\kappa}\right)+\frac{\varepsilon^2B}{\tilde{\kappa}X^4}\left(2X^2-3\varepsilon^2\right),$$

$$K(\eta,\xi)=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\tilde{\kappa}}{\eta-\xi}+\frac{\tilde{\kappa}}{X}+\frac{\varepsilon^2}{2\tilde{\kappa}(TX-\varepsilon^2)}\left(\frac{2\tilde{\kappa}^2}{X}+\frac{\varepsilon^2-T^2}{T(TX-\varepsilon^2)}+\frac{2TX^3-3\varepsilon^2TX+\varepsilon^4}{TX^2(TX-\varepsilon^2)^2}\left(T^2-\varepsilon^2\right)\right)\right\},$$

$$L(\eta,\xi)=\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\left\{\frac{T^2-\varepsilon^2}{T(TX-\varepsilon^2)^2}-\frac{2}{X^3}-\frac{1}{X(TX-\varepsilon^2)}-\frac{1}{TX^2}+\frac{X^2(2TX-\varepsilon^2)-3\varepsilon^2TX+2\varepsilon^4}{X^3(TX-\varepsilon^2)^2}\right\},$$

$$R(\eta,\xi)=\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{1}{X}+\frac{\varepsilon^2}{2(TX-\varepsilon^2)}\left(\frac{2}{X}+\frac{\varepsilon^2-T^2}{T(TX-\varepsilon^2)}+\frac{2TX^3-3\varepsilon^2TX+\varepsilon^4}{TX^2(TX-\varepsilon^2)^2}\left(T^2-\varepsilon^2\right)\right),$$

$$S(\eta,\xi)=\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\frac{\varepsilon^2-T^2}{T(TX-\varepsilon^2)^2}+\frac{2}{X^3}+\frac{1}{X(TX-\varepsilon^2)}+\frac{1}{TX^2}-\frac{X^2(2TX-\varepsilon^2)-3\varepsilon^2TX+2\varepsilon^4}{X^3(TX-\varepsilon^2)^2}\right),$$

$$\tilde{\kappa}=\frac{3+\upsilon}{1-\upsilon},\ \kappa=\frac{3-\upsilon}{1+\upsilon},\ A=-\frac{\rho+1}{4D(1+\upsilon)},\ B=\frac{1-\rho}{2}\tilde{m},\ \rho=\frac{M_x^\infty}{M_y^\infty},\ D=\frac{2}{3\left(1-\upsilon^2\right)},\ \tilde{m}=-\frac{1}{D(1-\upsilon)},$$

$$T=1+\varepsilon+\eta,\ X=1+\varepsilon+\xi,\ \varepsilon=R/l,$$

$$y(x)Eh^3/M_y^\infty=Y(x)=Y_1(x)+iY_2(x),\ y(x)=\left(1+\tilde{\kappa}\right)^{-1}\left[\partial_x w+i\partial_y w\right],$$

$$\frac{h^2g'(x)}{M_y^\infty}=G(x)=G_1(x)+iG_2(x),\ g'(x)=\frac{2\mu}{(1+\kappa)i}\left[\partial_x\left(u_\Pi+iv_\Pi\right)\right],\ \mu=\frac{E}{2(1+\upsilon)},$$

$Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$ – дійсні функції; E – модуль Юнга; υ – коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що ядра $R(\eta,\xi)$ і $S(\eta,\xi)$ співпадають з відповідними ядрами, отриманими в монографії [3] за допомогою іншого підходу. Крім того, якщо формально поставити $\tilde{\kappa}=1$, то ядра цієї системи сингулярних рівнянь пов'язані залежностями $\pi L(\eta,\xi)=-S(\eta,\xi)$ і $\pi K(\eta,\xi)=-R(\eta,\xi)$.

Зауважимо, що на підставі останнього співвідношення в (1) функції $G_1(\eta)$ і $Y_2(\eta)$ пов'язані

$$G_1(\eta)+\frac{\alpha\left(1+\tilde{\kappa}\right)}{(1+\kappa)(1+\upsilon)}Y_2(\eta)=0,\quad \eta\in[-1,\,1].\tag{7}$$

Для визначення сталої c' використаємо однозначність прогину пластини при обході кругового отвору та тріщини

$$c'+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Y_1(\eta)\,d\eta}{T}+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\eta Y_1(\eta)\,d\eta=0.\tag{8}$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [2]:

$$k^{\pm} = \mp h \lim_{x\to\pm l}\left(f(x) g'(x)\right), \quad f(x) = \sqrt{\left(l^2 - x^2\right)/l} ,$$

$$K^{\pm} = \mp 4Eh^3 (3+\upsilon)\left(3\left(1-\upsilon^2\right)\right)^{-1} \lim_{x\to\pm l}\left(f(x) y(x)\right).$$

Оскільки для крайової тріщини КІМ та КІЗ у вершині a [2]

$$k^a = 0,\ K^a = 0,$$

то

$$Y(-1) = 0, \quad G(-1) = 0. \tag{9}$$

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^*(\xi) = \frac{hN(\xi)}{M_y^\infty} = 2\int_{-1}^{1}\left\{R(\eta,\xi) + S(\eta,\xi)\right\}G_1(\eta)\,d\eta, \quad \xi \in [-1,\ 1]. \tag{10}$$

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь (4)-(9) за допомогою методу механічних квадратур [3] зведена до такої системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $U_i(\eta_m)$, $\left(i = \overline{1,4}\right)$ та c':

$$\frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(K(\eta_m,\xi_r) + L(\eta_m,\xi_r)\right)U_1(\eta_m) = c'\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{X_r^2}\right), \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$\frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{M}\left\{\left(L(\eta_m,\xi_r) - K(\eta_m,\xi_r)\right)U_2(\eta_m) + \frac{2\beta\tilde{m}}{\pi}\left(R(\eta_m,\xi_r) + S(\eta_m,\xi_r)\right)U_3(\eta_m)\right\} = P(\xi_r), \ r = \overline{1, M-1},$$

$$\sum_{m=1}^{M}\left(R(\eta_m,\xi_r) - S(\eta_m,\xi_r)\right)U_4(\eta_m) = 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \tag{11}$$

$$\frac{\alpha(1+\tilde{\kappa})}{(1+\kappa)(1+\upsilon)}U_2(\xi_r) + U_3(\xi_r) = 0, \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$c' + \frac{1}{2M}\sum_{m=1}^{M}\frac{U_1(\eta_m)}{T_m} + \frac{1}{2M}\sum_{m=1}^{M}\eta_m U_1(\eta_m) = 0,$$

де $\eta_m = \cos\frac{2m-1}{2M}\pi$, $\xi_r = \cos\frac{\pi r}{M}$, $T_m = 1 + \varepsilon + \eta_m$, $X_r = 1 + \varepsilon + \xi_r$,

$$Y_i(\eta) = \frac{U_i(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad G_i(\eta) = \frac{U_{2+i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Зведені КІМ K^* та КІЗ k^* обчислювалися за формулою [3]

$$K^* = \frac{K}{M_y^\infty\sqrt{l}} = \mp\frac{2i(3+\upsilon)}{3\left(1-\upsilon^2\right)}u(\pm 1),$$

$$k^* = \frac{hk}{M_y^\infty\sqrt{l}} = \mp v(\pm 1),$$

де

$$u(1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\left(U_1(\eta_m)+iU_2(\eta_m)\right)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi\,,$$

$$u(-1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M}\left(U_1(\eta_m)+iU_2(\eta_m)\right)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi\,, \qquad (12)$$

$$v(1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\left(U_3(\eta_m)+iU_4(\eta_m)\right)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi\,,$$

$$v(-1)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M}\left(U_3(\eta_m)+iU_4(\eta_m)\right)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi\,.$$

12

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M}U_j(\eta_m)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi=0,\quad j=\overline{1,4}\,. \qquad (13)$$

Розв'язування задачі зведено до системи алгебраїчних рівнянь (11), (13).

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини на основі (10) визначимо за формулою:

$$N^*(\xi_r)=\frac{2\pi}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(R(\eta_m,\xi_r)-S(\eta_m,\xi_r)\right)U_3(\eta_m),\quad r=\overline{1,M-1}.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

На основі розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (11)-(13) був проведений числовий аналіз задачі при $\upsilon=0{,}3$ та $\gamma=0{,}13$, який поданий на рис. 2-4.

На рис. 2 наведена графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^*=hN\big/M_y^\infty$ при різних значеннях $\varepsilon=R/l$ для $\rho=M_x^\infty\big/M_y^\infty=1$. Крива 1 побудована при $\varepsilon=0{,}1$, крива 2 – при $\varepsilon=0{,}5$, крива 3 – при $\varepsilon=1$, крива 4 – при $\varepsilon=2$, крива 5 – при $\varepsilon=10$. Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні ε величина N^* у ближній вершині тріщини ($\xi=-1$) зменшується, а в дальній ($\xi=1$) – збільшується.

На рис. 3 подана графічна залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) K_1^{*b} у вершині b від ε, причому суцільними лініями позначені КІМ з урахуванням контакту берегів тріщини, а штриховими – без урахування контакту

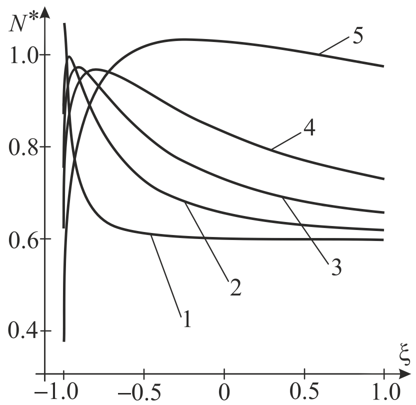


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* між берегами тріщини

берегів тріщини. Криві 1 відповідають значенню $\rho=M_x^\infty\big/M_y^\infty=0$, криві 2 – $\rho=1$, криві 3 – $\rho=2$, криві 4 – $\rho=5$. Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні ε КІМ зростає, крім того, наявність моменту M_x^∞ призводить до його збільшення. Теж бачимо, що КІМ є меншими, якщо враховувати контакт берегів тріщини, ніж КІМ, коли контакт берегів тріщини не враховувати.

На рис. 4 подана графічна залежність приведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) K_1^{*b} у вершині b від ρ при різних значеннях ε. Криві 1 відповідають значенню

$\varepsilon = R/l = 0,5$, криві 2 – $\varepsilon = 1$, криві 3 – $\varepsilon = 2$, криві 4 – $\varepsilon = 5$. Як бачимо з цього рисунка, криві є лінійними, чого можна було сподіватися в силу лінійності $P(\xi)$ від відносного зовнішнього навантаження ρ, а КІМ зростають при збільшенні згинного моменту M_x^∞.

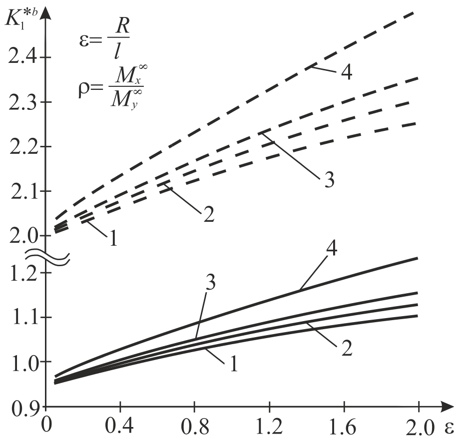


Рис. 3. Графічна залежність зведеного коефіцієнту інтенсивності моментів K_1^{*b} від відносного радіуса отвору ε

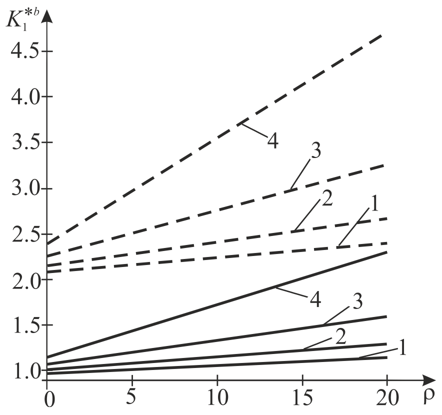


Рис. 4. Графічна залежність зведеного коефіцієнту інтенсивності моментів K_1^{*b} від відносного зовнішнього навантаження ρ

Зауважимо, що приведені КІЗ і КІМ у вершині b пов'язані між собою співвідношенням $k_1^{*b} / K_1^{*b} = 3(1+\upsilon)/(\alpha(3+\upsilon))$, тому графічні залежності для k_1^{*b} не наводяться. На основі числового аналізу можна стверджувати, що $K_2^{*b} = 0$ і $k_2^{*b} = 0$ при будь-яких параметрах сформульованої задачі. Зауважимо, що за відсутності контакту берегів тріщини результати для КІМ збігаються з результатами, наведеними в [16].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В.Панасюк. – К. : Наук. Думка, 1979. – 400 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Панасюк В. В. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К. : Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упру гости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во "Наука", 1966. – 708 с.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
7. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.

8. Опанасович В. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 46-59.

9. Опанасович В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.

10. Опанасович В. К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 240-246.

11. Slepyan L. I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.

12. Dempsey J. P. Closure of a through crack in a plate under bending / J.P. Dempsey, I.I. Shektman, L.L. Slepyan // International Journal or Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4077-4089.

13. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20(2). – С. 123-127.

14. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 222-230.

15. Опанасович В. К. Згин ізотропної пластини з еліптичним отвором та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В.К. Опанасович, М.С. Слободян, В.Я. Бедрій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 274-280.

16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений : В 2-х томах. / Под ред. Ю. Мураками. – М. : Мир. – 1990. – 448 с.

REFERENCES

1. Beregnitskiy, L.T., Delyavskiy, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects type of cracks], Naukova dumka, Kiev.

2. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernie zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks], Naukova dumka, Kiev.

3. Panasyuk, V.V., Savruk M.P. and Datsishin, A.P. (1976) *Rasprostranenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses around cracks in plates and shells], Naukova dumka, Kiev.

4. Mushelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.

5. Prusov, I.A. (1975), *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The method of conjugation in the theory of plates], Izdatelstvo Beloruskogo universitetu, Minsk.

6. Shatskiy, I.P. (1988), “Plate bending, weakened cut with contacting shores”, *Dopovidi AN URSR, Seria A, Fiziko-matematichni ta tehnichni nauki*, no. 7, pp. 49-51.

7. Young, M. and Sun, C. (1992), “Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates”, *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81-93.

8. Opanasovysh, V. and Slobodyan, M. (2006), “Bilateral bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it’s shores”, *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, vol. 65, pp. 46-59.

9. Opanasovych, V.K. and Slobodyan, M.S. (2006), “Bilateral bending of the plate with a circular orifice and a two radial crack with considering of the contact it’s shores”, *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polia*, vol. 49, no. 3, pp. 106-119.

10. Opanasovych, V.К., Zvizlo, I.S. and Slobodyan, M.S. (2012), “Bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack inside the washer with taking into account contact it’s shores”, *Problemi obchisluvalnoi mehaniki ta mitsnosti konstruktsiy*, vol. 19, pp. 240-246.

11. Slepyan, L.I., Dempsey, J.P. and Shekhtman, I.I. (1995), “Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, pp. 1727-1749.

12. Dempsey, J.P., Shektman, I.I. and Slepyan, L.L. (1998), “Closure of a through crack in a plate under bending”, *International Journal or Solids and Structures*, vol. 35, pp. 4077-4089.

13. Opanasovych, V.К. (2007), “Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces”, *Naukovi notatki Lutskogo tehnichnogo universitetu*, vol. 20(2), pp. 123-127.

14. Opanasovych, V., Slobodyan, M. and Bedriy, B. (2012), “Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores”, *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, vol. 76, pp. 222-230.

15. Opanasovych, V.К., Slobodyan, M.S. and Bedriy, B.Y. (2012), “Bending isotropic plates with elliptic hole and crack width of range account contact it’s banks”, *Problemi obchisluvalnoi mehaniki ta mitsnosti konstruktsiy*, vol. 20, pp. 274-280.

16. Pod red. Yu. Murakami (1990), *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy* [Handbook of stress intensity factor], Mir, Moscow.

УДК 393.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Ярема Є. Б., магістр

Львівський національний університет ім. Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану пластинчастого елемента конструкції за наявності в ньому криволінійного отвору і прямолінійної наскрізної тріщини при заданому навантаженні на отворі та тріщині, а також заданому однорідному полі зусиль на нескінченності. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі, розв’язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння на отворі, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень, який подано графічно, при різних значеннях параметрів задачі для кругового та еліптичного отворів.

Ключові слова: пластина, прямолінійна тріщина, криволінійний отвір, комплексні потенціали.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Слободян Н. С., к. ф.-м. н., доцент, Ярема Е. Б., магистр

Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

В данной работе предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния пластинчатого элемента конструкции при наличии в нем криволинейного отверстия и прямолинейной сквозной трещины при заданной нагрузке на отверстии и трещине, а также заданном однородном поле усилий на бесконечности. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили, решение задачи сведено к сингулярному интегральному уравнению на отверстии, а на берегах прямолинейной трещины краевые условия удовлетворяются аналитически. Проведен численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений, который подан графически, при различных значениях параметров задачи для кругового и эллиптического отверстий.
Ключевые слова: пластина, прямолинейная трещина, криволинейное отверстие, комплексные потенциалы.

ABOUT ONE APPROACH TO THE STUDY OF STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATE WITH CURVED HOLE AND STRAIGHT-THROUGH CRACK

Opanasovich V. K., D. Sc. in Physics and Maths., Professor,
Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths., Associate Proffessor, Yarema Y. B., Magister

Ivan Franko National Univercity of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

This paper deals with the study of stress-strain state of the plate with curved hole and straight-through crack at a given load for holes and cracks. The plate at infinity has a uniform field of efforts. Using methods of the theory of functions of a complex variable and Kolosova-Muskhelishvili complex potentials the solution of the problem is reduced to a singular integral equation in the hole. Boundary conditions on the edges of the rectilinear crack are satisfied analytically. We provide a numerical analysis of stress intensity factors presented graphically for different values of parameters of the problem for a circular and elliptical holes.
Key words: plate, rectilinear crack, curved hole, complex potentials.

ВСТУП

Пластинчасті елементи конструкцій дуже широко використовуються в авіаційній, суднобудівній, хімічній та інших галузях промисловості. Вони з конструктивних міркувань можуть містити отвори, а в процесі експлуатації в них можуть виникнути тріщини, які є сильними концентраторами напружень, що може призвести до руйнування такого елемента. Дослідженням напруженого стану тонкостінних елементів конструкцій, які містять тріщини і отвори, займалось багато дослідників, що відображено в монографіях [1-8] та довідниках [9, 10]. Переважно в більшості робіт розв’язування задач з такими дефектами зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на отворі, так і на тріщині, розв’язування яких будувалося числово з використанням відповідних квадратурних формул.

У роботі запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану пластинчастого елемента конструкцій при наявності в ньому криволінійного отвору, який заміняється розімкнутою криволінійною тріщиною тієї ж конфігурації, та прямолінійної наскрізної тріщини при заданому навантаженні як на отворі, так на тріщині, а на нескінченності пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали розв’язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння на криволінійній тріщині, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) при різних значеннях параметрів задачі для кругового, еліптичного та прямокутного отворів.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

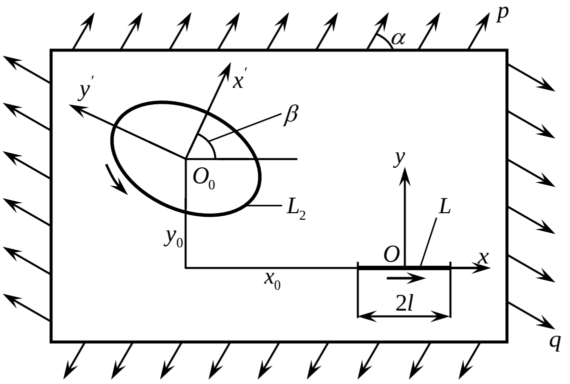


Рис. 1. Схема розміщення отвору і тріщини

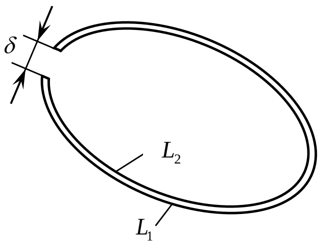


Рис. 2. Схема заміни отвору тріщиною

Дослідимо напружено-деформований стан пластини з криволінійним отвором та прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, на берегах яких задано самоврівноважене зовнішнє навантаження. Крім того, пластина знаходиться під дією розподіленого навантаження інтенсивністю p і q, причому зусилля p утворює кут α з віссю симетрії тріщини.

Введемо в розгляд декартову систему координат Oxy з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь Ox вздовж неї. З отвором зв'язуємо локальну систему координат $O_0x'y'$, з початком координат O_0 в середині отвору із координатами x_0 і y_0, причому вісь O_0x' утворює кут β з віссю Ox (див. рис. 1). Лінію, де розміщена тріщина, позначимо через L, а лінію отвору – через L_2.

Як показав числовий експеримент при застосуванні відповідних квадратурних формул до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння на отворі, доцільно замінити криволінійний отвір розімкнутою тріщиною L_1 того самого обрису з малою відстанню δ між її вершинами (див. рис. 2).

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = P(x), \qquad x \in L, \tag{17}$$

$$N^{\pm} + iT^{\pm} = P_1(t), \qquad t \in L_1, \tag{18}$$

де $\sigma_{yy}^{\pm}$, $\sigma_{xy}^{\pm}$ – компоненти тензора напружень в декартовій системі координат Oxy, N і T – відповідно нормальна та дотична компонента зовнішнього навантаження на L_1, $P(x)$ і $P_1(t)$ – відомі функції, значками «+» та «–» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні z до лінії справа і зліва по відношенню до заданого напрямку, що вказано на рис. 1.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$. Тоді для визначення компонент тензора напружень σ_{yy} і σ_{xy} та нормальної N і дотичної T складової напруження на L_1 будемо мати співвідношення [11]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{19}$$

$$N + iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{d\bar{t}}{dt}\left[t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}\right], \qquad t \in L_1. \tag{20}$$

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \qquad \Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \tag{21}$$

де функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$, згідно з [1], подамо так:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g_1(u)du}{u-z}, \qquad \Psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left[\frac{\overline{g_1(u)}d\bar{u}}{u-z} + \frac{\bar{u}g_1(u)du}{(u-z)^2}\right], \tag{22}$$

$g_1(u)$ – шукана функція, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, функції $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – голоморфні поза прямолінійною тріщиною,

$$\Gamma = \frac{1}{4}(p+q), \qquad \Gamma' = -\frac{1}{2}(p-q)e^{-2i\alpha},$$

крім того, має місце залежність:

$$\int_{L_1} g_1(u)du = 0, \tag{23}$$

що визначає собою однозначність переміщень при обході контура криволінійної тріщини.

Введемо в розгляд функцію:

$$\Omega_2(z) = \overline{\Phi}_2(z) + z\overline{\Phi}_2'(z) + \overline{\Psi}_2(z), \tag{24}$$

де $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$, $\bar{z} = x - iy$.

Врахувавши (5) і (8), залежність (3) набуде вигляду:

$$\begin{gathered}\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_2(z) + \Omega_2(\bar{z}) + (z-\bar{z})\overline{\Phi_2'(z)} + \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \\ + z\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi_1(z)} + 2\Gamma + \overline{\Gamma}'.\end{gathered} \tag{25}$$

На основі (1) можемо записати:

$$\left(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}\right)^+ - \left(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}\right)^- = 0, \qquad x \in L. \tag{26}$$

Якщо врахувати (9), то (10) можемо подати так:

$$\left(\Phi_2(x) - \Omega_2(x)\right)^+ - \left(\Phi_2(x) - \Omega_2(x)\right)^- = 0, \quad x \in L. \tag{27}$$

Розв'язуючи задачу лінійного спряження (11) та враховуючи поведінку функцій $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ при великих $|z|$, одержимо:

$$\Phi_2(z) = \Omega_2(z). \tag{28}$$

З крайової умови (1) отримаємо:

$$\left(\sigma_{yy}-i\sigma_{xy}\right)^{+}+\left(\sigma_{yy}-i\sigma_{xy}\right)^{-}=2P(x), \qquad x\in L. \tag{29}$$

Врахувавши (9), (6) і (12), (13) можемо записати так:

$$\Phi_2^{+}(x)+\Phi_2^{-}(x)=P(x)+f(x), \qquad x\in L, \tag{30}$$

де

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left\{\overline{g_1(u)}\left[\frac{1}{\bar{u}-x}+\frac{x}{\left(\bar{u}-x\right)^2}-\frac{u}{\left(\bar{u}-x\right)^2}\right]d\bar{u}-g_1(u)\left[\frac{1}{u-x}+\frac{1}{\bar{u}-x}\right]du\right\}-2\Gamma-\bar{\Gamma}'. \tag{31}$$

Розв’язавши задачу лінійного спряження (14), одержимо:

$$\Phi_2(z)=\Phi_2(z)+\frac{1}{2\pi iX(z)}\int_L\frac{f(x)X^{+}(x)dx}{x-z}+\frac{C_1z+C_2}{X(z)}, \tag{32}$$

де

$$X(z)=\sqrt{z^2-l^2}, \qquad \Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi iX(z)}\int_L\frac{P(x)X^{+}(x)dx}{x-z}. \tag{33}$$

Оскільки має місце залежність [11]:

$$\int_L\frac{X^{+}(x)dx}{x-z}=\pi i\left(X(z)-z\right), \tag{34}$$

то функція $\Phi_2(z)$ (16), врахувавши (18), набуде вигляду:

$$\begin{gathered}\Phi_2(z)=-\left(\Gamma+\frac{\bar{\Gamma}'}{2}\right)\left(1-\frac{z}{X(z)}\right)-\frac{1}{4\pi iX(z)}\int_{L_1}\left\{g_1(u)\left[\frac{X(z)-X(u)}{u-z}+\frac{X(z)-X(\bar{u})}{\bar{u}-z}\right]du-\right.\\ \left.-\overline{g_1(u)}\left[\frac{\left(\bar{u}-u\right)}{\left(\bar{u}-z\right)}\left(\frac{X(z)-X(\bar{u})}{\bar{u}-z}+\frac{\bar{u}}{X(\bar{u})}\right)\right]d\bar{u}\right\}+\Phi_2(z).\end{gathered} \tag{35}$$

Визначивши функцію $\overline{\Psi_2(z)}$ із (8) та врахувавши (5), формулу (4) можна подати так:

$$\begin{gathered}N+iT=\Phi_1(t)+\overline{\Phi_1(t)}+\frac{d\bar{t}}{dt}\left[t\overline{\Phi_1'(t)}+\overline{\Psi_1(t)}\right]+\Phi_2(t)+\frac{d\bar{t}}{dt}\Phi_2(\bar{t})+\\ +\left(1-\frac{d\bar{t}}{dt}\right)\overline{\Phi_2(t)}+\left(t-\bar{t}\right)\frac{d\bar{t}}{dt}\overline{\Phi_2'(t)}+2\Gamma+\frac{d\bar{t}}{dt}\bar{\Gamma}', \qquad t\in L_1.\end{gathered} \tag{36}$$

З крайової умови (2) отримаємо:

$$\left(N-iT\right)^{+}+\left(N-iT\right)^{-}=2P_1(t), \qquad t\in L_1. \tag{37}$$

Беручи до уваги (20), (19), (6), з (21) одержимо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження шуканої функції $g_1(u)$:

$$\int_{L_1}\left[g_1(u)K\left(u,t\right)du+\overline{g_1(u)}M\left(u,t\right)d\bar{u}\right]=\rho\left(t\right), \qquad t\in L_1, \tag{38}$$

де

$$\rho(t)=-\Gamma\left[\frac{t}{X(t)}+\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}-\left(t-\bar t\right)\frac{d\bar t}{dt}\frac{l^2}{\overline{X(t)}\left(\bar t^2-l^2\right)}\right]-\overline{\Gamma'}\left[\frac{d\bar t}{dt}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{X(t)}\right)-\left(1-\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}\right)\frac{1}{2}\frac{d\bar t}{dt}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma'\left[\left(1-\frac{d\bar t}{dt}\right)\left(1-\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}\right)+\left(t-\bar t\right)\frac{d\bar t}{dt}\frac{l^2}{\overline{X(t)}\left(\bar t^2-l^2\right)}\right]-\frac{1}{2\pi}\int_L X(x)\left\{P(x)\left[\frac{1}{X(t)(x-t)}+\right.\right.\tag{39}$$

$$\left.\left.+\frac{d\bar t}{dt}\frac{1}{\overline{X(t)}(x-\bar t)}\right]+\frac{\overline{P(x)}}{\overline{X(t)}(x-\bar t)}\left[1-\frac{d\bar t}{dt}+(t-\bar t)\frac{d\bar t}{dt}\left(\frac{1}{x-\bar t}+\frac{\bar t}{\overline{X(t)}\left(\bar t^2-l^2\right)}\right)\right]\right\}dx,\qquad X(x)=\sqrt{x^2-l^2},$$

$$K(u,t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{u-t}+\frac{d\bar t}{dt}\frac{1}{\bar u-\bar t}\right]-\frac{1}{4\pi i}\left\{\frac{1}{X(t)}\left[\frac{X(t)-X(u)}{u-t}+\frac{X(t)-\overline{X(u)}}{\bar u-t}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{\overline{\overline{X(t)}}}\frac{d\bar t}{dt}\left[\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}+\frac{\overline{X(t)}-\overline{X(u)}}{\bar u-\bar t}\right]+\frac{1}{\overline{\overline{X(t)}}}\left\{\left(1-\frac{d\bar t}{dt}\right)\frac{u-\bar u}{u-\bar t}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}+\frac{u}{X(u)}\right)-\left(t-\bar t\right)\frac{d\bar t}{dt}\left[\frac{\bar t}{\left(\bar t^2-l^2\right)}\frac{u-\bar u}{u-\bar t}\left(\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}+\right.\right.\tag{40}$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{u}{X(u)}\right)-\frac{u-\bar u}{\left(u-\bar t\right)^2}\left(\frac{2\left(\overline{X(t)}-X(u)\right)}{u-\bar t}+\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}+\frac{u}{X(u)}\right)\right]\right\}\right\},$$

$$M(u,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\bar u-\bar t}+\frac{d\bar t}{dt}\frac{t-u}{\left(\bar u-\bar t\right)^2}\right]+\frac{1}{4\pi i}\left\{\frac{1}{X(t)}\frac{\bar u-u}{\bar u-t}\left(\frac{X(t)-\overline{X(u)}}{\bar u-t}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\bar u}{\overline{\overline{X(u)}}}\right)+\frac{1}{\overline{\overline{X(t)}}}\left\{\frac{d\bar t}{dt}\frac{\bar u-u}{\bar u-t}\left(\frac{\bar u}{\overline{\overline{X(u)}}}+\frac{\overline{X(t)}-\overline{X(u)}}{\bar u-\bar t}\right)+\left(1-\frac{d\bar t}{dt}\right)\left(\frac{\overline{X(t)}-\overline{X(u)}}{\bar u-\bar t}+\right.\right.\tag{41}$$

$$\left.+\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}\right)+\left(t-\bar t\right)\frac{d\bar t}{dt}\left[\frac{1}{\bar u-\bar t}\left(\frac{\overline{X(t)}-\overline{X(u)}}{\bar u-\bar t}+\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}\right)+\frac{1}{u-\bar t}\left(\frac{\bar t}{\overline{\overline{X(t)}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}\right)-\frac{\bar t}{\bar t^2-l^2}\left(\frac{\overline{X(t)}-\overline{X(u)}}{\bar u-\bar t}+\frac{\overline{X(t)}-X(u)}{u-\bar t}\right)\right]\right\}\right\}.$$

КІН знайдемо за формулою [9]:

$$k_1^{\pm}-ik_2^{\pm}=2\lim_{x\to\pm l}\left[\sqrt{2\pi\left|x\mp l\right|}\Phi_2(x)\right].\tag{42}$$

Прийнявши до уваги (5), (6), (19), (17), залежність (26) набуде вигляду:

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = 2\sqrt{\pi l}\left\{\left(\Gamma + \frac{\overline{\Gamma'}}{2}\right) \pm \frac{1}{2\pi l}\left\{\int_L \frac{P(x)X(x)dx}{x \mp l} + \frac{1}{2i}\int_{L_1}\left\{2g_1(u)\,\mathrm{Re}\left[\frac{X(u)}{u \mp l}\right]du - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \overline{g_1(u)}\left[\frac{2\,\mathrm{Im}(u)}{\left(\bar{u} \mp l\right)}\left(\frac{\bar{u}}{\overline{X(u)}} - \frac{\overline{X(u)}}{\bar{u} \mp l}\right)\right]d\bar{u}\right\}\right\}\right\}. \quad (43)$$

Нехай у системі координат $O_0 x' y'$ рівняння лінії L_2 задається рівнянням $t' = x' + iy' = \omega(\theta) = \omega(e^{i\theta}),\ \ 0 < \theta \le 2\pi$, де функція $\omega(\xi)$ конформно відображає зовнішність одиничного кола на зовнішність контура L_2 у цій системі координат. Тоді рівняння контура L_2 у цій системі координат Oxy буде мати вигляд:

$$t(\theta) = z_0 + e^{i\beta}\omega(\theta), \qquad 0<\theta \le 2\pi, \qquad z_0 = x_0 + iy_0, \quad (44)$$

$$u(\nu) = z_0 + e^{i\beta}\omega(\nu), \qquad 0<\nu \le 2\pi. \quad (45)$$

В інтегральному рівнянні (22) робимо заміни (28) і (29), у результаті отримаємо:

$$\int_{-\pi+\delta_1}^{\pi-\delta_1}\left[g(\nu)K\left(\nu,\theta\right)d\nu + \overline{g(\nu)}M\left(\nu,\theta\right)d\bar{\nu}\right] = \rho\left(\theta\right), \qquad -\pi + \delta_1 \le \theta \le \pi - \delta_1, \quad (46)$$

де δ_1 – деяке мале число.

$$K\left(\nu,\theta\right) = K\left(u(\nu),t(\theta)\right), \qquad M\left(\nu,\theta\right) = M\left(u(\nu),t(\theta)\right),$$
$$\rho\left(\theta\right) = \rho\left(t(\theta)\right), \qquad g(\nu) = g_1(u(\nu))\omega'(\nu). \quad (47)$$

Рівняння (31) доповнимо умовою:

$$\int_{-\pi+\delta_1}^{\pi-\delta_1} g(\nu)d\nu = 0. \quad (48)$$

Систему інтегральних рівнянь (30), (32) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [2], зробивши в них відповідні заміни та перейшовши до проміжку інтегрування $\left[-1,1\right]$.

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

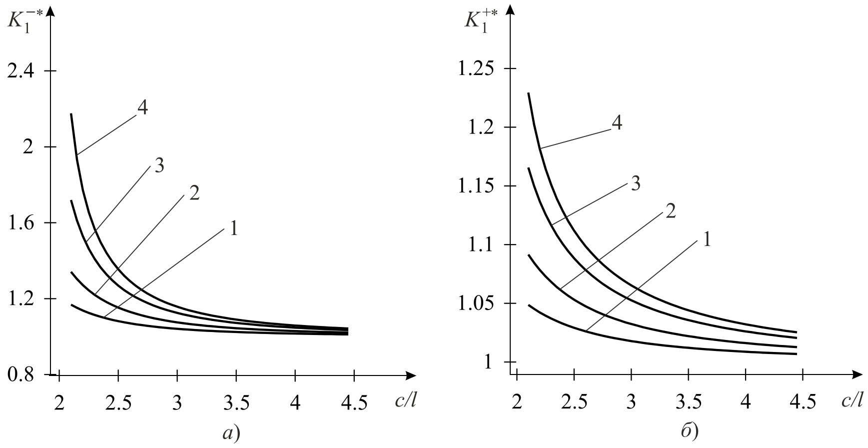


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до c/l

Був проведений числовий аналіз задачі для одновісного розтягу пластини зусиллями p, коли $\alpha = \pi/2$ і $q = 0$, для кругового і еліптичного отворів, коли $y_0 = 0$, а $x_0 = -c$ $(c > 0)$. Функція $\omega(\nu)$ в цьому випадку має вигляд [11]:

$$\omega(\nu) = R(e^{i\nu} + me^{-i\nu}), \qquad R = \frac{1}{2}(a+b), \qquad m = \frac{a-b}{a+b},$$

де a і b – півосі еліпса.

На рис. 3 при взаємодії кругового отвору з тріщиною зображено зведені коефіцієнти інтенсивності напружень (ЗКІН) $K_1^* = k_1/(P\sqrt{\pi l})$ у ближній по відношенню до отвору вершині тріщини (рис. 3 *а*)) та в дальній вершині тріщини (рис. 3 *б*)) від відносної відстані c/l між центром отвору та центром тріщини, причому $\delta_1 = 0.0174$. Крива 1 побудована для $a/l = b/l = 0.5$, крива 2 – для $a/l = b/l = 0.7$, крива 3 – для $a/l = b/l = 0.9$, крива 4 – для $a/l = b/l = 1$. З цього рисунка можна побачити, що при наближенні тріщини до кругового отвору зведені коефіцієнти інтенсивності напружень зростають, а при віддаленні вони прямують до значення зведених коефіцієнтів інтенсивності напружень для ізольованої тріщини. Крім того, ЗКІН зростають при збільшенні розмірів кругового отвору. В часткових випадках числові результати збігаються з результатами із монографією [5], отриманих іншим підходом.

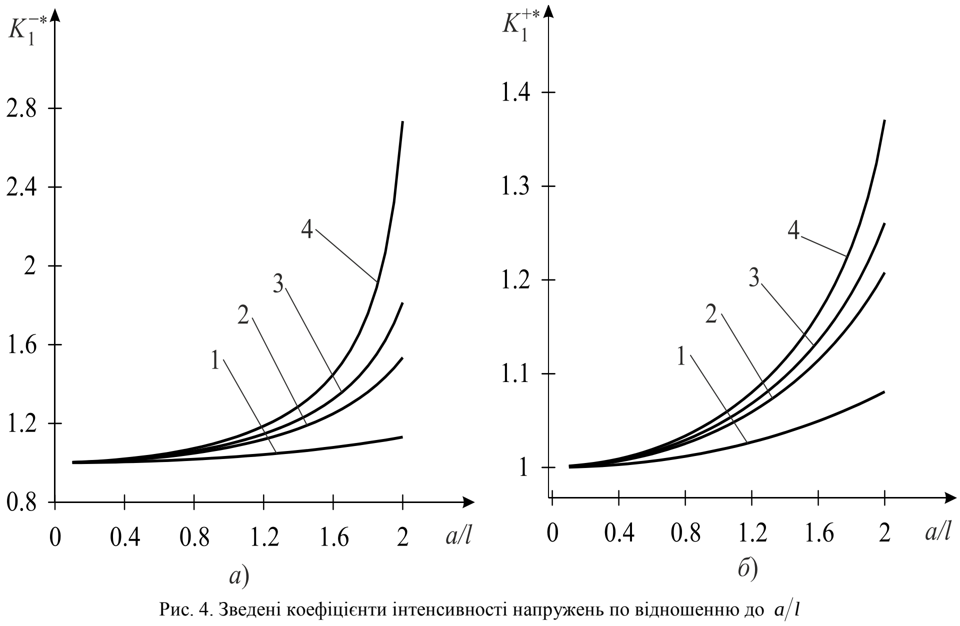


Рис. 4. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до a/l

На рис. 4 подано графічну залежності ЗКІН K_1^* від величини a/l, $b/l = 0.7$, $\delta_1 = 0.0174$. ЗКІН у ближній вершині тріщини по відношенню до отвору подано на рис. 4 *а*), а в дальній вершині тріщини на рис. 4 *б*). Окрім того, крива 1 побудована для $c/l = 5$, крива 2 – для $c/l = 3.5$, крива 3 – для $c/l = 3.3$, крива 4 – для $c/l = 3.1$. Із цього рисунка бачимо, що ЗКІН суттєво залежать від величини c/l та a/l. Чим більша відстань між центрами тріщини та отвору, тим менша величина a/l. ЗКІН прямують до відповідних значень для ізольованої тріщини.

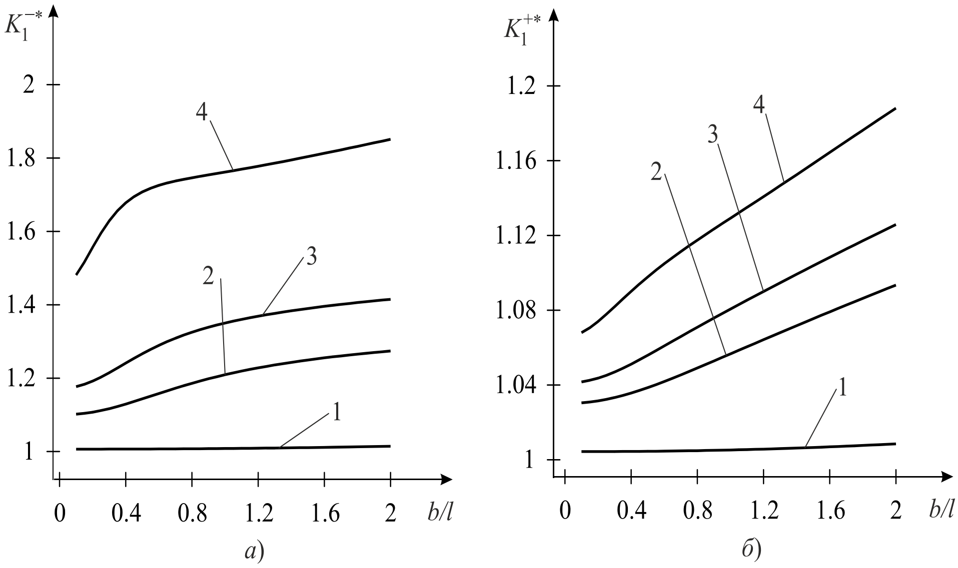


Рис. 5. Зведені коефіцієнти інтенсивності напружень по відношенню до b/l

На рис. 5 зображено ЗКІН у ближній вершині тріщини рис. 5 *а*), – та в дальній – рис. 5 *б*), від відносної величини b/l, при таких параметрах $a/l = 0.5$, а $\delta_1 = 0.0174$. Крива 1 побудована для $c/l = 5$, крива 2 – для $c/l = 2$, крива 3 – для $c/l = 1.8$, крива 4 – для $c/l = 1.6$. З цього рисунка видно, що при збільшенні величини c/l, ЗКІН наближаються до одиниці.

Із рисунків 3-5 видно, що ЗКІН є більші у ближній до отвору вершині тріщини, ніж у дальній, тобто підростання тріщини буде проходити з ближньої вершини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К. : Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Саврук М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук. – К. : Наук. думка, 1989. – 248 с.
4. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К. : Наук. думка, 1983. – 277 с.
5. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. – Донецк : ДонНУ, 2013. – 440 с.
6. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий / А.А. Каминский. – К. : Наук. думка, 1982. – 160 с.
7. Стащук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами / Н.Г. Стащук. – К. : Наук. думка, 1993. – 359 с.

8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Л. : Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.

9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами : справочное пособие. Механика разрушения и прочность материалов / М.П. Саврук. – Т.2. – К. : Наук думка, 1998. – 620 с.

10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. – М. : Мир, 1990. – Т. 1, 2. – 1016 с. (Т. 1 – 429 с.; Т. 2 – 566 с.).

11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

REFERENCES

1. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks], Naukova Dumka, Kiev.

2. Panasyuk, V.V., Savruk, M.P. and Datsishin, A.P. (1976), *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinach i obolochkakh* [Distribution of stresses around cracks in plates and shells], Naukova Dumka, Kiev.

3. *Savruk, M.P*, Osiv, P.N. and *Prokopchuk, I.V.* (1989), *Chislennyi analiz v ploskich zadachakh teorii treshchin* [Numerical analysis in plane problems of the crack theory], Naukova Dumka, Kiev.

4. Kyt, G.S. and Krivcun, M.G. (1983), *Ploskie zadachi termouprugosti dlya tel s treshchinami* [Flat thermoelasticity problem for bodies with cracks], Naukova Dumka, Kiev.

5. Kaloerov, S.A., Avdyushina, Y.V. and Myronenko, A.B. (2013), *Kontsentratsiya napryazheniy v mnogosvyaznykh izotropnykh plastinkakh* [Stress concentration in multiple isotropic plate], DonNU, Donetsk.

6. Kaminskii, *A.A. (1982), Khrupkoe razrushenie* vblizi otverstiy [*Brittle fracture near holes],* Naukova Dumka, Kiev.

7. Staschuk, N.G. (1993), *Zadachi mekhaniki uprugikh tel s treshchinopodobnymi defektami* [Problems of mechanics of elastic bodies with crack-like defect], Naukova Dumka, Kiev.

8. Sulym, G.T. (2007), *Osnovy matematychnoi teorii termopruzhnoi rivnovagy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vklyuchennyamy* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium deformed solids with thin inclusions], Research and Publishing Center of Shevchenko, Lviv.

9. Savruk, M.P. (1988), *Koeffitsienty intensivnisti napryazheniy v telakh s treshchinami: spravochnoe posobie. Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [The stress intensity factors in the bodies with cracks: a handbook. Fracture mechanics and strength of materials], vol. 2, Naukova Dumka, Kiev.

10. Ed. by Y. Murakami (1990), *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy* [Handbook of stress intensity factor], Mir, Moscow.

11. Mushelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ АБО ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ

Попов В. Г., д. ф.-м. н., професор

Одеська національна морська академія,
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна

dr.vg.popov@gmail.com

Розв’язано задачу з визначення напруженого стану при крутильних коливаннях півпростору навколо циліндричних дефектів (тріщина або тонке жорстке включення), які виходять на його поверхню. Метод розв’язання ґрунтується на використанні розривних розв’язків рівнянь крутильних коливань і полягає у зведенні вихідних граничних задач до інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків кутового переміщення або дотичного напруження.
Ключові слова: крутильні коливання, півпростір, циліндр, тріщина, тонке включення, сингулярне інтегральне рівняння.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ИЛИ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Попов В. Г., д. ф.-м. н., профессор

Одесская национальная морская академия,
ул. Дидрихсона, 8, г. Одесса, 65029, Украина

dr.vg.popov@gmail.com

Решена задача по определению напряженного состояния в полупространстве при крутильных колебаниях около цилиндрических дефектов (трещина или тонкое жесткое включение), выходящих на его поверхность. Метод решения основывается на применении разрывных решений уравнения крутильных колебаний и состоит в сведении исходной краевой задачи к интегральным уравнениям относительно неизвестных скачков углового перемещения или касательного напряжения.
Ключевые слова: крутильные колебания, полупространство, цилиндр, трещина, тонкое включение, сингулярное интегральное уравнение.

THE STRESS STATE OF HALF SPACE WITH A CYLINDRICAL CRACK OR THIN INCLUSION UNDER TORSION OSCILLATION

Popov V. G., D.Sc. in Physics and Math., Professor

Odessa national maritime academy,
Didrikson str. 8, Odessa, 65029, Ukraine

dr.vg.popov@gmail.com

Formulated and solved the boundary value problem by definition stress state in elastic half space which contains a thin inhomogeneity (defect) cylindrical form under torsion oscillations formulated and solved. It may be a crack, the surface of which coincides with a circular cylinder or a thin rigid inclusion mid surface coincides with the surface of the cylinder. It is assumed that the defect in the crossing surface, half space, and torsion oscillations occur as a result of axisymmetrical tangential stress of this surface. Because space is only axisymmetrical torsion strain, then you need to determine angular displacement from the appropriate equation. Conditions on the surface defect is determined by its type. In the case of crack is that its surface is free from stresses. In addition to the surface of the crack the angular displacement has discontinues. If the defect is inclusion, it is assumed that between him and half space performed the conditions of perfect coupling. Also on the surface of this inclusion has discontinues, tangential stress. The unknown angle of inclusion torsion is determined from the equation of motion.
The method of the solution the formulated boundary value problems is used of the discontinuous solutions of equations of torsion oscillations. It is the presentation of angular displacement in the form of two terms. The first of them is the discontinuous solution equation for angular displacement whiz jumps on the defects surface. Another term is the solution of the same equation is continuous on the defects surface and such that provides performance of boundary conditions on the surface of half space. After constructing these solutions initials boundary problem obtained to integral equations of the relatively unknown jumps displacements or tangential stress. The singular component of this equation

contains singular integral of Cauchy in the case of crack. When a defect is the inclusion of the resulting equation has a logarithmic singularity. After separating out root singularity of the solutions of these equations it's has been solve numerical by the mechanical kvadrature method. The result of this solution is the approximate formula for stress intensity factor (SIF) and amplitude angle of turn of inclusion.
Using the obtained approximate formulas generated computer study of dependence of dimensionless SIF from undimentional frequency at different ratios between the radius and the length of the defect. Results of the numerical analysis show that there are frequencies which are maximally values SIF. The values of these maxima even more so the more the ratio of the length of the cylinder to its radius. The frequency at which SIF reaches maximum will be the smaller the larger this ratio. In the case of crack maximum values SIF to seven times higher than those observed at static load half space. In the case of inclusion of this excess can reach 40-50 times. Thus in terms of load action on half space harmonic torsion load sharply increases the concentration of stresses around cylindrical defects that going out to the surface. The most powerful hubs stresses are oblong defects, in which experiencing resonant highs value of SIF.
Key words: torsion oscillations, half space, cylinder, crack, thin inclusion, singular integral equation.

ВСТУП

Однією з важливих задач, які виникають при створенні сучасних машин і споруд, є забезпечення їх міцності за наявності в них технологічних дефектів у вигляді тріщин або тонких включень. Проектування конструкцій з урахуванням у них тріщин або тонкостінних включень вимагає використання критеріїв, які визначають граничну рівновагу тіла, що містить вказані дефекти. Один з найпоширеніших таких критеріїв базується на аналізі напруженого стану в околі дефекту за допомогою коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Але теоретичне визначення КІН вимагає розв'язання відповідних граничних задач теорії пружності. Причому ці задачі суттєво ускладнюються у випадку роботи конструкцій в умовах динамічного, зокрема гармонічного, навантаження і дефектів складної форми. Ще більш складними стають ці задачі при розгляді взаємодії дефекту з границею тіла, особливо у випадку виходу дефекту на границю. Тому розв'язки подібних задач сьогодні практично відсутні.

У поданій роботі розв'язується задача з визначення напруженого стану в пружному півпросторі, де знаходиться циліндричний дефект (тріщина або тонке жорстке включення) при крутильних коливаннях. Відомі розв'язки подібних задач у випадку необмеженого тіла. Так задачі рівноваги необмеженого тіла з циліндричною тріщиною розглянуто в [1, 2]. Напружений стан у необмеженому тілі при ударних навантаженнях навколо пів нескінченої тріщини визначено в [3, 4], а навколо циліндричних включень у [5, 6].

ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ

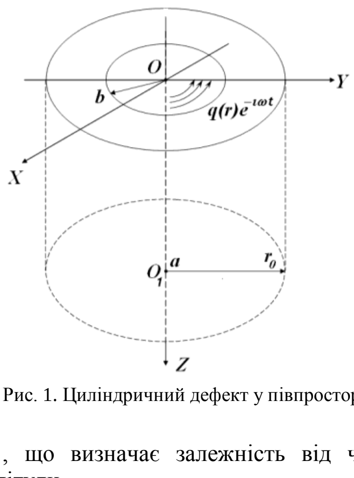


Рис. 1. Циліндричний дефект у півпросторі

Нехай пружний півпростір містить тонку неоднорідність (дефект) циліндричної форми, яка перетинає його поверхню. Це може бути тріщина, поверхня якої співпадає з круговим циліндром $0 \le r \le r_0$, $0 \le z \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 1). Або це тонке жорстке включення, серединна поверхня мало співпадає з поверхнею вказаного циліндра товщини $h \ll a$.

У півпросторі відбуваються крутильні коливання внаслідок дії на поверхню півпростору гармонічного навантаження, зосередженого на крузі $0 \le r \le b$ і інтенсивності $q(r)e^{-i\omega t}$. Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу відкинуто і розглядаються тільки комплексні амплітуди.

Оскільки в півпросторі відбуваються тільки вісесиметрична деформація крутіння, то відмінним від 0 є лише кругове переміщення, яке задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\kappa_2^2 u=0,\quad \kappa_2^2=\frac{\omega^2}{c_2^2},\quad c_2^2=\frac{G_1}{\rho_1}, \tag{1}$$

де G_1, ρ_1 – модуль зсуву і густина матеріалу півпростору, ω – частота коливань. Граничні умови на поверхні півпростору формулюються у вигляді рівності:

$$\tau_{\theta z}(r,0)=\begin{cases} q(r), & 0\le r\le b,\\ 0, & r>b.\end{cases} \tag{2}$$

Умови на поверхні дефекту визначаються його типом. У випадку тріщини вважатимемо, що її береги вільні від напружень, тобто:

$$\tau_{\theta z}(r_0,z)=0,\quad 0\le z\le a. \tag{3}$$

Окрім того, на бічній поверхні тріщини має розрив кутове переміщення, стрибок якого позначимо

$$u(r_0+0,z)-u(r_0-0,z)=\chi_2(z),\quad z\in[0,a]. \tag{4}$$

Якщо дефектом є включення, то вважається, що між ним і півпростором здійснені умови повного зчеплення, з яких випливає рівність:

$$u(r_0,z)=\alpha\cdot r_0,\quad z\in[0,a], \tag{5}$$

де α – невідомий кут повороту включення. Також на поверхні такого включення має розрив дотичне напруження, стрибок якого позначимо:

$$\tau_{\theta r}(r_0+0,z)-\tau_{\theta r}(r_0-0,z)=\chi_1(z),\quad z\in[0,a]. \tag{6}$$

Невідомий кут повороту включення визначається з рівнями руху, який у нашому випадку має вигляд:

$$2\pi r_0^2\int_0^a \chi_1(\eta)\,d\eta=-\alpha\omega^2 I_0, \tag{7}$$

де I_0 – момент інерції включення, що дорівнює:

$$I_0=\frac{\pi\rho_0 r_0^3 ah}{2}\left(4+\varepsilon^2\right), \tag{8}$$

де ρ_0 – густина включення, h – його товщина, $\varepsilon=h/a$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ТРІЩИНИ

Представимо переміщення в півпросторі у вигляді двох складових:

$$u(r,z)=u_0(r,z)+u_1(r,z). \tag{9}$$

Першій доданок є розривним розв'язком рівняння (1) зі стрибком (4) на поверхні тріщини, для якого на поверхні півпростору має виконуватися рівність:

$$\tau_{\theta r}^{\ 1}(r,0)=0,\quad 0\le r<\infty. \tag{10}$$

Другий доданок – це розв'язок рівняння (1), неперервний на поверхні тріщини, і такий, що відповідна складова дотичного напруження:

$$\tau_{\theta r}{}^{0}(r,z) = G\frac{\partial u_0}{\partial z}$$

на поверхні півпростору задовольняє умову (2).

Розв'язок $u_0(r,z)$ легко знаходиться шляхом застосування інтегрального перетворення Ганкеля [7] і визначається формулами:

$$u_\theta^0(r,z) = -\frac{1}{G_1}\int_0^\infty \frac{\lambda Q(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-\kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2-\kappa_2^2}z} I_1(\lambda r)\, d\lambda\,,$$

$$\tau_{rz}^0(r,z) = \int_0^\infty \frac{\lambda^2 Q(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-\kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2-\kappa_2^2}z} I_2(\lambda r)\, d\lambda\,, \qquad (11)$$

де $Q(\lambda)$ – є перетворення Ганкеля функції $q(r)$ з (2), яке дорівнює:

$$Q(\lambda) = \int_0^b rq(r) I_1(\lambda r)\, dr\,. \qquad (12)$$

Розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибком (4), який на поверхні півпростору задовольняє нульові умови (10), може бути легко знайдено, оскільки побудовано такий розв'язок для необмеженого тіла [3, 4]. Отримано формули:

$$u_1(r,z) = -r_0\frac{\partial}{\partial r}\int_0^a \chi_2(\eta)\left[F_{20}(\eta - z, r) + F_{20}(\eta + z, r)\right] d\eta\,;$$

$$\tau_{\theta r}^1(r,z) = -r_0 G_1 \int_0^a \chi_2(\eta)\left[F_{22}(\eta - z, r) + F_{22}(\eta + z, r)\right] d\eta\,; \qquad (13)$$

$$F_{22}(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty q_2(\beta) G_{22}(\beta,r)\cos\beta x\, d\beta\,; \quad F_{20}(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G_{20}(\beta,r)\cos\beta x\, d\beta\,.$$

В останніх формулах використано позначення

$$G_{jl}(\beta,r) = \begin{cases} I_j(q_2 r) K_l(q_2 r_0), & 0 \le r < r_0 \\ I_l(q_2 r_0) K_j(q_2 r), & r > r_0 \end{cases} \qquad (14)$$

$$q_2 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}\,.$$

Отже, формули (9), (11), (13) визначатимуть переміщення і напруження в півпросторі за умови, що визначено невідомий стрибок переміщень $\chi_2(z)$. Для цього слід задовольнити умову (3) на поверхні тріщини. Після підстановки в (3) вищевказаних формул прийдемо до інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень. Після здійснення у цьому рівнянні інтегрування частинами, парного продовження $\chi_2'(z)$ і правої частини на проміжок $z \in [-a, a]$ і введення позначень:

$$\eta = a\tau, \quad z = a\varsigma, \quad \varphi_2(\tau) = \chi_2'(a\tau), \qquad (15)$$

це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2(\tau) L_2(\tau - \varsigma)\, d\tau = f_2(\varsigma), \qquad -1 < \varsigma < 1, \qquad (16)$$

де

$$L_2(Y) = 2\gamma\kappa_0^2 \int_0^\infty \frac{\left(u^2-1\right)}{u} I_2(\kappa_0 p_2) K_2(\kappa_0 p_2) \sin\gamma\kappa_0 uYdu\,, \quad Y = \tau - \zeta\,,$$

$$f_2(\varsigma) = -\frac{\tau_{rz}^0\left(r_0, a|\varsigma|\right)}{G_1} = -\frac{\kappa_2}{G_1}\int_0^\infty \frac{u^2 Q(u\kappa_2)}{p_2} e^{-p_2\kappa\gamma|\varsigma|} I_2(\kappa_0 u)\,du\,;$$

$$p_2 = \sqrt{u^2-1}, \quad \gamma = \frac{a}{r_0}, \quad \kappa_0 = a\kappa_2\,.$$

Для вилучення сингулярної складової ядра інтегрального рівняння (16) слід скористатися асимптотичним розвиненням:

$$I_l(\kappa_0\rho_2) K_l(\kappa_0\rho_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa_0 u} + \frac{A_{1l}}{(\kappa_0 u)^3} + \frac{A_{2l}}{(\kappa_0 u)^5} + O\left((\kappa_0 u)^{-7}\right)\right], \qquad l = 1, 2\,. \tag{17}$$

Це розв'язання отримано за допомогою відомих формул [8] для модифікованих циліндричних функцій. З (17) випливає, що функція, яка визначається вищенаведеним інтегралом, може бути представлена у вигляді:

$$L_2(Y) = \frac{1}{Y} + Q_2(Y), \qquad Q_2(Y) = O\left(Y \ln|Y|\right), \quad Y \to 0\,.$$

За допомогою останньої формули рівняння переписується у вигляді:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_2(\tau)\left[\frac{1}{\tau-\varsigma} + Q_2(\tau-\varsigma)\right] d\tau = f_2(\varsigma), \qquad -1 < \varsigma < 1. \tag{18}$$

До рівняння (18) необхідно додати ще рівність:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_2(\tau)\,d\tau = 0\,, \tag{19}$$

яка випливає з (15) із того, що $\chi_2(a) = 0$.

Наближений розв'язок (18) шукається у вигляді:

$$\varphi_2(\tau) = \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \tag{20}$$

і будується методом, викладеним у [9]. Згідно з цим методом (18), (19) замінюються системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_{2m}\left[\frac{1}{\tau_m - \varsigma_k} + Q(\tau_m - \varsigma_k)\right] = f_{2k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_{2m} = 0\,, \tag{21}$$

де

$\tau_m = \cos\dfrac{\pi(2m-1)}{2n}$, $\quad m = 1, 2, \ldots, n,$ – корені многочлена Чебишева,

$$\varsigma_k=\cos\frac{\pi k}{n},\quad k=1,2,\ldots,n-1,\quad \psi_{2m}=\psi\left(\tau_m\right),\quad f_{2k}=f\left(\varsigma_k\right).$$

Після розв’язання системи (21) функція $\psi_2(\tau)$ у поданні (20) наближається інтерполяційним многочленом:

$$\psi_2\left(\tau\right)\approx\psi_2^{(n-1)}\left(\tau\right),\quad \psi_2^{(n-1)}\left(\tau\right)=\sum_{m=1}^{n}\psi_{2m}\left(\tau\right)\frac{T_n\left(\tau\right)}{\left(\tau-\tau_m\right)T_n'\left(\tau_m\right)}. \tag{22}$$

Для механіки руйнування найбільший інтерес становить коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), який визначається згідно з формулою:

$$K=\sqrt{a}\lim_{\varsigma\to1+0}\sqrt{\varsigma-1}\tau_{\theta r}\left(r_0,a\varsigma\right). \tag{23}$$

Після підстановки у (23) напружень з формули (13) і здійснення граничного переходу за допомогою (20), (22) для наближеного обчислення КІН, отримано формулу

$$K=\frac{G_1\sqrt{a}}{2\sqrt{2}n}\sum_{m=1}^{n}\left(-1\right)^m\psi_{2m}ctg\frac{\gamma_m}{2},\qquad \gamma_m=\frac{\pi\left(2m-1\right)}{2n}. \tag{24}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ

У цьому випадку теж слід використовувати для переміщень подання (9). Але в цьому поданні друга складова має бути розривним розв’язком рівняння (1) зі стрибком напружень (6) на серединній поверхні включення, який задовольняє умову (10) на поверхні півпростору. Оскільки для необмеженого тіла відповідний розривний розв’язок рівняння (1) побудовано [5, 6], то легко знаходимо, що

$$u_1\left(r,z\right)=\frac{r_0}{\pi}\int_0^a\chi_1\left(\eta\right)\left[F_{11}\left(r,\eta-z\right)+F_{11}\left(r,\eta+z\right)\right]d\eta, \tag{25}$$

де

$$F_{11}\left(r,x\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G_{11}\left(\beta,r\right)\cos\beta x d\beta,$$

а $G_{11}\left(\beta,r\right)$ знаходиться з згідно з (14).

Отже, для остаточного визначення переміщення півпростору залишилося знайти невідомий стрибок дотичних напружень на поверхні включення. Для цього з умови (5), що залишилася незадовільненою, після підстановки туди (9), (11) і (25) отримаємо інтегральне рівняння. Це рівняння після парного продовження $\chi_1\left(z\right)$ і правої частини на проміжок $\left[-a,a\right]$ і переходу до позначень:

$$\eta=a\tau,\quad z=a\varsigma,\quad \varphi_1\left(\tau\right)=\frac{\chi_1\left(a\tau\right)}{G_1} \tag{26}$$

наступного вигляду

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^1\varphi_1\left(\tau\right)L_1\left(\tau-\zeta\right)d\tau=\alpha+f_1(\varsigma),-1<\varsigma<1, \tag{27}$$

$$L_1\left(Y\right)=-2\gamma\kappa_0\int_0^\infty I_1\left(\kappa_0p_2\right)K_1\left(\kappa_0p_2\right)cos\left(\gamma\kappa_0uY\right)du,\quad Y=\tau-\varsigma,$$

$$f_1(\varsigma)=\frac{u_\theta^0\left(r_0,a|\varsigma|\right)}{r_0}=-\frac{\kappa_2}{G_1 r_0}\int_0^\infty\frac{u\;Q(u\kappa_2)}{p_2}e^{-p_2\kappa_0\gamma|\varsigma|}I_1(\kappa_0 u)\,du\,.$$

З асимптотичного розвинення (17) і вищенаведеного інтеграла випливає таке представлення для ядра інтегрального рівняння

$$L_1(Y)=\gamma\ln|Y|+Q_1(Y)\,,\;Q_1(Y)=O\left(Y^2\ln|Y|\right),\quad Y\to 0\,.$$

Враховуючи останню формулу, інтегральне рівняння (27) приведемо до вигляду:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\tau)\left[\gamma\ln|\tau-\varsigma|+Q_1(\tau-\varsigma)\right]d\tau=\alpha+f_1(\varsigma)\,. \tag{28}$$

До рівняння (28) необхідно додати рівність для визначення невідомого кута повороту включення, отриману з (7), (8) після переходу до позначень (26)

$$\alpha=-\frac{1}{m_0\kappa_0^2}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\tau)\,d\tau,\quad m_0=\frac{\varepsilon\left(4+\varepsilon^2\right)}{2\overline{\rho}},\quad \varepsilon=\frac{h}{r_0},\quad \overline{\rho}=\frac{\rho_1}{\rho_0}, \tag{29}$$

ρ_1, ρ_0 – відповідно густини півпростору і включення. До цієї рівності перетворюється рівняння (7).

Наближений розв’язок рівняння (28) теж шукається у вигляді (20) і будується аналогічним методом. Згідно з цим методом (28), (29) замінюються такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{1m}\left[\gamma C_{km}+Q_1\left(\tau_m-y_k\right)\right]=\alpha+f_{1k}\,,\;k=1,2,\ldots,n;$$

$$\alpha=-\frac{1}{m_0\kappa_0^2}\sum_{m=1}^{n}a_m\psi_{1m}\,, \tag{30}$$

де $y_k=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k=1,2,\ldots,n$, $f_{1k}=f_1(y_k)$.

При отриманні системи (30) для інтегралу з логарифмічною особливістю використано наступну квадратурну формулу [10]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\ln|\tau-y_k|\,d\tau=\sum_{m=1}^{n}a_m C_{km}\psi_{1m}\,,$$

$$C_{km}=-\ln 2-2\sum_{j=1}^{n-1}j^{-1}\cos\frac{j\pi(2m-1)}{2n}\cos\frac{jk\pi}{n+1}\,.$$

Для оцінки концентрації напружень навколо включень у півпросторі введено до розгляду коефіцієнт при особливості стрибка напружень:

$$K=G_1\sqrt{a}\lim_{\varsigma\to 1+0}\sqrt{\varsigma-1}\varphi_1(\varsigma),$$

який далі називатиметься коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) для включення. Наближене значення цього коефіцієнту може бути обчислено за формулою:

$$K=\frac{G_1\sqrt{a}}{n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\psi_m ctg\gamma_m/2\,. \tag{31}$$

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ

За допомогою отриманих наближених формул (24) і (31) проведене комп'ютерне дослідження почастотної залежності КІН для тріщини і включення при різних співвідношеннях між геометричними розмірами. При проведенні розрахунків припускалося, що навантаження на поверхні півпростору (2) дорівнює:

$$q(r) = G_1 \frac{r}{r_0}.$$

Тоді

$$Q(\lambda) = \frac{G_1 b^2}{\lambda r_0} I_2(\lambda b),$$

а праві частини в рівняннях (16), (27) мають вигляд:

$$f_2(\varsigma) = -\kappa_0 b_0^2 \int_0^\infty \frac{u}{\rho_2} e^{-\gamma\kappa_0\rho_2|\varsigma|} I_2(\kappa_0 b_0 u) I_1(u\kappa_0)\, du,$$

$$f_1(\varsigma) = b_0^2 \int_0^\infty \frac{1}{\rho_2} e^{-\gamma\kappa_0\rho_2|\varsigma|} I_2(\kappa_0 b_0 u) I_1(u\kappa_0)\, du, \; b_0 = \frac{b}{r_0}.$$

На рис. 2 і рис. 3 показано графіки залежності від безрозмірного хвильового числа κ_0 величини $k = |K| / |K_{cm}|$, де K_{cm} – значення КІН, що відповідає аналогічному статичному навантаженню. При розрахунках вважалось, що $b_0 = b / r_0 = 0.5$, а $\varepsilon = \varepsilon / h = 0.05$. Кожна крива на цих рисунках відповідає вказаному значенню відношення геометричних розмірів дефекту $\gamma = a / r_0$.

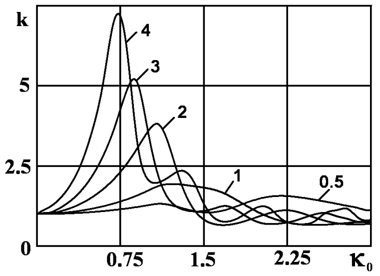


Рис. 2. Залежність безрозмірного КІН від безрозмірного хвилевого числа у випадку тріщини

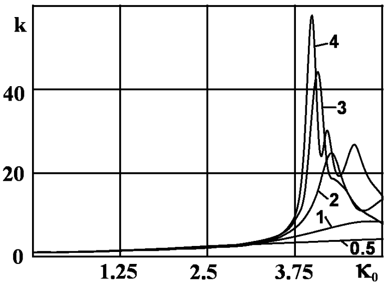


Рис. 3. Залежність безрозмірного КІН від безрозмірного хвилевого числа у випадку тріщини

Графіки на рис. 2 побудовано для тріщини. Усі криві показують наявність максимуму відносного значення КІН. Величина цього максимуму буде більшої навколо циліндрів витягнутої форми. Частота, за якої КІН сягає максимуму, буде тим меншою, чим більша відносна довжина циліндра. На рис. 3 показана зміна КІН при зростанні хвильового числа у випадку, коли дефектом є включення. Тут теж спостерігається наявність частот, при яких КІН набуває максимуму, причому для витягнутих включень цей максимум має характер резонансу. В точках максимуму спостерігається перевищення статичного значення КІН у 40-50 разів.

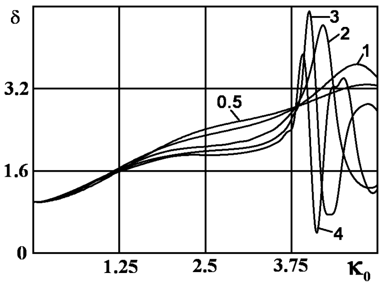


Рис. 4. Залежність амплітуди кута повороту від безрозмірного хвилевого числа.

Також дослідження залежить від хвильового числа відносно кута повороту включення $\delta = |\alpha| / |\alpha_{cm}|$, де α_{cm} – кут повороту при статичному навантаженні. Відповідні графіки показано на рис. 4. Можна бачити, що при тих частотах, коли КІН сягає максимуму, спостерігається і максимум δ. Але потім відбувається швидке спадання амплітуди кута повороту до мінімуму.

ВИСНОВКИ

Методом розривних розв'язків розв'язані вісесиметрічні задачі визначення концентрації напружень навколо циліндричних дефектів у пружному півпросторі при крутильних коливаннях. Показано, що в умовах дії на півпростір гармонійного крутильного навантаження різко збільшується концентрація напружень навколо циліндричних дефектів, що виходять на поверхню, порівняно з аналогічним статичним навантаженням. Встановлено існування частот, при яких значення КІН сягають максимуму. Величина цих максимумів тим більша, чим більше відношення довжини дефекту до його радіусу. Частота, за якою КІН сягає максимуму, буде тим меншою, чим більше це відношення. Найбільш сильними концентраторами напружень є витягнуті дефекти, за яких спостерігаються резонансні максимуми значення КІН. У випадку тріщини максимальні значення КІН до семи разів перевищують ті, що спостерігаються при дії статичного навантаження на поверхню півпростору. Якщо дефектом є тонке жорстке включення, то це перевищення може сягати 40-50 разів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, В.И. Сметанин, Б.В. Соболь. – М. : Наука, 1993. – 234 с.
2. Попов Г. Я. К решению задач о концентрации упругих напряжений возле цилиндрических дефектов / Г.Я. Попов, Б.К. Кебли // Прикладная механика. – 1997. – 33, №10. – С. 67-73.
3. Попов Г. Я. О коэффициенте интенсивности касательных напряжений у края полубесконечной трещины при ударном нагружении у края полубесконечной трещины при ударном нагружении ее берегов / Г.Я. Попов, Ю.А. Морозов, А.В. Усов // Проблемы прочности. – 1999. – №3. – С. 63-72.
4. Морозов Ю. А. Задача про концентрацію напружень біля напівнескінченої циліндричної тріщини / Ю.А. Морозов, Г.Я. Попов // Машинознавство. – 1999. – №5. – С. 28-32.
5. Попов В. Г. Взаимодействие гармонической волны кручения с тонким жестким цилиндрическим включением / В.Г. Попов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – №5. – С. 75-81.
6. Попов В. Г. Дослідження концентрації напружень в околі включення у вигляді скінченої циліндричної оболонки під дією хвилі кручення / В.Г. Попов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 29-34.
7. Попов Г. Я. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень / Г.Я. Попов, В.В. Реут, Н.Д. Вайсфельд. – Одеса, 2005. – 184 с.
8. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1974. – 275 с.

9. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, електродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
10. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З.Т. Назарчук. –К. : Наукова думка, 1989. – 256 с.

REFERENCES

1. Aleksandrov, V.M., Smetanin, V.I. and Sobol, B.V. (1993), *Tonkiye koncetratory napryageniy v uprugikh telakh* [The thin concentrators of stresses in the elastic bodies], Nauka, Moskow, Russia.
2. Popov, G.Ya. and Kebli, B.K. (1997), "For solve of the problems about stress concentration near cylindrical defects", *Prikladnaya mechanika*, vol. 33, no. 10, pp. 67-63.
3. Popov, G.Ya., Morozov, Y.A. and Usov, A.V. (1999), "About the stress intensive factor of the tangential stress near edge of semi-infinity cylindrical crack under shock loaded its banks", *Problemy prothnosti*, no. 3, pp. 63-72.
4. Morozov, Y.A. and Popov, G.Ya (1999), "The problem about stress concentration near semi-infinity cylindrical crack", *Mashinoznavstvo*, no. 5, pp. 28-32.
5. Popov, V.G. (2004), "Interaction harmonic torsion waves with thin hard cylindrical inclusion", *Izvestiya RAN*, *Mechanica tverdogo tela*, no. 5, pp. 75-81.
6. Popov, V.G. (2007), "Analysis of stress concentration near inclusion in the form of finite cylindrical shell under action of torsion wave", *Mathematical method and physicomechanical fields* , vol. 50, no. 2, pp. 29-34.
7. Popov, G.Ya., Reyt, V.V. and Vaysfeld, N.D. (2005), *Rivnyannya matematychnoi fizyky. Metod integralnych peretvoren* [Mathematical physic equations. Integral transformation method], Odessa, Ukraine.
8. Bateman, H. and Erdeyi, A. (1974), *Vyshiye transcendentnye funkcii* [Higher transcendental functions], Nauka, Moskow, Russia.
9. Belotcerkovskiy, S.M. and Lifanov, I.K. (1985), *Thislennye metody v singularnych integralnych uravneniyach I yich primeneniye v aerodinamike, teoriy uprugosti, electrodinamike* [Numerical methods for singular integral equation and its application to фerodynamics, theory of elasticity, electrodynamics], Nauka, Moskow, Russia.
10. Nazarchuk, Z.T. (1989), *Thislennoe issledovaniye difrarciy voln na cilindritheskich strukturach* [Numerical analysis of diffraction waves by cylindrical structure], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

УДК 539.376

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Пошивалов В. П., д. т. н., профессор, Дояр И. А.

Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, Днепропетровск, 49600, Украина

vposhivalov@gmail.com, kosmik90@mail.ru

Разработан подход к прогнозированию долговечности конструкционных материалов при неизотермической ползучести в условиях одноосного стационарного нагружения. Построена стохастическая модель длительной прочности. Предложен метод идентификации констант ползучести материала. Разработано программное

обеспечение для реализации стохастической модели и проведены расчеты по экспериментальным данным, подтверждающие адекватность построенной модели.
Ключевые слова: разрушение, неизотермическая ползучесть, поврежденность материала, время до разрушения, среднеквадратическое отклонение времени до разрушения.

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ РУЙНУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НЕІЗОТЕРМІЧНІЙ ПОВЗУЧОСТІ

Пошивалов В. П., д. т. н., професор, Дояр І. А.

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України,
вул. Лешко-Попеля, 15, Дніпропетровськ, 49600, Україна

vposhivalov@gmail.com, kosmik90@mail.ru

Розроблено підхід до прогнозування довговічності конструкційних матеріалів при неізотермічній повзучості в умовах одноосьового стаціонарного навантаження. Побудована стохастична модель довготривалої міцності. Запропоновано метод ідентифікації констант повзучості матеріалу. Розроблено програмне забезпечення для реалізації стохастичної моделі й проведені розрахунки за експериментальним даними, які підтверджують адекватність побудованої моделі.
Ключові слова: руйнування, неізотермічна повзучість, пошкодження матеріалу, час до руйнування, середньоквадратичне відхилення часу до руйнування.

STOCHASTIC MODEL OF DESTRUCTION OF CONSTRUCTIONAL MATERIALS AT ANISOTHERMIC CREEP

Poshivalov V. P., D. of Technical Science, Professor, Doyar I. A.

Institute of Technical Mechanics of NAS of Ukraine and HCA,
Lesco-Popiel str., 15, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

vposhivalov@gmail.com, kosmik90@mail.ru

The paper presents the model for forecasting the structural material life in creep under one-axial steady-state loading with consideration for variations in the temperature.
An exponential dependence of the strain rate and a structural parameter of failure on stresses and an exponential dependence on temperature are taken, respectively.
In building the stochastic failure model in creep it is assumed that part of parameters for the equations of creep and long-term strength are deterministic values and another part presents normally distributed random values. In so doing, strain hardening at the first stage of creep is ignored.
All unknown constants for the equation of creep and long-term strength are identified.
It is shown that for building the stochastic model it is required to have the following experimental data at fixed temperatures and stresses: the rate of steady-state creep at an initial moment, time to failure, the value of the creep strain at the failure moment.
Using the method of multiple linear regression on known experimental values of these magnitudes, parameters for equations of creep and long-term strength are evaluated at fixed stresses and temperatures.
The technique for determining the function of disturbance of time to failure for an arbitrary pair of data- the stress and temperature- is proposed.
To test this approach for goodness of fit, the theoretical results are compared with the experiments on failure of samples from copper and aluminum alloy in creep at different levels of stress and temperature.
Plots of the distribution function and the distribution density in combination with the frequency histogram of the random value characterizing time to failure of aluminum samples at the stress of 45 MPa and temperature of 573ºC are presented.
It is shown that 1) the theoretical results are in good agreement with the experimental data both on time to failure and on standard deviation; 2) linear and non-linear models can be used as parametric dependencies of distribution; 3) the approach proposed can be employed for forecasting materials life in a wide range of variations in stresses and temperatures.
Key words: destruction, non-isothermal creep damaged material, time to failure, the standard deviation of the time to failure.

ВВЕДЕНИЕ

Эксплуатация многих ответственных изделий энергетического, химического и атомного машиностроения происходит под воздействием высоких температур и больших напряжений.

Для оценки ресурса и остаточного ресурса таких конструкций необходимо давать как можно более точные прогнозные оценки времени безотказной работы.

В настоящее время существует ряд подходов к решению этой задачи, которые базируются либо на статистической обработке экспериментальных данные по разбросу времени до разрушения, либо на построении простейших вероятностных моделей, учитывающих вероятностный характер разрушения при ползучести.

Прогнозирование времени до разрушения материалов, основанное на полученных экспериментальных данных, позволяет решить задачу увеличения сроков службы ответственных изделий, как на стадии проектирования при назначении ресурсных показателей, так и в процессе их эксплуатации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе предложен подход, который позволяет прогнозировать долговечность конструкционных материалов при ползучести в условиях одноосного стационарного нагружения с учетом изменения температуры.

Принимаем степенную зависимость для скорости деформации ползучести $\dot{\varepsilon}$ и структурного параметра поврежденности $\dot{\omega}$ от напряжения и экспоненциальную зависимость от температуры соответственно [1, 2]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{a \cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right) \cdot \sigma^n}{(1-\omega)^n}, \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = \frac{b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m}{(1-\omega)^l}, \tag{2}$$

где σ – напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения образца; T – температура; a, b, n, m, l, p, h – константы ползучести материала. Параметры h и p зависят соответственно от универсальной газовой постоянной и от энергии активации ползучести и поврежденности материала в процессе ползучести [3].

Считаем, что значение $\omega = 0$ соответствует неповреждённому материалу, а $\omega = 1$ – появлению в материале макроскопической трещины, ведущей к разрушению.

Пренебрегаем деформационным упрочнением, имеющим место на первой стадии ползучести.

Будем считать параметры n, m, l детерминированными величинами, а параметры a, b – нормально распределенными случайными величинами.

Проинтегрировав соотношения (1) и (2), в предположении, что напряжение и температура постоянны, получим выражения для деформации ползучести и параметра поврежденности в виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{a \cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{b \cdot (n-l-1)} \left\{ \left[1-(l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \cdot t \right]^{\frac{l-n+1}{l+1}} -1 \right\}. \tag{3}$$

$$\omega(t) = 1 - \left[1-(l+1) \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \cdot t \right]^{\frac{1}{l+1}}. \tag{4}$$

Время до разрушения t_p находим из соотношения (4) как решение уравнения $\omega\left(t_p\right)=1$

$$t_p = \frac{1}{\left[\left(l+1\right)\cdot b\cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right)\cdot \sigma^m\right]}. \tag{5}$$

Для построения стохастической модели разрушения при ползучести необходимо провести идентификацию всех неизвестных постоянных, входящих в соотношения (1) и (2).

Будем считать, что имеются данные N экспериментов на длительную прочность при напряжении σ_e и температуре T_e, такие, как: $\dot{\varepsilon}_{0e}$ – скорость установившейся ползучести в начальный момент времени; t_{pe} – время до разрушения; $\varepsilon_{t_{pe}}$ – деформация ползучести в момент разрушения (индекс e означает, что данные получены по результатам эксперимента).

Как показано в работе [4], на участке установившейся ползучести можно считать справедливым следующее соотношение:

$$\dot{\varepsilon}_0 = a\cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right)\cdot \sigma^n, \tag{6}$$

где $\dot{\varepsilon}_0$ – скорость установившейся ползучести в начальный момент времени.

Прологарифмируем равенство (6)

$$\ln \dot{\varepsilon}_0 = \ln a + n\cdot \ln\sigma - \frac{h}{T}. \tag{7}$$

Используя метод множественной линейной регрессии по известным экспериментальным значениям $\dot{\varepsilon}_{0e}$, σ_e, T_e, найдём соответственно оценки $\hat{a}$, $\hat{n}$, $\hat{h}$ параметров a, n и h [5].

Считаем, что $n=\hat{n}$, $h=\hat{h}$.

Из соотношения (6) получим выборочный вектор a

$$a = \left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_{0e_i}}{\sigma_{ei}^n \cdot \exp\left(-\frac{h}{T_{ei}}\right)}, i=\overline{1,N} \right\}. \tag{8}$$

Деформацию в момент разрушения найдём из соотношения (3), подставив $t=t_p$

$$\varepsilon_{t_p} = \varepsilon\left(t_p\right) = -\frac{a\cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right)\cdot \sigma^{n-m}}{b\cdot\left(n-l-1\right)}. \tag{9}$$

С учетом равенства (5) получим:

$$\varepsilon_{t_p} = \frac{\left(l+1\right)}{\left(l+1-n\right)}\cdot a\cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right)\cdot \sigma^n t_p. \tag{10}$$

Из равенства (10) определим параметр l, который характеризует кривизну третьей стадии ползучести

$$l = n - 1 + \frac{n}{\dfrac{\varepsilon_{t_p}}{a \cdot \exp\left(-\dfrac{h}{T}\right) \cdot \sigma^n \cdot t_p} - 1}. \quad (11)$$

Оценку параметра l найдём как

$$\hat{l} = \sum_{i=1}^{n} l_i, \quad (12)$$

где $l_i = n - 1 + \dfrac{n}{\dfrac{\varepsilon_{t_{pei}}}{a \cdot \exp\left(-\dfrac{h}{T_{ei}}\right) \cdot \sigma_{ei}^n \cdot t_{pei}} - 1}$ значение параметра l в эксперименте с номером i.

Далее считаем, что $l = \hat{l}$.

Прологарифмируем равенство (5)

$$\ln t_p = -m \cdot \ln\sigma + \frac{p}{T} - \ln(l+1) \cdot b. \quad (13)$$

Считаем, что $m = \hat{m}$, $p = \hat{p}$.

Из соотношения (13) получим выборочный вектор b

$$b = \left\{ \frac{1}{(l+1) \cdot t_{pei} \cdot \exp\left(-\dfrac{p}{T_{ei}}\right) \cdot \sigma_{ei}^m}, \quad i = \overline{1,N} \right\}. \quad (14)$$

Для каждой пары данных σ, T (напряжение – температура) находим несмещенные и состоятельные оценки математического ожидания $\hat{\mu}_b$ и дисперсии $\hat{d}_b$ случайной величины b [6]:

$$\hat{\mu}_b = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} b_i, \quad (15)$$

$$\hat{d}_b = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K} \left(b_i - \hat{\mu}_b\right)^2, \quad (16)$$

где K – количество элементов выборки b, которая соответствует заданным σ, T.

Считаем, что $\mu_b = \hat{\mu}_b$, $d_b = \hat{d}_b$.

Найдем зависимости параметров распределения μ_b, d_b от напряжения σ и температуры T.

Рассмотрим два вида зависимостей:

линейную

$$\mu_b = a_{0\mu} \cdot \sigma + a_{1\mu} \cdot T + a_{2\mu}, \quad (17)$$

$$d_b = a_{0d} \cdot \sigma + a_{1d} \cdot T + a_{2d} \quad (18)$$

и нелинейную

$$\mu_b = a_{0\mu} \cdot \sigma^2 + a_{1\mu} \cdot \sigma \cdot T + a_{2\mu} \cdot T^2 + a_{3\mu} \cdot \sigma + a_{4\mu} \cdot T + a_{5\mu}, \quad (19)$$

$$d_b = a_{0d} \cdot \sigma^2 + a_{1d} \cdot \sigma \cdot T + a_{2d} \cdot T^2 + a_{3d} \cdot \sigma + a_{4d} \cdot T + a_{5d}, \quad (20)$$

где $a_{i\mu}$, a_{jd}, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ – неизвестные коэффициенты.

Применяя метод множественной линейной регрессии, найдём оценки неизвестных коэффициентов в соотношениях (17), (18), (19) и (20).

Считаем, что коэффициенты $a_{i\mu}$, a_{jd}, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,5}$ равны своим оценкам.

В этом случае определение распределения времени до разрушения t_p по произвольной паре данных σ, T сводится к следующему.

1. В соответствие с предложенным выше подходом по известным экспериментальным данным σ_e, T_e, $\dot{\varepsilon}_{0e}$, t_{pe}, $\varepsilon_{t_{pe}}$ находятся оценки параметров n, m, l, p, h для модели (1) и (2).
2. Из соотношений (17)-(18) или (19)-(20) определяются параметры распределения μ_b, d_b случайной величины b.
3. Распределение времени до разрушения t_p определяется из равенства (5) по заданному распределению $N(\mu_b, d_b)$ случайной величины b.

Общий вид функции распределения случайной величины t_p будет иметь вид:

$$F_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \int\limits_0^{\frac{1}{x \cdot (l+1) \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right)}} f_b(t)dt, & x > 0 \end{cases} \quad (21)$$

где $f_b(t)$ – плотность распределения случайной величины b.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для проверки адекватности предложенного подхода воспользуемся результатами испытаний на ползучесть образцов из меди и алюминиевого сплава при разных уровнях напряжения и температуры, которые приведены в работе [7].

Поскольку в ряде серий испытаний отдельные экспериментальные данные имеют характер случайных выбросов, то воспользуемся методом исключения таких данных из рассмотрения [8].

Данные экспериментов и результаты расчетов приведены в таблице 1. Здесь t_p – экспериментально определенное время до разрушения, $[t_p]$, σ_{t_p} – теоретическое среднее и среднеквадратическое отклонение времени до разрушения, а $\overline{[t_p]}$, $\overline{\sigma_{t_p}}$ – эмпирическое среднее и среднеквадратическое отклонение времени до разрушения соответственно.

На рисунках 1 и 2 представлены соответственно графики функции распределения и плотности распределения вместе с частотной гистограммой случайной величины t_p при напряжении $\sigma = 45$ МПа и температуре $T = 573^\circ C$.

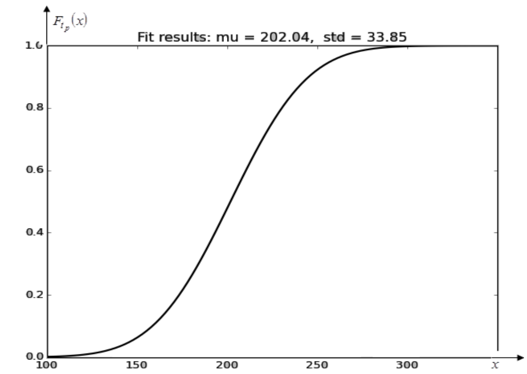


Рис. 1

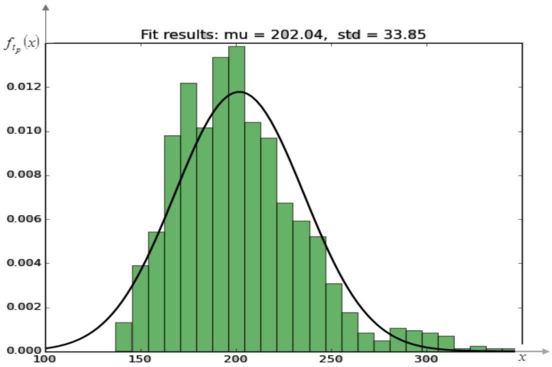


Рис. 2

Таблица 1 – Теоретические и расчетные значения основных вероятностных характеристик распределения времени до разрушения

σ, МПа	T, ºC	$\overline{[t_p]}$	$\overline{\sigma_{t_p}}$	t_p, час	Линейная модель		Нелинейная модель	
					$[t_p]$	σ_{t_p}	$[t_p]$	σ_{t_p}
70	523	229,33	28,70	254 234 200	229,57	28,43	229,61	22,68
45	573	199,66	40,41	160 227 212	202,82	38,14	202,04	33,85
300	423	363,29	51,21	330 384 399 330 463 334 303	361,14	69,82	361,75	47,99
200	473	35,34	7,72	24,8 35,3 46,6 34,6	35,58	5,96	35,39	9,79

ВЫВОДЫ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными как по времени до разрушения, так и по среднеквадратическому отклонению;

– в качестве зависимостей параметров распределения случайной величины *b* от напряжения и температуры можно использовать как линейную, так и нелинейную модели, так как выбор зависимости несущественно влияет на результаты расчетов;

– при заданных произвольных значениях напряжения и температуры по предложенному подходу можно найти распределение времени до разрушения, что делает данный подход применимым для прогнозирования долговечности материалов в широком диапазоне изменения напряжений и температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
2. Пошивалов В. П. Об одном подходе к определению времени до разрушения в условиях ползучести / В.П. Пошивалов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1993. – №3. – С. 56-60.
3. Гораш Е. Н. Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин / Е.Н. Гораш, С.В. Лысенко, Г.И. Львов // Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин : сборник научных трудов. – №21. – 2006. – ISSN 2078-9130. – С. 75-88.
4. Локощенко А. М. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении / А.М. Локощенко, С.А. Шестериков // Журнал прикл. механики и технич. физики. – 1980. – №3. – С. 155-159.
5. Ширяев А. Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М., 1980. – 574 с.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.
7. Kowalewski Z. L. Creep analysis of M1E copper and PA6 aluminum alloy subjected to prior plastic deformation / Z.L. Kowalewski // Journal of theoretical and applied mechanics. – 2005. – Vol. 43, No. 2. – P. 241-256. – ISSN: 1429-2955.
8. Локощенко А. М. Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом корректировки результатов испытаний / А.М. Локощенко, А.И. Мартыненко, Д.О. Платонов // Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении : тез. докл. II Междунар. науч.-техн. конф. (25-27.05.2004, Киев). – К. : ИПП НАНУ, 2004. – С. 119-121.

REFERENCE

1. Rabotnov, Yu.N. (1966), *Polzuchest' elementov konstruktsiy* [Creep of Structural Members], Nauka, Moscow.
2. Poshivalov, V.P. (1993) “An approach to determination of time to failure in creep”, *Problemy Mashonostroyeniya i Nadezhnosti Mashin*, no. 3, pp. 56-60.
3. Gorash, Ye.N., Lysenko, S.V. and Lvov, G.I. (2006), “Non-isothermal creep and damage of elements of steam turbines” *Vestnik NTU “KhPI”, Collected Papers: Dynamics and Strength of Machines*, no. 21, pp. 75-88, ISSN 2078-9130.
4. Lokoshchenko, A.M. and Shesterikov, S.A. (1980), “Procedure for describing creep and long-term strength in pure tension”, *Zhurnal Prikladnoy Mekhaniki i Tekhnicheskoy Fiziki*, no. 3, pp. 155-159.

5. Shiryaev, A.N. (1980), *Veroyatnost'* [Probability], Moscow.
6. Levin, B.R. (1989), *Teortticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhiki* [Theoretical Fundamentals of Statistical Radio Engineering], Radio i Svyaz, Moscow.
7. Kowalewski, Z.L. (2005), "Creep analysis of M1E copper and PA6 aluminum alloy subjected to prior plastic deformation", *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 43, no. 2, pp. 241-256, ISSN: 1429-2955.
8. Lokoshchenko, A.M., Martynenko, A.I. and Platonov, D.O. (2004), "Analysis of criteria of long-term strength in complex tension with consideration for correction of test results", *Proceedings of II International Conference on Problems of Dynamics and Strength for Gas Turbine Manufacture*, 25-27 May, 2004, Kiev, pp. 119-121.

УДК 534.1:539.3

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Сметанкіна Н. В., д. т. н., провідний науковий співробітник

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Дм. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна

nsmetankina@yandex.ru

Запропоновано метод дослідження нестаціонарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оболонок досліджується в рамках теорії першого порядку. Теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, нестаціонарні коливання, удар.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Сметанкина Н. В., д. т. н., ведущий научный сотрудник

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,

ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина

nsmetankina@yandex.ru

Предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистых незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомых функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках теории первого порядка. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, нестационарные колебания, удар.

MODELLING OF VIBRATIONS OF LAMINATED CYLNDRICAL SHELLS OF A COMPLEX SHAPE AT IMPACT LOADING

Smetankina N. V., D. Sc. in Engineering, Leading Research Associate

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine,

Dm. Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

nsmetankina@yandex.ru

Laminated structures are advantageous as compared with homogeneous ones. Hence, they are used widely in mechanical engineering. Calculating dynamic response parameters for impact loading is a key effort in analysing vibrations of composite structures.

A review of recent studies shows that numerical methods are used widely to analyse nonstationary vibrations of laminated structures subjected to impact loads. The finite element method is used most often. The analytical solution of these problems is given only for laminated plates and shells with a canonical plan-view shape. The paper suggests an analytical approach to investigating vibrations of a laminated shellwith a complex shape in plan view under impact loading.

A constant-thickness non-closed cylindrical laminated shell is considered. It comprises isotropic layers with constant thickness and various physical and mechanical properties. The number of layers and their layout is arbitrary. In the coordinate surface, it occupies the complex domain limited by boundary Γ. An indenter with a semispherical end of impacts the outer surface of the shell's first layer. The indenter is dropped onto the shell from some height. Contact approach is found by solving Hertzian problem on ball indentation into an elastic semispace.

The behaviour of a laminated shell is described by the first-order theory accounting for transverse shear strain, thickness reduction and normal element rotation inertia in each layer. The equations of motion of a laminated shell affected by impact load, well as the respective boundary conditions on boundary Γ are derived by Hamilton's variational principle. The problem of investigating nonstationary vibrations of a laminated shell subjected to an impact load is reduced to integrating a system of motion equations for a shell with account of boundary conditions jointly with the indenter equation of motion and the condition of joint displacement of the indenter and shell.

The analytical solution of the problem is obtained by the immersion method. According to this method, a non-closed cylindrical laminated shell is immersed into an auxiliary enveloping cylindrical shell with the same composition of layers. It is loaded within domain Ω similar to that for the primary shell. An auxiliary shell is one whose contour shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. In this case, the auxiliary shell is a simply supported non-closed cylindrical laminated with rectangular plan-view shape, allowing to find the problem solution as trigonometric series.

To satisfy actual boundary conditions, additional distributed compensating loads, the intensity of which are to be found, are applied to the auxiliary shell over the boundary Γ. The compensating loads appear in the motion equations as curvilinear distributions. Based on the condition of satisfying boundary conditions on the boundary Γ, we form a system of integral equations for determining the intensities of compensating loads. Displacements and loads are expanded in the auxiliary shell domain in trigonometric series for functions satisfying simply supported conditions. The compensating loads are expanded into a series along the boundary Γ. Hence, the system of integral equations is transformed to a system of algebraic equations with respect to the expansion coefficients of the compensating loads. The system of motion equations jointly with the equation of motion of the indenter is integrated by a method of expanding the solution into Taylor's series.

The method potentialities are demonstrated by calculating the strains and stresses in non-closed cylindrical five-layer shells. Experiments are based on the dynamic wide-range strain measurement technique. A good match of theoretical and experimental results confirms the feasibility and effectiveness of the method offered. The developed approach can be easily extended to impulse loading and impact applied to shells of complex shape in plan view with arbitrary boundary conditions.

Key words: laminated shell, complex shape, non-stationary vibrations, impact.

1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Шаруваті оболонки є одними з основних конструктивних елементів різноманітних конструкцій та приладів, які можуть піддаватися інтенсивним динамічним навантаженням [1, с. 3; 2, с. 290].

Найпоширенішими методами дослідження динамічної поведінки шаруватих оболонок складної форми є чисельні методи, наприклад, методи скінченних та граничних елементів. Теоретичні методи менш розроблені, що пов'язано зі складністю математичних моделей, які описують процес деформування таких оболонок при інтенсивних короткочасних впливах. Для розрахунку напружено-деформованого стану оболонок складної форми в плані також застосовуються методи, засновані на прийомі використання відомих аналітичних розв'язків у простих областях для одержання розв'язків в областях складних конфігурацій, наприклад, метод контурних рядів [3, с. 219]. Але найчастіше за допомогою цих методів розв'язуються задачі про статичне деформування та вільні коливання однорідних оболонок. Питання нестаціонарної динаміки шаруватих оболонок залишаються недостатньо вивченими, що потребує подальшого розвитку та удосконалення методів розрахунку таких оболонок.

2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій. У статті [4, с. 218] за допомогою методу скінченних елементів розглянуті шаруваті кругові пластини при ударному впливі.

Встановлено, що такі пластини мають більш високий опір удару, ніж монолітні пластини рівної маси. Результати скінченно-елементного моделювання добре погоджуються з експериментальними даними.

У роботі [5, с. 1673] запропоновано аналітичну модель ударної взаємодії ударника та шаруватих шарнірно опертих прямокутних панелей. Переміщення, напруження та деформації в шарах обчислювалися методом скінченних елементів.

У статті [6, с. 395] досліджено перехідні процеси в шарнірно опертих шаруватих композитних циліндричних та сферичних оболонкових панелях при низькошвидкісному ударі в гідротеплових середовищах. Скінченно-елементний аналіз проведено в рамках геометрично нелінійної теорії. Модель зіткнення заснована на модифікованому контактному законі Герца.

3. НЕВИРІШЕНІ ПРОБЛЕМИ ТА ЦІЛІ СТАТТІ

Аналіз наведених робіт дозволяє зробити висновок, що для дослідження нестаціонарних коливань шаруватих конструкцій при ударному навантаженні найчастіше використовуються чисельні методи, а саме, метод скінченних елементів. В аналітичному вигляді розв'язок таких задач одержано тільки для шаруватих пластин і оболонок канонічної форми в плані. Отже, розробка методів розв'язання задач нестаціонарної динаміки шаруватих оболонок зі складною формою плану, що дозволяють подати розв'язок в аналітичній формі, є актуальним питанням.

У статті [7, с. Р. 051004-5] розглянуто задачу про нестаціонарні коливання шаруватої пластини складної форми в плані при ударному навантаженні. У цій роботі запропоновано метод розв'язання задачі про нестаціонарні коливання шаруватих незамкнених циліндричних оболонок складної форми в плані, який дає можливість одержати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ШАРУВАТОЇ ОБОЛОНКИ

Розглядається шарувата незамкнена циліндрична оболонка радіуса R. Оболонка складається з I ізотропних шарів постійної товщини h_i та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область Ω, що обмежена контуром Γ: $x_\Gamma = x(s)$, $y_\Gamma = y(s)$ (s – поточна довжина дуги). Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі Oz збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Удар наноситься індентором масою M з напівсферичною кінцевою частиною радіуса r, який скидається з висоти H на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Швидкість його зіткнення з оболонкою визначається за формулою:

$$V_z = \sqrt{2gH} ,$$

де g – прискорення вільного падіння. Розглядається низькошвидкісний удар, коли деформації оболонки залишаються пружними.

Передбачається, що область взаємодії індентора та оболонки є круг радіуса $a(t)$ із центром у точці з координатами (x_0, y_0). Радіус області контакту обчислюється за формулою:

$$a(t) = \left[\frac{3}{16} F(t)(\theta_1 + \theta) \right]^{1/3} ,$$

де

$$\theta_1 = \frac{4\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4\left(1-\nu^2\right)}{E};$$

$F(t)$ – сила контактної взаємодії індентора й оболонки, t – час, E_1 та ν_1 – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу першого шару оболонки, E та ν – відповідні характеристики матеріалу індентора.

Рівняння руху індентора має вигляд:

$$M\, z_{,tt} = M\, g - F(t), \; z(0) = 0, \; z_{,t}(0) = V_z, \tag{1}$$

де $z = z(t)$ – переміщення індентора.

Умова сумісності переміщення індентора й оболонки записується в вигляді:

$$w_0 + \alpha_c - z \ge 0\,. \tag{2}$$

Тут α_c – контактне зближення індентора й оболонки в точці дотику (x_0, y_0), $w(x_0, y_0, t)$ – прогин зовнішньої поверхні першого шару оболонки в точці (x_0, y_0).

Контакт індентора й оболонки відбувається при перетворенні нерівності (2) на рівність

$$w_0 + \alpha_c - z = 0\,. \tag{3}$$

Контактне зближення α_c визначається з розв'язку задачі Герца [8, с. 365] про вдавлення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де

$$\kappa_1 = \left[\frac{9(\theta_1 + \theta)^2}{256\, r}\right]^{1/3}.$$

5. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині та інерції обертання нормального елемента в межах кожного шару:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \; k = 1,2,3, \; i = \overline{1,I}\,, \tag{4}$$

де $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$, $\delta_{i-1} \le z \le \delta_i$; $u_k = u_k(x, y, t)$ $(k = 1,2,3)$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$ $(k = 1,2)$ – кути повороту нормального елемента в i-му шарі навколо координатних осей Ox і Oy; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в i-му шарі.

З варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [9, с. 109] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантаження $\mathbf{P}$

$$\left[\boldsymbol{\Omega}^{\rho}\right] \mathbf{U}_{,tt} - [\boldsymbol{\Lambda}]\, \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \; t = 0, \tag{5}$$

і систему граничних умов на контурі Γ

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right] \mathbf{U} = \mathbf{P}^{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{6}$$

де $\left[\boldsymbol{\Omega}^{\rho}\right]$ та $[\boldsymbol{\Lambda}]$ – симетричні матриці; $\mathbf{U}=\left\{u_j(x,y,t)\right\}$, $\mathbf{P}^{\Gamma}=\left\{p_j^{\Gamma}(x,y,t)\right\}$, $\mathbf{P}=\left\{p_j(x,y,t)\right\}$, $p_j=0,\ j\neq 3$, $p_3=p_z(x,y,t)$; p_z – контактний тиск, $B_{ij}^{\Gamma}=\chi_i^1 B_{ij}^{u}+\chi_i^2 B_{ij}^{\sigma}$, $i,j=\overline{1,3I+3}$.

Вигляд елементів матриці $\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]$ та вектора граничних навантажень $\mathbf{P}^{\Gamma}$ залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам χ_i^1 та χ_i^2 (6), можна моделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки.

Метод розв'язання задачі (5), (6) базується на методі занурення заданої складної області в область канонічної форми [9, с. 149]. Вихідна оболонка занурюється в допоміжну оболонку, форма і граничні умови якої обираються так, щоб розв'язок задачі можна було одержати в аналітичній формі. Розв'язок має найбільш простий вигляд, якщо як допоміжну обрати прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Тоді розв'язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (6), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}}=\left\{q_j^{\text{comp}}(x,y,t)\right\}$, $j=\overline{1,3I+3}$, які неперервно розподілені вздовж контуру Γ. Так, задача про коливання оболонки складної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{3I+3}\oint_{\Gamma}\varsigma_{jk}q_k^{\text{comp}}(s,t)\delta(x-x_{\Gamma},y-y_{\Gamma})ds,\quad j,k=\overline{1,3I+3},$$

де $\delta(x-x_{\Gamma},y-y_{\Gamma})$ – двовимірна δ-функція.

Елементи матриці ζ_{jk}, що не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\zeta_{11}=\zeta_{22}=\zeta_{3+i\ 3+i}=\zeta_{3+I+i\ 3+I+i}=y'_{\Gamma},\quad \zeta_{33}=\zeta_{3+2I+i\,3+2I+i}=1,$$

$$\zeta_{12}=\zeta_{3+i\ 3+I+i}=x'_{\Gamma},\quad \zeta_{21}=\zeta_{3+I+i\ 3+i}=-x'_{\Gamma},\quad i=\overline{1,I},$$

де $x'_{\Gamma}=\dfrac{dx_{\Gamma}}{ds}$, $\quad y'_{\Gamma}=\dfrac{dy_{\Gamma}}{ds}$.

З умови задоволення вихідних граничних умов на контурі Γ (6) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі компенсуючі навантаження,

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\mathbf{U}\left[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x,y,t)\right]=\mathbf{P}^{\Gamma},\quad (x,y)\in\Gamma. \tag{7}$$

Метод розв'язання системи (7) полягає в тому, що функції переміщень (4), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки:

$$u_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{jmn}(t)C_{jmn}(x,y),\quad p_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}(t)C_{jmn}(x,y),$$

$$p_j^{\text{comp}}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}^{\text{comp}}(t)C_{jmn}(x,y),\quad j=\overline{1,3I+3},$$

де

$$C_{1mn}=\cos\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B},\quad C_{2mn}=\sin\frac{m\pi x}{A}\cos\frac{n\pi y}{B},\quad C_{3mn}=\sin\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3+i\,mn}=C_{1mn},\quad C_{3+I+i\,mn}=C_{2mn},\quad C_{3+2I+i\,mn}=C_{3mn},$$

$$p_{jmn}(t)=\frac{4}{AB}\int_0^A\int_0^B p_j(t)C_{jmn}(x,y)dxdy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t)=\frac{4}{AB}\sum_{k=1}^{3I+3}\oint_\Gamma \varsigma_{jk}\,q_k^{\text{comp}}(s,t)C_{jmn}(x_\Gamma,y_\Gamma)\mathrm{d}s;$$

$$j=\overline{1,3I+3},\ i=\overline{1,I},\ m=\overline{1,m^*},\ n=\overline{1,n^*};$$

A – довжина твірної допоміжної оболонки, B – довжина дуги цієї оболонки.

Розв'язок рівняння руху індентора (1) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Далі функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру Γ

$$q_j^{\text{comp}}(s,t)=\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}q_{j\alpha\mu}(t)b_{\alpha\mu}(s),\quad j=\overline{1,3I+3},$$

де

$$b_{1\mu}=\sin[\mu\gamma(s)],\ b_{2\mu}=\cos[\mu\gamma(s)],\ \gamma(s)=2\pi\int_0^s\mathrm{d}\tilde{s}\Big/\oint_\Gamma\mathrm{d}\tilde{s},\ 0\le\gamma(s)\le 2\pi,\ \mu=\overline{0,\mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі Γ (6), також розвиваються в ряд уздовж контуру Γ. У результаті система (7) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру Γ. Система рівнянь руху (5) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [9, с. 144]. Отже, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду:

$$u_j(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{AB}\sum_{k=1}^{3I+3}\pi_{jk}^{mn}\sum_{l=1}^{3I+3}\sum_{\alpha=1,2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}q_{l\alpha\mu}(t)+\varepsilon_{jmn}(t)\right)C_{jmn}(x,y),\ j=\overline{1,3I+3},$$

де π_{jk}^{mn}, $\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}$, ε_{jmn} – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень визначаються переміщення (4), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

З метою підтвердження вірогідності чисельних результатів, проведено порівняння розрахункових і експериментальних даних для п'ятишарової вільно опертої оболонки при ударі індентором з органічного скла. Контур оболонки описаний рівняннями кривих Ламе

$$\Gamma:\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c+\left(\frac{y}{\beta}\right)^c=1,$$

де $\alpha=0{,}3$ м, $\beta=0{,}14$ м, $c=10$. Оболонка має такі геометричні параметри: $R=5$ м, $h_1=5$ мм, $h_2=3$ мм, $h_3=15$ мм, $h_3=2$ мм, $h_5=20$ мм.

Шари мають такі механічні характеристики: $E_i=6{,}12\cdot10^4$ МПа, $i=1,3,5$, $E_i=280$ МПа, $i=2,4$ (модулі пружності); $\nu_i=0{,}22$, $i=1,3,5$, $\nu_i=0{,}39$, $i=2,4$ (коефіцієнти Пуассона); $\rho_i=2500$ кг/м³, $i=1,3,5$, $\rho_i=1200$ кг/м³, $i=2,4$ (густини матеріалів шарів).

Індентор має такі механічні та геометричні характеристики: $E = 5{,}7 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0{,}38$, $\rho = 1200$ кг/м^3 (густина матеріалу індентора), $M = 0{,}215$ кг, $r = 0{,}03$ м. Висота скидання індентора $H = 1$ м.

Удар завдається по зовнішній поверхні першого шару в точку з координатами (x_0, y_0). Деформація обчислюється та вимірюється в точці з такими ж координатами на зовнішній поверхні п'ятого шару. Експериментальні дані одержані методом динамічної широкосмугової тензометрії [7, с. 051004-6]. Теоретична та експериментальна залежності добре узгоджуються між собою, що підтверджує вірогідність результатів розрахунку.

На рис. 1 показані теоретична (суцільна лінія) і експериментальна (штрихова лінія) залежності деформації ε_x^5 оболонки від часу. Також на рисунку наведено розрахункову схему оболонки.

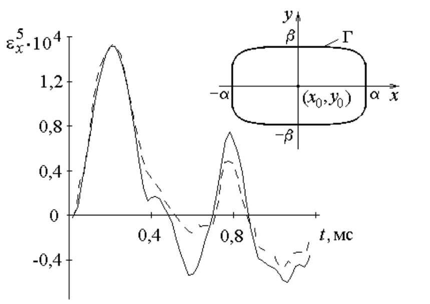


Рис. 1. Деформація ε_x^5 у п'ятишаровій оболонці при ударі

Як чисельний приклад, розглянуто коливання п'ятишарової вільно опертої оболонки. Форма плану оболонки наведена на рис. 2. Механічні характеристики шарів співпадають з характеристиками попередньо розглянутої оболонки. Оболонка має такі геометричні параметри: $R = 2$ м, $l_1 = 0{,}62$ м, $l_2 = 0{,}68$ м, $l_3 = 0{,}64$ м, $l_4 = 0{,}75$ м, $R_1 = 0{,}05$ м, $R_2 = 0{,}03$ м, $R_3 = 0{,}04$ м, $R_4 = 0{,}045$ м, $h_1 = 5$ мм, $h_2 = h_4 = 4$ мм, $h_3 = 15$ мм, $h_5 = 6$ мм.

Удар завдається індентором з органічного скла масою $M = 0{,}123$ кг та радіусом головної частини $r = 0{,}03$ м по зовнішній поверхні першого шару, висота скидання індентору $H = 1$ м.

На рис. 3 наведені залежності напружень σ_x^5 (суцільна лінія) та σ_y^5 (штрихова лінія) від часу в точці C (рис. 2) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

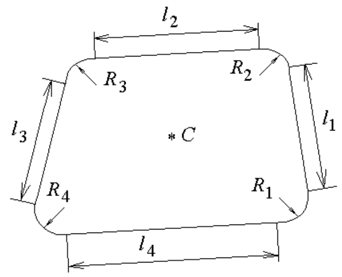


Рис. 2. Схема плану оболонки

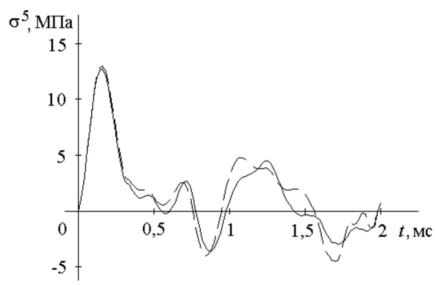


Рис. 3. Змінення в часі напружень

7. ВИСНОВКИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ Й НАПРЯМКИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розроблено метод дослідження нестаціонарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п’ятишарових вільно опертих оболонок при ударі індентором з напівсферичною кінцевою частиною. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку оболонок з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // Composite Structures. – 2000. – Vol. 48, No. 1. – P. 1-17.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, No. 3. – P. 287-308.
3. Zielinski A. P. A contour series method applied to shells / A.P. Zielinski // Thin-Walled Structures. – 1985. – No. 3. – P. 217-229.
4. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading / G.J. McShane, D.D. Radford, V.S. Deshpande, N.A. Fleck // Europ. J. Mechanics -A/Solids. – 2006. – Vol. 25, No. 2. – P. 215-229.
5. Malekzadeh K. Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring-mass-damper model / K. Malekzadeh, M.R. Khalili, R.K. Mittal // J. Composite Materials. – 2006. – Vol. 40, No. 18. – P. 1671-1689.
6. Naidu N. V. S. Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments / N.V.S. Naidu, P.K. Sinha // Int. J. Crashworthiness. – 2005. – Vol. 10, No. 4. – P. 389-402.
7. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2008. – Vol. 75, No. 5. – P. 051004-1-051004-9.
8. Nosier A. Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / A. Nosier, R.K. Kapania, J.N. Reddy // Computational Mechanics. – 1994. – No. 13. – P. 360-379.
9. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина. – Харьков : Міськдрук, 2011. – 376 с.

REFERENCE

1. Librescu, L. and Hause, T. (2000), “Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey”, *Composite Structures*, vol. 48, no. 1, pp. 1-17.
2. Carrera, E. (2003), “Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells”, *Appl. Mech. Rev*., vol. 56, no. 3, pp. 287-308.
3. Zielinski, A.P. (1985), “A contour series method applied to shells”, *Thin-Walled Structures*, no. 3, pp. 217-229.
4. McShane, G.J., Radford, D.D., Deshpande, V.S. and Fleck, N.A. (2006), “The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading”, *Europ. J. Mechanics - A/Solids*, vol. 25, no. 2, pp. 215-229.

5. Malekzadeh, K., Khalili, M.R., Mittal, R.K. and Malekzadeh, K. (2006), "Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring-mass-damper model", *J. Composite Materials*, vol. 40, no. 18, pp. 1671-1689.
6. Naidu, N.V.S. and Sinha, P.K. (2005), "Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments", *Int. J. Crashworthiness*, vol. 10, no. 4, pp. 389-402.
7. Smetankina, N.V., Shupikov, A.N., Sotrikhin, S.Yu. and Yareschenko, V.G. (2008), "A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment", *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics*, vol. 75, no. 5, pp. 051004-1-051004-9.
8. Nosier, A., Kapania, R.K. and Reddy, J.N. (1994), "Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory", *Computational Mechanics*, no. 13, pp. 360-379.
9. Smetankina, N.V. (2011), *Nestatsionarnoye deformorovaniye, termouprugost i optimizatsiya mnogosloynykh plastin i obolochek* [Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells], Miskdruk, Kharkov, Ukraine.

УДК 539.37

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОПЛАСТИЧНІЙ КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

[1]Сторожук Є. А., д. ф.-м. н., професор, [1]Чернишенко І. С., д. т. н., професор, [2]Харенко С. Б.

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

[2]Національний університет державної податкової служби України, вул. Університетська, 31, Ірпінь, 08201, Україна

stevan@ukr.net

Дано постановку і розвинуто методику чисельного розв'язання фізично нелінійних задач для конічних оболонок з двома круговими отворами при дії статичного навантаження. Досліджено пружнопластичний стан конічної оболонки, послабленої двома різними круговими отворами і навантаженої рівномірним внутрішнім тиском. Вивчено вплив пластичних деформацій і геометричних параметрів на концентрацію напружень в області отворів.

Ключові слова: конічна оболонка, кругові отвори, внутрішній тиск, пружнопластичний стан, концентрація напружень, скінченний елемент.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

[1]Сторожук Е. А., д. ф.-м. н., профессор, [1]Чернышенко И. С., д. т. н., профессор, [2]Харенко С. Б.

[1]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

[2]Национальный университет государственной налоговой службы Украины, ул. Университетская, 31, Ирпень, 08201, Украина

stevan@ukr.net

Дана постановка и развита методика численного решения физически нелинейных задач для конических оболочек с двумя круговыми отверстиями при действии статического нагружения. Исследовано упругопластическое состояние конической оболочки, ослабленной двумя разными круговыми отверстиями и

нагруженной равномерным внутренним давлением. Изучено влияние пластических деформаций и геометрических параметров на концентрацию напряжений в области отверстий.
Ключевые слова: коническая оболочка, круговые отверстия, внутреннее давление, упругопластическое состояние, концентрация напряжений, конечный элемент.

STRESS CONCENTRATION IN ELASTOPLASTIC CONICAL SHELL WITH TWO CIRCULAR HOLES

[1]Storozhuk E. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
[1]Chernyshenko I.S., D.Sc. in Engineering, professor, [2]Kharenko S.B.

[1]*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Nesterov str. 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

[2]*National University of the State Tax Service of Ukraine, University str. 31, Irpin, 08201, Ukraine*

stevan@ukr.net

Conical shell as elements of modern designs are widely used in many fields of technology. By design or technological reasons they occur holes and cutouts of different shapes.
From the review of publications on the stress concentration in the elastic-plastic conical shells weakened by two curved openings follows that this problem has been addressed only in a few studies. Therefore, this article examines the state of elastoplastic thin conical shell with two circular holes under the action of surface and edge strength increased intensity. It is assumed that the shell is made of a homogeneous isotropic material. Middle surface of the shell is related to the lines of the principal curvatures. To simplify the problem sample median curved surface divided into quadrilateral pieces, which parameterisation is performed using the membership function. Communication components of deformation and displacement vector is written in vector form according to the theory of shallow shells of the Kirchhoff-Love. Physical relationships are presented based on the theory of flow with isotropic hardening, which made Mises plasticity condition and the plastic strain increment are defined by the associated flow law.
Methods of solving nonlinear equations describing the deformation beyond the elastic limit of the conical shell with holes on the side surface, based on the use of the principle of virtual displacements, incremental loading procedure and method of additional stress. At each iteration, additional stresses linear problem is solved by a variant of the finite element method, developed for the analysis of shells with several holes. The peculiarity of the proposed modification of the finite element method consists in the fact that the normal rotation angles are determined not by the formulas resulting from the geometric Kirchhoff-Love hypotheses, as approximated by quadratic polynomials serendipity type with the implementation of Kirchhoff-Love hypotheses only in finite element nodes. The system of governing equations derived from the stationary conditions of the discrete analogue of the total energy of the shell.
Using the developed methodology and programming investigated elastoplastic state conical shell weakened by two different circular holes and loaded by uniform internal pressure. The influence of plastic deformation and geometric parameters on the stress concentration in the holes. Numerical results are presented in tabular form.
Key words: conical shell, circular holes, internal pressure, elastic-plastic state, stress concentration, finite element.

ВСТУП

Конічні оболонки як елементи сучасних конструкцій знаходять широке застосування в багатьох областях техніки. З конструктивних або технологічних міркувань у них мають місце отвори і вирізи найрізноманітнішої форми. При значних рівнях діючих навантажень навколо отворів у вказаних елементах конструкцій виникають зони підвищених напружень, а властивості їх матеріалів описуються нелінійними діаграмами деформування.

Значна частина результатів дослідження розподілу напружень навколо криволінійних отворів у конічних оболонках отримана при лінійно-пружній стадії їх деформування і найбільш повно викладена в узагальнюючих монографіях [1, 2]. Нелінійні задачі про концентрацію напружень у конічних оболонках розглянуті в обмеженій кількості робіт і, переважно, для оболонок з одним отвором. Це пояснюється значною складністю системи розв’язувальних рівнянь для конічної оболонки при врахуванні нелінійних факторів і наявності отворів на її бічній поверхні. Тому в більшості робіт, присвячених дослідженню нелінійного деформування конічної оболонки з отвором, використовуються сіткові методи [3]. Так, за допомогою варіаційно-різницевого методу (ВРМ) отримані числові результати для пружнопластичної конічної оболонки з прямокутним [4] і круговим [5] отворами, а також для нелінійно-пружної ортотропної оболонки з круговим вирізом [6]. Вплив пластичних деформацій і скінченних прогинів на напружено-деформований стан (НДС) конічної оболонки, послабленої круговим або еліптичним отвором, вивчено в роботах [7, 8]. Чисельні дослідження проведені з використанням методу скінченних елементів (МСЕ).

Лише останнім часом почали з'являтися публікації, присвячені розв'язанню нелінійних крайових задач для конічних оболонок з двома отворами при дії статичних навантажень. Так, у роботах [9-11] дано постановку і описано методику розв'язання фізично нелінійних задач для кругових конічних оболонок, послаблених двома криволінійними отворами, а також представлено деякі числові результати дослідження впливу пластичних деформацій на концентрацію напружень в області двох кругових отворів на бічній поверхні конічної оболонки.

Нижче узагальнено методику, викладену в [9-11], на випадок конічної оболонки з двома різними круговими отворами і отримано розподіл компонент НДС навколо отворів на бічній поверхні непружної оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо тонку конічну оболонку постійної товщини h, послаблену двома різними круговими отворами (рис. 1). Оболонка виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу і навантажена поверхневими $\{p\}=\{p_1,p_2,p_3\}^T$ та крайовими $\{m_k\}=\{T_k,S_k,Q_k,M_k\}^T$ силами.

Вважаємо, що в оболонці під дією навантаження значного рівня виникають пластичні деформації її матеріалу.

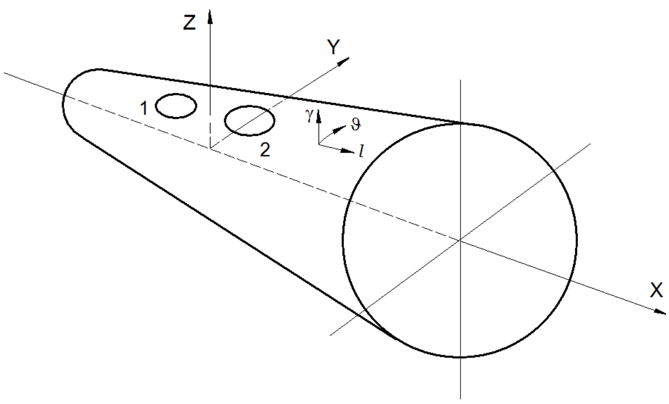


Рис. 1. Конічна оболонка з двома круговими отворами

Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (ℓ,ϑ,γ) з початком у вершині конуса, лінії ℓ,ϑ якої співпадають з лініями головних кривин оболонки. Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в глобальній декартовій системі координат (X, Y, Z) (рис. 1), вісь OX якої направлена по осі конуса, а вісь OZ проходить через середину перемички, що знаходиться на відстані ℓ_0 від вершини конуса. Параметричні рівняння серединної поверхні оболонки мають вигляд:

$$X=(\ell-\ell_0)\cos\alpha;\quad Y=\ell\sin\alpha\sin\psi;\quad Z=\ell\sin\alpha\cos\psi, \tag{1}$$

де 2α – кут при вершині конуса; $\psi=\vartheta/\sin\alpha$.

При розв'язуванні крайових задач для конічної оболонки з двома круговими отворами область (Σ) зміни координат (ℓ,ϑ) є складною, тобто обмеженою контуром, що містить більше чотирьох кутових точок. Для спрощення дискретизації задачі розбиваємо область (Σ) на криволінійні чотирикутні фрагменти, параметризацію яких здійснюємо за допомогою складеної функції:

$$\ell(\eta_1,\eta_2) = P_\ell(\eta_1,\eta_2) + P_\ell(\eta_2,\eta_1) - R_\ell(\eta_1,\eta_2) \ \ (\ell \to \vartheta);$$

$$P_\ell(\eta_1,\eta_2) = \ell(\eta_1)\Big|_{\eta_2=-1} N_1(\eta_2) + \ell(\eta_1)\Big|_{\eta_2=1} N_2(\eta_2);$$

$$R_\ell(\eta_1,\eta_2) = \ell\Big|_{\eta_1=\eta_2=-1} N_1(\eta_1)N_1(\eta_2) + \ell\Big|_{\eta_1=1;\eta_2=-1} N_2(\eta_1)N_1(\eta_2) + \tag{2}$$

$$+\ell\Big|_{\eta_1=-1;\eta_2=1} N_1(\eta_1)N_2(\eta_2) + \ell\Big|_{\eta_1=\eta_2=1} N_2(\eta_1)N_2(\eta_2);$$

$$N_1(\eta_1) = 0{,}5(1-\eta_1);\ N_2(\eta_1) = 0{,}5(1+\eta_1)\ (\eta_1 \to \eta_2);\ -1 \le \eta_1 \le 1;\ -1 \le \eta_2 \le 1.$$

Вирази для компонент мембранної (ε_{ij}) і згинної (μ_{ij}) деформацій представимо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, у якій мають місце гіпотези Кірхгофа-Лява [2]:

$$\varepsilon_{\ell\ell} = \frac{\partial \vec{u}}{A_\ell \partial \ell}\cdot \vec{e}_\ell;\quad \varepsilon_{\ell\vartheta} = \frac{\partial \vec{u}}{A_\ell \partial \ell}\cdot \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial \vec{u}}{A_\vartheta \partial \vartheta}\cdot \vec{e}_\ell;$$

$$\mu_{\ell\ell} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_\ell \partial \ell}\cdot \vec{e}_\ell;\quad 2\mu_{\ell\vartheta} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_\ell \partial \ell}\cdot \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_\vartheta \partial \vartheta}\cdot \vec{e}_\ell \quad (\ell \to \vartheta). \tag{3}$$

Тут A_ℓ, A_ϑ – параметри Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_\ell + v\vec{e}_\vartheta + w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_\ell, \vec{e}_\vartheta, \vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат $(\ell, \vartheta, \gamma)$; $\vec{\varphi} = \varphi_\ell \vec{e}_\ell + \varphi_\vartheta \vec{e}_\vartheta$ – вектор кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки, які визначаються за формулами:

$$\varphi_\ell = -\frac{\partial \vec{u}}{\partial A_\ell \partial \ell}\cdot \vec{n} \quad (\ell \to \vartheta). \tag{4}$$

Компоненти деформації еквідістантних поверхонь оболонки визначаються такими рівностями:

$$e_{\ell\ell} = \varepsilon_{\ell\ell} + \gamma\mu_{\ell\ell};\quad e_{\ell\vartheta} = \varepsilon_{\ell\vartheta} + 2\gamma\mu_{\ell\vartheta} \quad (\ell \to \vartheta). \tag{5}$$

При дослідженні пружнопластичного деформування конічних оболонок використовуємо співвідношення теорії текучості з ізотропним зміцненням, у якій прийнято умову пластичності Мізеса, а прирости пластичних деформацій визначаються згідно з асоційованим законом текучості [11]:

$$de^p_{\ell\ell} = \frac{3\overline{de^p_i}}{2\sigma_i} S_{\ell\ell}\ (\ell \to \vartheta);\quad de^p_{\ell\vartheta} = \frac{3\overline{de^p_i}}{\sigma_i} S_{\ell\vartheta}, \tag{6}$$

де $S_{\ell\ell}, S_{\vartheta\vartheta}, S_{\ell\vartheta}$ – компоненти девіатора напружень; σ_i, $\overline{de^p_i}$ – інтенсивності напружень і приростів пластичних деформацій.

Вважаємо, що при деформуванні матеріалу оболонки за межею пружності прирости компонент повної деформації складаються із суми пружної (de^y_{ij}) і пластичної (de^p_{ij}) частин:

$$de_{ij} = de^y_{ij} + de^p_{ij}\ (i, j = \ell, \vartheta). \tag{7}$$

Прирости компонент напружень і пружних деформацій пов’язані законом Гука:

$$d\sigma_{\ell\ell} = \frac{2G}{1-\nu}\left(de^{y}_{\ell\ell} + \nu de^{y}_{\vartheta\vartheta}\right) = \frac{2G}{1-\nu}\left(de_{\ell\ell} + \nu de_{\vartheta\vartheta}\right) + d\sigma^{p}_{\ell\ell} \quad (\ell \leftrightarrow \vartheta);$$

$$d\sigma_{\ell\vartheta} = Gde^{y}_{\ell\vartheta} = Gde_{\ell\vartheta} + d\sigma^{p}_{\ell\vartheta}, \tag{8}$$

де

$$d\sigma^{p}_{\ell\ell} = -\frac{2G}{1-\nu}\left(de^{p}_{\ell\ell} + \nu de^{p}_{\vartheta\vartheta}\right) \ (\ell \leftrightarrow \vartheta); \quad d\sigma^{p}_{\ell\vartheta} = -Gde^{p}_{\ell\vartheta}; \tag{9}$$

G, ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Вирази для приростів внутрішніх зусиль і моментів з урахуванням рівностей (5)-(9) подамо у вигляді суми лінійної і нелінійної частин:

$$dT_{ij} = dT^{0}_{ij} + dT^{p}_{ij}\ ; \quad dM_{ij} = dM^{0}_{ij} + dM^{p}_{ij} \ (i, j = \ell, \vartheta), \tag{10}$$

які визначаються за формулами:

$$dT^{0}_{\ell\ell} = \frac{2Gh}{1-\nu}\left(d\varepsilon_{\ell\ell} + \nu d\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\right); \quad dT^{0}_{\ell\vartheta} = Ghd\varepsilon_{\ell\vartheta};$$

$$dM^{0}_{\ell\ell} = \frac{Gh^{3}}{6(1-\nu)}\left(d\mu_{\ell\ell} + \nu d\mu_{\vartheta\vartheta}\right); \quad dM^{0}_{\ell\vartheta} = \frac{Gh^{3}}{6} d\mu_{\ell\vartheta} \ (\ell \leftrightarrow \vartheta); \tag{11}$$

$$dT^{p}_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} d\sigma^{p}_{ij} d\gamma\,; \quad dM^{p}_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} d\sigma^{p}_{ij}\gamma d\gamma\,.$$

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ДВОМА ОТВОРАМИ

Враховуючи суттєву нелінійність фізичних співвідношень (5)-(11) і з метою відслідкування історії процесу деформування конічної оболонки з двома отворами, при побудові системи розв'язувальних рівнянь використана процедура покрокового навантаження і подання вихідних рівнянь в інкрементальній формі. Така система отримана з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і МСЕ [11].

Варіаційне рівняння принципу можливих переміщень, записане в кінці n-го кроку навантаження, має вигляд:

$$\delta A - \delta W_0 = 0, \tag{12}$$

де $\delta A, \delta W_0$ – робота зовнішніх і внутрішніх сил оболонки на можливих переміщеннях.

У результаті лінеаризації задачі приходимо до такого функціоналу:

$$\begin{aligned} \Pi^{ЛН} = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\Sigma)} (&\Delta T^{0}_{\ell\ell}\Delta\varepsilon_{\ell\ell} + \Delta T^{0}_{\vartheta\vartheta}\Delta\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \Delta T^{0}_{\ell\vartheta}\Delta\varepsilon_{\ell\vartheta} + \Delta M^{0}_{\ell\ell}\Delta\mu_{\ell\ell} + \Delta M^{0}_{\vartheta\vartheta}\Delta\mu_{\vartheta\vartheta} + 2\Delta M^{0}_{\ell\vartheta}\Delta\mu_{\ell\vartheta})d\Sigma + \\ + \iint\limits_{(\Sigma)} (&\Delta T^{p}_{\ell\ell}\Delta\varepsilon_{\ell\ell} + \Delta T^{p}_{\vartheta\vartheta}\Delta\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \Delta T^{p}_{\ell\vartheta}\Delta\varepsilon_{\ell\vartheta} + \Delta M^{p}_{\ell\ell}\Delta\mu_{\ell\ell} + \Delta M^{p}_{\vartheta\vartheta}\Delta\mu_{\vartheta\vartheta} + 2\Delta M^{p}_{\ell\vartheta}\Delta\mu_{\ell\vartheta})d\Sigma - \\ - \iint\limits_{(\Sigma_P)} &\left(\Delta p_1\Delta u + \Delta p_2\Delta v + \Delta p_3\Delta w\right)d\Sigma - \int\limits_{(\Gamma_k)}\left(\Delta T_k\Delta u_{\sigma} + \Delta S_k\Delta u_{\tau} + \Delta Q_k\Delta w + \Delta M_k\Delta\varphi_{\sigma}\right)ds + \\ + \iint\limits_{(\Sigma)} (&\overline{T}_{\ell\ell}\Delta\varepsilon_{\ell\ell} + \overline{T}_{\vartheta\vartheta}\Delta\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \overline{T}_{\ell\vartheta}\Delta\varepsilon_{\ell\vartheta} + \overline{M}_{\ell\ell}\Delta\mu_{\ell\ell} + \overline{M}_{\vartheta\vartheta}\Delta\mu_{\vartheta\vartheta} + 2\overline{M}_{\ell\vartheta}\Delta\mu_{\ell\vartheta})d\Sigma - \end{aligned} \tag{13}$$

$$-\iint\limits_{(\Sigma_P)}\left(\overline{p}_1\Delta u+\overline{p}_2\Delta v+\overline{p}_3\Delta w\right)d\Sigma-\int\limits_{(\Gamma_k)}\left(\overline{T}_k\Delta u_\sigma+\overline{S}_k\Delta u_\tau+\overline{Q}_k\Delta w+\overline{M}_k\Delta\varphi_\sigma\right)ds\,.$$

Тут (Σ_P) – частина серединної поверхні оболонки (Σ), на якій задані поверхневі сили; (Γ_k) – частина контуру серединної поверхні, на якій задані крайові сили; $u_\sigma, u_\tau, w, \varphi_\sigma$ – узагальнені контурні переміщення; символами $\overline{f}$ і Δf позначено значення функції f на початку n-го кроку навантаження, а також її приріст на цьому кроці.

Лінійна задача розв'язується за допомогою модифікації МСЕ, розробленої для розрахунку оболонок з декількома отворами. Оскільки область зміни координат (ℓ, ϑ) для конічної оболонки з двома отворами є складною, то її не можна розбити лише на прямокутні скінченні елементи (СЕ). Для розрахунку таких оболонок використовують елементи, сторони яких не співпадають з координатними лініями. Побудова СЕ в цьому випадку пов'язана з певними труднощами при виборі апроксимуючих функцій для прогину (w), які б задовольняли умовам неперервності перших похідних при переході через сторони елемента. Авторами розроблено варіант МСЕ для тонких оболонок складної геометрії, який задовольняє умовам неперервності перших похідних. Це досягається завдяки тому, що кути повороту $\varphi_\ell, \varphi_\vartheta$ у виразах для компонент згинної деформації визначаються не за формулами (4), як це прийнято в традиційному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимуються квадратичними поліномами серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа-Лява тільки у вузлах скінченного елемента [11].

З умов стаціонарності дискретного аналога функціоналу (13) отримаємо систему розв'язувальних рівнянь, яка в матричній формі для n-го кроку навантаження має вигляд:

$$[K]\{\Delta q\}=\{\Delta P\}-\{\Delta\Omega\}+\{\Delta\Psi\}, \qquad (14)$$

де $[K]$ – матриця жорсткості; $\{\Delta q\}$ – вектор приростів вузлових ступенів свободи; $\{\Delta P\}$ – вектор навантажень; $\{\Delta\Omega\}$– вектор нелінійностей, які враховують деформації пластичності матеріалу; $\{\Delta\Psi\}$ – вектор нев'язок рівнянь рівноваги в кінці $(n-1)$-го кроку навантаження.

При розв'язанні конкретних задач для цієї оболонки з отворами до рівнянь рівноваги (13) потрібно приєднати відповідні крайові умови, які можуть бути представлені в переміщеннях, зусиллях або змішаному вигляді.

АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Конкретні результати дослідження НДС представимо для конічної оболонки з двома різними круговими отворами радіусів r_1 і r_2, центри яких розміщені на спільній твірній. Оболонка виготовлена із сплаву АМг-6 і навантажена рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності $q=q_0{\cdot}10^5$ Па (q_0= 3).

Дослідження проведені при таких значеннях геометричних і фізико-механічних параметрів оболонки:

$$R_0/h=\ell_0/h=200;\quad r_1/h=20;\quad r_2/h=15;20;25;\quad d/h=10;$$

$$E=70\,\text{ГПа};\quad \nu=0{,}3;\quad \sigma_n=140\,\text{МПа};\quad \varepsilon_n=0{,}002\,,$$

де d – довжина перемички; R_0 – радіус кривини нормального перерізу оболонки, що проходить через центр перемички.

При проведені розрахунків прийнято, що на контурах першого і другого отворів діють перерізувальні сили $Q_{k,1} = qr_1/2$ і $Q_{k,2} = qr_2/2$ відповідно, а на значній відстані від отворів має місце безмоментний напружений стан.

У табл. 1 наведені значення кругових напружень $\sigma^0_{\theta\theta}$ ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma^0_{\theta\theta} \cdot 10^5$ Па) в точках $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ контурів отворів на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки ($\xi = \gamma/h = \pm 0{,}5$), де полярному куту $\theta = 0$ відповідають найбільш віддалені від вершини конуса точки контурів. Дані розв'язання лінійних (ЛЗ) і фізично нелінійних задач (ФНЗ) представлені для трьох варіантів радіусів отворів: 1) $r_1/h = r_2/h = 20$ ($\mathrm{N} = 1$); 2) $r_1/h = 20, r_2/h = 15$ ($\mathrm{N} = 2$); 3) $r_1/h = 20, r_2/h = 25$ ($\mathrm{N} = 3$).

Таблиця 1 – Кругові напруження на контурах отворів

N	θ	ξ	Перший отвір		Другий отвір	
			ЛЗ	ФНЗ	ЛЗ	ФНЗ
1	0	0,5	791	1805	2511	1695
		- 0,5	5345	2493	4373	1984
	π	0,5	1565	1353	1328	1860
		- 0,5	4181	1935	5989	2506
2	0	0,5	1641	1808	2316	1629
		- 0,5	5020	2339	3213	1864
	π	0,5	1626	1397	1145	1812
		- 0,5	4180	1911	4594	2376
3	0	0,5	-445	1591	2480	1766
		- 0,5	5735	2638	5519	2143
	π	0,5	1464	1275	1425	1874
		- 0,5	4145	1960	7809	2679

З наведених результатів випливає, що для конічної оболонки з двома однаковими круговими отворами ($\mathrm{N} = 1$) при навантаженні внутрішнім тиском найбільш небезпечною є точка, яка розміщена на контурі другого отвору в перерізі ($r = r_2; \theta = \pi$) на внутрішній поверхні оболонки ($\xi = -0{,}5$). У випадку зменшення радіуса другого отвору ($\mathrm{N} = 2$) при фіксованих радіусі першого отвору і довжині перемички відбувається перерозподіл напружень між контурами отворів та зменшення максимальних напружень на 16% для ЛЗ і на 5% для ФНЗ, а при збільшенні радіуса другого отвору ($\mathrm{N} = 3$) – зростання на 30% для ЛЗ і на 7% для ФНЗ. Врахування пластичності матеріалу оболонки призводить до вирівнювання напружень як по товщині оболонки, так і на контурах отворів, а також до зменшення максимальних напружень у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв'язку на 58%, 53% і 66% відповідно для першого, другого і третього варіантів розрахунку.

ВИСНОВКИ

Отже, в роботі викладено методику чисельного розв'язання фізично нелінійних задач статики для тонких конічних оболонок, послаблених двома круговими отворами, яка базується на використанні принципу можливих переміщень, процедури покрокового навантаження, методів початкових напружень і скінченних елементів. За допомогою запропонованої методики досліджено вплив пластичних деформацій і геометричних параметрів на напружено-деформований стан конічної оболонки з двома різними круговими отворами, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском. Представляє подальший інтерес вивчення нелінійного деформування конічних оболонок з декількома отворами як з врахуванням реальних властивостей матеріалів, так і особливостей їх деформування при дії комбінованого навантаження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Конические оболочки, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, П.З. Луговой, Н.А. Шульга. – К. : Наук. думка, 1976. – 163 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / [А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов и др.]. – К. : Наук. думка,1980. – 636 с.
3. Максимюк В. А. Решение нелинейных задач статики тонких оболочек сеточными методами / В.А. Максимюк, Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 1. – С. 41-70.
4. Мущанов В. Ф. Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек переменной и постоянной толщины с отверстием / В.Ф. Мущанов, А.И. Демидов // Металлические конструкции. – 2008. – 14, № 3. – С. 125-142.
5. Трояк Е. Н. Упругопластическое состояние конической оболочки с круговым отверстием на боковой поверхности / Е.Н. Трояк, Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 1. – С. 74-79.
6. Ермаковская И. П. О влиянии физической нелинейности и ортотропии на распределение напряжений около отверстий в конической оболочке / И.П. Ермаковская // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 77-83.
7. Чернышенко И. С. Физически и геометрически нелинейное деформирование конических оболочек с эллиптическим отверстием / И.С. Чернышенко, Е.А. Сторожук, С.Б. Харенко // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 2. – С. 69-77.
8. Chernyshenko I. S. Physically and Geometrically Nonlinear Deformation of Thin–Walled Conical Shells with a Curvilinear Hole / I.S. Chernyshenko, E.A. Storozhuk, S.B. Kharenko // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 4. – P. 418-424.
9. Чернишенко І. С. Чисельна методика дослідження пружнопластичного стану конічної оболонки з двома круговими отворами / І.С. Чернишенко, Є.А. Сторожук, С.Б. Харенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету. – Дніпропетровськ : ІМА – прес, 2009. – Вип. 13. – С. 257-263.
10. Харенко С. Б. Рівновага непружної конічної оболонки з двома круговими отворами / С.Б. Харенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету. – Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 340-346.
11. Сторожук Е. А. Упругопластическое деформирование конической оболочки с двумя круговыми отверстиями / Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко, С.Б. Харенко // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 3. – С. 127-132.

REFERENCES

1. Guz, A.N., Lugovoi, P.Z. and Shulga, N.A. (1976), *Konicheskie obolochki, oslablennye otverstiyami*, Nauk. dumka, Kiev.
2. (1980), *Teoriya tonkikh obolochek, oslablennykh otverstiyami*, [A.N.Guz, I.S. Chernyshenko, Val.N. Chekhov i dr.], Nauk.dumka, Kiev.
3. Maksimyuk, V.A., Storozhuk, E.A., Chernyshenko, I.S. and Maksimyuk, V.A. (2009), “Reshenie nelineinykh zadach statiki tonkikh obolochek setochnymi metodami”, Prikl. Mekhanika, vol. 45, no. 1, pp. 41-70.

4. Mushchanov, V.F. and Demidov, A.I. (2008), "Uprugo-plasticheskoe napryazhennoe sostoyanie krugovykh konicheskikh obolochek peremennoi i postoyannoi tolshchiny s otverstiem", *Metallicheskie konstruktsii*, vol. 14, no. 3, pp. 125-142.
5. Troyak, E.N., Storozhuk, E.A. and Chernyshenko, I.S. (1988), "Uprugoplasticheskoe sostoyanie konicheskoi obolochki s krugovym otverstiem na bokovoi poverkhnosti", Prikl. Mekhanika, vol. 24, no. 1, pp. 74-79.
6. Ermakovskaya, I.P. (1991), "O vliyanii fizicheskoi nelineinosti i ortotropii na raspredelenie napryazhenii okolo otverstii v konicheskoi obolochke", *Prikl. Mekhanika*, vol. 27, no. 10, pp. 77-83.
7. Chernyshenko, I.S., Storozhuk, E.A. and Kharenko, S.B. (2008), "Fizicheski i geometricheski nelineinoe deformirovanie konicheskikh obolochek s ellipticheskim otverstiem", *Prikl. Mekhanika*, vol. 44, no. 2, pp. 69-77.
8. Chernyshenko, I.S., Storozhuk, E.A. and Kharenko, S.B. (2007), "Physically and Geometrically Nonlinear Deformation of Thin–Walled Conical Shells with a Curvilinear Hole", *Int. Appl. Mech.*, vol. 43, no. 4, pp. 418-424.
9. Chernyshenko, I.S., Storozhuk, E.A. and Kharenko, S.B. (2009), "Chyselna metodyka doslidzhennia pruzhnoplastychnoho stanu konichnoi obolonky z dvoma kruhovymy otvoramy", *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktsii*, issue 13, pp. 257-263.
10. Kharenko, S.B. (2010), "Rivnovaha nepruzhnoi konichnoi obolonky z dvoma kruhovymy otvoramy", *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktsii: zbirnyk naukovykh prats Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu*, issue 14, pp. 340-346.
11. Storozhuk, E.A., Chernyshenko, I.S. and Kharenko, S.B. (2012), "Uprugoplasticheskoe deformirovanie konicheskoi obolochki s dvumya krugovymi otverstiyami", *Prikl. Mekhanika*, vol. 48, no. 3, pp. 127-132.

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА ІЗ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛАДКАМИ ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сулим Г. Т., д. ф.-м. н., професор, Турчин І. М., к. ф.-м. н., доцент

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79060, Україна*

ihorturchyn@gmail.com

Із використанням методу поліномів Лагерра одержано точний замкнутий розв'язок динамічної задачі теорії пружності для системи циліндричних вкладок, що містяться в масивному тілі, яке моделюється простором із циліндричною порожниною. Розв'язок одержано у вигляді ряду за поліномами Лагерра, коефіцієнти якого одержуються із рекурентних співвідношень. Наводяться результати числового аналізу перехідного напружено-деформованого стану, зумовленого силовим навантаженням імпульсного типу.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, неоднорідний циліндр, точний розв'язок, поліноми Лагерра, імпульсне навантаження.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛАДКАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Сулим Г. Т., д. ф.-м. н., профессор, Турчин И. М., к. ф.-м. н., доцент

Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3-б, г. Львов, 79060, Украина

ihorturchyn@gmail.com

С использованием метода полиномов Лагерра получено точное замкнутое решение динамической задачи теории упругости для системы цилиндрических вкладок, содержащихся в массивном теле, которое моделируется пространством с цилиндрической полостью. Решение получено в виде ряда по полиномам Лагерра, коэффициенты которого находятся из рекуррентных соотношений. Приводятся результаты численного анализа переходного напряженно-деформированного состояния, обусловленного силовой нагрузкой импульсного типа.
Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, неоднородный цилиндр, точное решение, полиномы Лагерра, импульсная нагрузка.

UNSTEADY VIBRATIONS OF THE ELASTIC MEDIUM WITH CYLINDRICAL TABS UNDER DYNAMIC LOAD

Sulym H. T., D.Sc. in Physics and Maths., Professor,
Turchyn I.M., Ph.D in Physics and Maths., Associate Professor

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, Ukraine

Pidsryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine,
Naukova str., 3-b, Lviv, 79060, Ukraine

ihorturchyn@gmail.com

Mechanics of composite materials and, in particular mechanics of layered structures, is relatively new trend in solid mechanics, although the idea of the design of such materials is prompted by nature. An important feature of composite materials is their high specific strength, while the strength of composite materials is higher than the strength of each separate component. It should be borne in mind that, along with many technically important advantages, composite materials have a number of significant drawbacks related to the fact that usually the physical and mechanical properties of separate components are poorly agreed with each other, and this sometimes leads to specific types of fracture (delamination, local cracks, breach of adhesion, etc.). Therefore, accurate calculation of the stress-strain state of layered media with accurate account for a contact interaction between the separate layers is an important problem in modern engineering studies. It should be noted that the mathematical modeling of transient processes in composite materials and, in particular, layered composites is challenging one, since it requires an accurate description of the mechanical interaction between each layer. The authors of this paper developed a new effective method of solutions derivation for elastodynamics problems for nonhomogeneous bodies.

In this paper using method of Laguerre polynomials we have obtained the solution of the dynamic problem of the theory of elasticity for elastic nonhomogeneous cylinder inserted into massive body modeled as a space. The source of non-stationary processes in composite is high intensity force load of the inner surface of the first cylinder. On the surface separation of materials of space and cylinder and on the surface separations of materials nonhomogeneous cylinders the conditions of ideal mechanical contact are satisfied. The solution is obtained as series of Laguerre polynomials, which coefficients are found from recurrent relations. The results of numerical analysis for displacements in homogeneous hollow cylinder are compared with known results obtained using the Laplace transforms. The results of numerical analysis of transient stress-strain state in elastic sandstone space with cylindrical insertion made from steel might be used for the technological process of hydraulic fracturing during shale gas extraction.
Key words: dynamics problems of elasticity theory, nonhomogeneous cylinder, the exact solution, Laguerre polynomials, impulse load.

ВСТУП

При математичному моделюванні механічних процесів, що відбуваються в елементах конструкцій, приладах та спорудах із урахуванням реальних умов експлуатації чи виготовлення, часто виникає потреба врахування відповідних інерційних членів у вихідних модельних побудовах. Особливо це стосується випадків, коли дія зовнішніх чинників зводиться до змінюваного в часі високошвидкісного навантаження граничних поверхонь [1, 2]. Хоча в загальному випадку зазначена проблема стосується складних, геометрично та фізично нелінійних моделей механіки, багато важливих закономірностей та ефектів можна виявити та дослідити із використанням лінійної моделі теорії пружності [3, 4].

Класичним аналітичним методом побудови розв’язків просторових динамічних задач теорії пружності є метод інтегрального перетворення Лапласа [1, 5, 6]. Проте, для неоднорідних тіл циліндричної форми пряме використання цього перетворення створює значні труднощі при переході від трансформант до оригіналів. Особливо це стосується випадків, коли циліндричне тіло вкладене в безмежне пружне середовище: через явище згасання коливань та специфіку задачі виникає потреба у пошуку комплексних коренів складного трансцендентного рівняння. У зв’язку з цим багато авторів вдаються або до числових способів обернення інтегрального перетворення Лапласа [6, 7], або до використання прямих числових методів [8], що може істотно впливати не лише на точність одержаних результатів, але й спотворювати якісну картину механічного явища, яке досліджується.

Метою роботи є розробка ефективної аналітичної методики побудови розв’язку динамічних задач теорії пружності для циліндрично-шаруватих тіл і середовищ, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лагерра [9, 10] і дослідження на її основі перехідного напружено-деформованого стану в просторі з системою циліндричних вкладок, зумовленого ударним силовим навантаженням.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо пружне середовище з циліндричним отвором, до якого без натягу та зазору припасовано систему циліндричних вкладок – неоднорідний циліндр із різними та відмінними від середовища механічними властивостями (рис. 1).

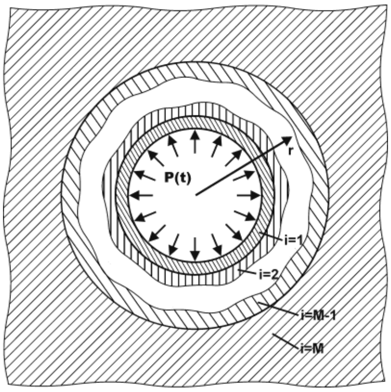


Рис. 1. Схема задачі

Джерелом нестаціонарних процесів у такому тілі є змінне в часі силове навантаження внутрішньої поверхні циліндра $P(t)$.

Для визначення поля напружень і деформацій в неоднорідному циліндрі та просторі, у припущенні, що на поверхні їх поділу та поверхнях поділу циліндричних вкладок виконуються умови ідеального механічного контакту, знайдемо розв’язок початково-крайової задачі:

$$\rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho u^{(i)}) - \rho^{-2}u^{(i)} - \tilde{c}_i^2\partial_\tau^2 u^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1,M}\,; \tag{1}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = -p(\tau), \ \ \rho = \rho_0\,; \quad u^{(M)} = 0, \quad \rho \to \infty\,; \tag{2}$$

$$u^{(i)} = u^{(i+1)},\ \sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \sigma_{\rho\rho}^{(i+1)},\ \rho = \rho_i,\ i = \overline{1, M-1}; \tag{3}$$

$$u^{(i)} = \partial_\tau u^{(i)} = 0,\ \tau = 0,\ i = 1, 2, \tag{4}$$

де $\rho = r / R_{M-1}$ – безрозмірна радіальна змінна циліндричної системи координат; $\rho_i = R_i / R_{M-1}$, R_0, R_{M-1} – відповідно, радіуси внутрішньої поверхні першого циліндра та зовнішньої поверхні останнього циліндра; R_i, $i = \overline{1, M-2}$ - радіуси поверхонь спряження циліндричних вкладок; $u^{(i)}(\rho, \tau)$ – віднесене до R_{M-1} радіальне переміщення в i-му циліндрі ($i = \overline{1, M-1}$) та просторі ($i = M$); $\tilde{c}_i = \dfrac{c_0}{c_i}$, $\tau = \dfrac{c_0 t}{R_{M-1}}$ – безрозмірний час; c_i – швидкість розповсюдження поздовжніх хвиль у матеріалах циліндрів та простору; c_0 - швидкість поширення хвиль у деякому матеріалі (вибирається з міркувань зручності числових розрахунків); $p(\tau) = P(c_0 t / R_{M-1})$; $\sigma_{\rho\rho}^{(i)}(\rho, \tau)$ - радіальні напруження, які визначаються законом Гука

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)} = \mu_i \left[\kappa_i^2 \partial_\rho u^{(i)} + (\kappa_i^2 - 2) \frac{u^{(i)}}{\rho} \right], \tag{5}$$

де $\kappa_i^2 = \dfrac{\lambda_i + 2\mu_i}{\mu_i}$; λ_i, μ_i – сталі Ляме.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

У припущенні, що розв'язок задачі (1)-(4) задовольняє умові

$$\left\| u^{(i)}(\rho, \tau) \right\|^2 = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \left| u^{(i)}(\rho, \tau) \right|^2 d\tau < \infty,$$

де $\lambda > 0$ деяке число (масштабний множник), переміщення $u^{(i)}(\rho, \tau)$ подамо у вигляді ряду за поліномами Лагерра

$$u^{(i)}(\rho, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^\infty u_n^{(i)}(\rho) L_n(\lambda\tau), \tag{6}$$

де

$$u_n^{(i)}(\rho) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) u^{(i)}(\rho, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau, \tag{7}$$

а $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра.

Далі формулу (7) будемо розглядати як інтегральне перетворення функції, а ряд (6) як формулу обернення цього перетворення [9].

Помножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau) L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо інтегрування одержаного виразу за змінною τ в інтервалі $[0, \infty)$. Враховуючи рівність (7), початкові умови (4) і наслідок формули диференціювання поліномів Лагерра

$$\partial_\tau L_n(\lambda\tau) = -\lambda L_{n-1}^1(\lambda\tau) = -\lambda \sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda\tau),$$

після інтегрування за частинами, одержимо

$$\rho^{-1}d_\rho(\rho d_\rho u_n^{(i)})-\rho^{-2}u_n^{(i)}-\omega_i^2u_n^{(i)}=\omega_i^2\sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)u_m^{(i)},\ i=\overline{1,M} \tag{8}$$

$$\sigma_{\rho\rho,n}^{(1)}=-p_n,\ \rho=\rho_0,\quad u_n^{(M)}=0,\quad \rho\to\infty; \tag{9}$$

$$u_n^{(i)}=u_n^{(i+1)},\ \sigma_{\rho\rho,n}^{(i)}=\sigma_{\rho\rho,n}^{(i+1)},\quad \rho=\rho_i,\quad i=\overline{1,M-1}, \tag{10}$$

де $u_n^{(i)}(\rho)$ – зображення по Лагерру (7), $\omega_i=\lambda\tilde{c}_i$.

Розв'язок трикутної послідовності звичайних диференціальних рівнянь (8) як відомо [2, 4], можна записати у вигляді алгебраїчної згортки [11]

$$u_n^{(i)}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j(\omega_i\rho)+D_{n-j}^{(i)}W_j(\omega_i\rho)\right]. \tag{11}$$

Тут $G_j(x), W_j(x)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки послідовності (8), які можна подати у вигляді [11]

$$G_j(x)=\sum_{p=0}^{j}a_{j,p}\frac{(x)^p}{2^p\,p!}\mathrm{I}_{p+1}(x);\quad W_j(x)=\sum_{p=0}^{j}a_{j,p}\frac{(-x)^p}{2^p\,p!}\mathrm{K}_{p+1}(x), \tag{12}$$

де $\mathrm{I}_p(x)$ і $\mathrm{K}_p(x)$ – модифіковані функції Беселя, а коефіцієнти $a_{j,p}$ задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,p+1}=\sum_{k=p}^{j-1}(j-k+1)a_{k,p},\ \ j=1,2,...,\quad p=\overline{0,j-1}. \tag{13}$$

Враховуючи умови на безмежності (2) та вигляд фундаментальних розв'язків (12), одержимо

$$C_j^{(M)}\equiv 0,\ \ j=0,1,2,.... \tag{14}$$

Безпосередня підстановка розв'язків (11) в умови (9)-(10) призводить до рекурентних послідовностей систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(b_{k,l}\right)\left\{C_n^{(1)},D_n^{(1)},...,C_n^{(l)},D_n^{(l)},\ ...\ ,D_n^{(M)}\right\}^{\mathbf{T}}=\left\{H_{n,k}\right\}^{\mathbf{T}}, \tag{15}$$

де відмінні від нуля коефіцієнти матриці $\left(b_{k,l}\right)$

$$b_{1,1}=\tilde{\kappa}_1^2\omega_1\,\mathrm{I}_0\left(\rho_0\omega_1\right)-\frac{2\tilde{\mu}_1}{\rho_0}\mathrm{I}_1\left(\rho_0\omega_1\right);\quad b_{1,2}=-\tilde{\kappa}_1^2\omega_1\,\mathrm{K}_0\left(\rho_0\omega_1\right)-\frac{2\tilde{\mu}_1}{\rho_0}\mathrm{K}_1\left(\rho_0\omega_1\right);\quad b_{2i,2i-1}=\mathrm{I}_1\left(\omega_i\rho_i\right);$$

$$b_{2i,2i}=\mathrm{K}_1\left(\omega_i\rho_i\right);\quad b_{2i,2i+1}=-\mathrm{I}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right);\quad b_{2i,2i+2}=-\mathrm{K}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right);$$

$$b_{2i+1,2i-1}=\tilde{\kappa}_i^2\omega_i\,\mathrm{I}_0\left(\omega_i\rho_i\right)-\frac{2\tilde{\mu}_i}{\rho_i}\mathrm{I}_1\left(\omega_i\rho_i\right);\quad b_{2i+1,2i}=-\tilde{\kappa}_i^2\omega_i\,\mathrm{K}_0\left(\omega_i\rho_i\right)-\frac{2\tilde{\mu}_i}{\rho_i}\mathrm{K}_1\left(\omega_i\rho_i\right);$$

$$b_{2i+1,2i+1}=-\tilde{\kappa}_{i+1}^2\omega_{i+1}\,\mathrm{I}_0\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)+\frac{2\tilde{\mu}_{i+1}}{\rho_i}\mathrm{I}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right);\quad b_{2i+1,2i+2}=\tilde{\kappa}_{i+1}^2\omega_{i+1}\,\mathrm{K}_0\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)+\frac{2\tilde{\mu}_{i+1}}{\rho_i}\mathrm{K}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right).$$

Тут i змінюється від 1 до $M-1$, $\tilde{\mu}_i=\dfrac{\mu_i}{\mu_0}$. Стовпець вільних членів систем (15) з ростом n поповнюється знайденими розв'язками, а його коефіцієнти мають вигляд

$$H_{1,n}=-\frac{p_{0,n}}{\mu}-\tilde{\kappa}_1^2\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(1)}G_j^{'}\left(\omega_0\rho_0\right)+D_{n-j}^{(1)}W_j^{'}\left(\omega_0\rho_0\right)\right]-\frac{\tilde{\kappa}_1^2-2}{\rho_0}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(1)}G_j\left(\omega_0\rho_0\right)+D_{n-j}^{(1)}W_j\left(\omega_0\rho_0\right)\right];$$

$$H_{2i,n}=\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i+1)}G_j\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i+1)}W_j\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)\right]-\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j\left(\omega_i\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i)}W_j\left(\omega_i\rho_i\right)\right];\ i=\overline{1,M-1};$$

$$H_{2i+1,n}=\tilde{\mu}_{i+1}\tilde{\kappa}_{i+1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i+1)}G_j^{'}\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i+1)}W_j^{'}\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)\right]-\tilde{\mu}_i\tilde{\kappa}_i^{2}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j^{'}\left(\omega_i\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i)}W_j^{'}\left(\omega_i\rho_i\right)\right]+$$
$$+\frac{\tilde{\mu}_{i+1}\left(\tilde{\kappa}_{i+1}^{2}-2\right)}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i+1)}G_j\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i+1)}W_j\left(\omega_{i+1}\rho_i\right)\right]-$$
$$-\frac{\tilde{\mu}_i\left(\tilde{\kappa}_i^{2}-2\right)}{\rho_i}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j\left(\omega_i\rho_i\right)+D_{n-j}^{(i)}W_j\left(\omega_i\rho_i\right)\right],\quad i=\overline{1,M-1},$$

де для зручності запису введено позначення

$$G_j^{'}(x)\equiv d_\rho G_j(x)=\sum_{p=0}^{j}a_{j,p}\,\frac{(x)^p}{2^p\,p!}\left[\frac{x}{\rho}\mathrm{I}_p(x)-\frac{\mathrm{I}_{p+1}(x)}{\rho}\right],$$

$$W_j^{'}(x)\equiv d_\rho W_j(x)=\sum_{p=0}^{j}a_{j,p}\,\frac{(-x)^{p+1}}{2^p\,p!}\left[\frac{x}{\rho}K_p(x)+\frac{K_{p+1}(x)}{\rho}\right].$$

Структура матриці $\left(b_{k,l}\right)$ дозволяє досить легко звести її до трикутного вигляду і записати розв'язок систем (15) у вигляді рекурентних співвідношень

$$D_n^{(M)}=\frac{H_{n,2M-1}^{*}}{b_{2M-1,2M-1}^{*}};\ D_n^{(M-1)}=\frac{H_{n,2M-2}^{*}-D_n^{(M)}b_{2M-2,2M-1}^{*}}{b_{2M-2,2M-2}^{*}};$$

$$C_n^{(M-1)}=\frac{H_{n,2i-3}^{*}-D_n^{(M)}b_{2M-3,2M-1}^{*}-D_n^{(M-1)}b_{2M-3,2M-2}^{*}}{b_{2M-3,2M-3}^{*}};$$

$$D_n^{(i)}=\frac{H_{n,2i}^{*}-C_n^{(i+1)}b_{2i,2i+1}^{*}-D_n^{(i+1)}b_{2i,2i+2}^{*}}{b_{2i,2i}^{*}};\quad C_n^{(i)}=\frac{H_{n,2i-1}^{*}-D_n^{(i+1)}b_{2i-1,2i}^{*}-C_n^{(i+1)}b_{2i-1,2i+1}^{*}}{b_{2i-1,2i-1}^{*}}.\quad (16)$$

У розв'язках (16) i послідовно змінюється від $M-2$ до 1, а коефіцієнти $b_{i,j}^{*}$ і $H_{n,j}$ пов'язані із $b_{i,j}$ та $H_{n,j}^{*}$ співвідношеннями

$$b_{1,1}^{*}=b_{1,1},\quad b_{1,2}^{*}=b_{1,2},\quad b_{2i,2i}^{*}=b_{2i-1,2i}b_{2i,2i-1}-b_{2i,2i}b_{2i-1,2i-1},\quad b_{2i,2i+1}^{*}=-b_{2i,2i+1}b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2i,2i+2}^{*}=-b_{2i,2i+2}b_{2i-1,2i-1},\quad b_{2i+1,2i+1}^{*}=b_{2i,2i+1}^{*}\left(b_{2i-1,2i}b_{2i+1,2i-1}-b_{2i+1,2i}b_{2i-1,2i-1}\right)+b_{2i,2i}^{*}b_{2i+1,2i+1}b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2i+1,2i+2}^{*}=b_{2i,2i+2}^{*}\left(b_{2i-1,2i}b_{2i+1,2i-1}-b_{2i+1,2i}b_{2i-1,2i-1}\right)+b_{2i,2i}^{*}b_{2i+1,2i+2}b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2M,2M}^{*}=b_{2M-1,2M}^{*}b_{2M,2M-1}-b_{2M,2M}b_{2M-1,2M-1}^{*},$$

$$H_{n,2i+1}^{*}=H_{n,2i}^{*}\left(b_{2i-1,2i}b_{2i+1,2i-1}-b_{2i+1,2i}b_{2i-1,2i-1}\right)-\left(H_{n,2i-1}b_{2i+1,2i-1}-H_{n,2i+1}b_{2i-1,2i-1}\right)b_{2i,2i}^{*},\ i=\overline{1,M-1};$$

$$H_{n,1}^{*}=H_{n,1};\ H_{n,2M}^{*}=H_{n,2M-1}^{*}b_{2M,2M-1}^{*}-H_{n,2M}b_{2M-1,2M-1}^{*}.$$

За відомими $C_n^{(i)}$ та $D_n^{(i)}$ остаточний розв'язок задачі (1)-(4) одержано у вигляді

$$u^{(i)}(\rho,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j(\omega_i\rho)+D_{n-j}^{(i)}W_j(\omega_i\rho)\right],\ i=\overline{1,M}.\quad (17)$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

З метою апробації отриманих результатів був проведений порівняльний аналіз числових результатів, отриманих за співвідношеннями (17) при $M = 1$, тобто для простору з однією циліндричною вкладкою, із відомими результатами для однорідного циліндра [12], отриманими з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Такий розв'язок можна отримати зі співвідношень (17), якщо вважати, що циліндр контактує із простором, пружні сталі та густина якого є значно менші за відповідні величини матеріалу циліндра.

Для числового аналізу було вибрано циліндр із відносним радіусом внутрішньої поверхні $\rho_0 = 0.6$ та $\kappa_1^2 = 3.5$, на якій діє зовнішнє навантаження:

$$p(\tau) = p^* \times (1 - \exp(-\tau_0 \tau))^2, \qquad (18)$$

де p^* – розмірна величина (Па).

Залежність (18) дає змогу добре узгодити нульові початкові умови із крайовими, а параметр τ_0 при цьому дозволяє змінювати час виходу зовнішнього навантаження на стаціонарне значення.

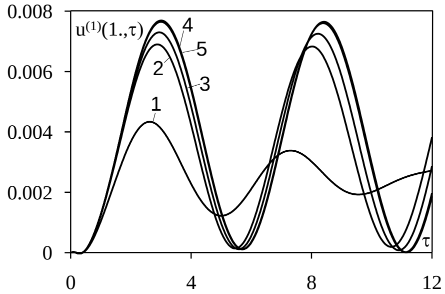


Рис. 2. Переміщення зовнішньої поверхні циліндра при різних механічних властивостях простору

На рис. 2 подано часовий розподіл знерозмірених переміщень $u^{(1)}(\rho, \tau)$ на поверхні $\rho = 1$ при $\kappa_2^2 = 2.5$ і різних відносних механічних властивостей простору: $\tilde{\mu}_2 = \tilde{c}_2 = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005$, відповідно криві 1, 2, 3, 4, 5. Розрахунки проводилися при $\tau_0 = 3$, у рядах за поліномами Лагерра утримувалося 60 членів.

Як видно з наведеного, зменшення відносних механічних властивостей простору призводить до збільшення амплітуди коливань та припинення процесу згасання хвиль, що добре узгоджується з фізикою явища. При значеннях відносних характеристик $\tilde{\mu}_2 = \tilde{c}_2 = 0.01$ і $\tilde{\mu}_2 = \tilde{c}_2 = 0.005$ результати практично співпадають (криві 4 та 5).

Результати розрахунку переміщень, отримані для значення $\tilde{\mu}_2 = \tilde{c}_2 = 0.005$, порівнювалися в свою чергу із результатами, одержаними для однорідного циліндра із використанням інтегрального перетворення Лапласа, наведеними в праці [12]. Виявилося, що при утриманні 60 членів ряду за поліномами Лагерра відносна похибка між результатами, отриманими двома методами для різних точок циліндра, не перевищує 0.5 %.

Окрім тестувань, було проведено також розрахунок напружено-деформованого стану в сталевому тонкостінному циліндрі ($\rho_0 = 0.9$, $\kappa_1^2 = 3.5$), вкладеному в середовище із пісковику ($\kappa_2^2 = 2.7$, $\tilde{c}_2 = 0.67$, $\tilde{\mu}_2 = 0.16$).

При цьому було покладено, що навантаження внутрішньої поверхні циліндра є функцією імпульсного типу:

$$p(\tau) = \begin{cases} p^* \times \left((1-\tau)^2 - 1\right)^2, \tau \le 2 \\ 0, \quad \tau > 2. \end{cases} \tag{18}$$

На рис. 3 подано часовий розподіл знерозмірених радіальних напружень $\sigma_\rho = \sigma_{\rho\rho}^{(i)}(\rho,\tau) / p^*$ у різних точках циліндра та простору. При цьому, як і при тестових розрахунках, утримувалося 60 членів ряду за поліномами Лагерра. Крива при $\rho = 0.9$ описує часову залежність зовнішнього навантаження.

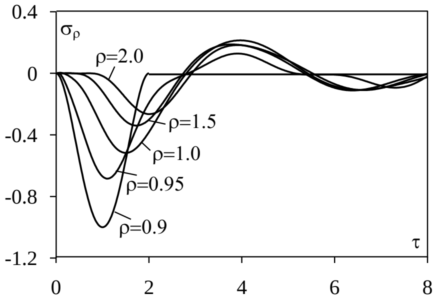


Рис. 3. Розподіл у часі радіальних напружень на різних поверхнях

Як свідчать наведені результати, максимального за модулем значення вказані напруження досягають на поверхні, де діє навантаження. На поверхні поділу матеріалів циліндра і зовнішнього середовища ($\rho = 1$) під час дії імпульсу навантаження радіальні напруження складають близько 50% від його рівня, а після моменту часу $\tau = 3$ змінюють свій знак і досить швидко затухають. Приблизно такі самі висновки можна зробити і щодо радіальних напружень у матеріалі середовища.

На рис.4 зображено зміну переміщень у різних точках циліндра і середовища при $p^* / \mu_1 = 0.01$.

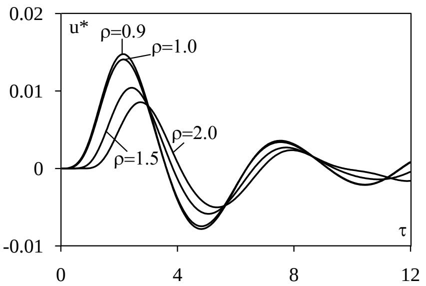


Рис. 4. Залежність від часу радіальних переміщень

Як видно з наведеного, переміщення двох граничних поверхонь циліндра практично співпадають, що добре узгоджується із закладеною в розрахунки малою відносною товщиною циліндра та податливістю оточуючого середовища.

Результати розрахунку безрозмірних колових напружень $\sigma_\varphi \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} / p^*$ наведено на рис. 5. При цьому напруження, що діють у просторі, для наглядності були збільшені в 10 разів.

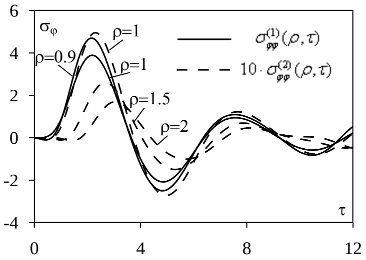


Рис. 5. Розподіл у часі радіальних напружень

Як свідчать наведені результати, колові напруження в циліндрі за абсолютним значенням перевищують відповідні радіальні майже у 5 разів. У просторі рівень цих напружень різко падає, що пояснюється значно нижчими пружними характеристиками його матеріалу. Максимального значення колові напруження набувають у моменти часу, що слідують відразу після закінчення дії імпульсу навантаження і якісно повторюють часовий розподіл радіальних переміщень.

ВИСНОВОК

Отже, у роботі отримано точний аналітичний розв'язок плоскої осесиметричної динамічної задачі теорії пружності для системи пружних циліндрів, вкладених без зазору та натягу в пружний простір з іншого матеріалу. Розв'язок отримано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною у вигляді ряду за поліномами Лагерра. Коефіцієнти цього ряду знаходяться для довільної кількості циліндричних вкладок із рекурентних співвідношень. Результати числового експерименту для граничного випадку та їх порівняння із відомими в літературі розв'язками, одержаними іншими методами, свідчать про високу ефективність та хорошу збіжність запропонованого підходу. В роботі також наведено числовий аналіз перехідного напружено-деформованого стану в масиві із пісковику з припасованим тонкостінним циліндром зі сталі. Запропоновану методику та, у певному наближенні, отримані результати можна використовувати, зокрема, при математичному моделюванні напружено-деформованого стану нафтодобувного обладнання та гірських порід при застосуванні технології гідравлічного розриву пластів [13].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей / А.Э. Бабаев. – К. : Наук. думка, 1990. – 176 с.
2. Liu G. Transient Wave Propagation in a Circular Annulus Subjected to Transient Excitation on Its Outer Surface / G. Liu, J. Qu // J. Acoust. Soc. Am. – 1998. – **1**04. – P. 1210–1220.
3. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach // Appl. math. and mech. V.16. – Amsterdam, London : North-Holland publ. co., 1973. – 425 p.
4. Слепян Л. И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепян, Ю.С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1980. – 343 с.
5. Wang X. An Elastodynamic Solution for Multilayered Cylinders / X. Wang, Y.N. Gong // Int. J. Eng. Sci. – 1992. – 30. – P. 25-33.
6. Gong Y. N. Radial Vibrations and Dynamic Stress in Elastic Hollow Cylinders / Y.N. Gong, X. Wang // Structural Dynamic : Recent Advances, Elsevier Sc. Publ., Elsevier, London, 1991. – P. 137-147.
7. Onyshko L. I. Stressed state of a hollow two-layer cylinder under dynamic loads / L.I. Onyshko, M.M. Senyuk // Material Science. – 2009. - 45, №1. – P. 55-61.

8. Yin X. C. Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse / X.C. Yin, Z.Q. Yue // J. Appl. Mech. – 2002. – 69, No 6. - P. 825-835.

9. Галазюк В. А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами / В.А. Галазюк // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – №1. – С. 3-7.

10. Timár I. The Laguerre polynomials method in the dynamic problem of elasticity for a multilayered half-space / I. Timár, H. Sulym, I. Turchyn, V. Shchukin // GÉP. – 2005. – No 6. – P. 5-9.

11. Колодій В. О. Метод поліномів Лагерра в динамічній задачі пружності для радіально-шаруватого циліндра / В.О. Колодій, І.М. Турчин // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 227-233.

12. Sneddon I. Fourie transforms / I. Sneddon. - McCraw-Hill Book Company, New York, 1951. – 542 p.

13. Мала гірнича енциклопедія. В 3-х т. / За ред. В.С. Білецького. – Т. 1. - Донецьк : Донбас, 2004. – 640 с.

REFERENCES

1. Babaev A.E. (1990), *Nestatcionarnye volny v sploshnykh sredakh s sistemoy otrazhayuschikh poverkhostey* [Non-stationary waves in continuous media with a system of reflective surfaces], Naukova Dumka, Kiev.

2. Liu, G. and Qu, J. (1998), Transient Wave Propagation in a Circular Annulus Subjected to Transient Excitation on Its Outer Surface, *J. Acoust. Soc. Am.*, 104, pp. 1210-1220.

3. Achenbach, J.D. (1973), Wave propagation in elastic solids, *Appl. math. and mech.*, vol. 16, North-Holland publ. co., Amsterdam, London.

4. Slepian, L.I. and Yakovlev, Yu.S. (1980), *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki* [Integral transforms in unsteady problems of mechanics], Sudostroenie, Leningrad.

5. Wang, X. and Gong, Y.N. (1992), An Elastodynamic Solution for Multilayered Cylinders, *Int. J. Eng. Sci.*, 30, pp. 25-33.

6. Gong, Y.N. and Wang, X. (1991), Radial Vibrations and Dynamic Stress in Elastic Hollow Cylinders, *Structural Dynamic: Recent Advances, Elsevier Sc. Publ.*, Elsevier, London, pp. 137-147.

7. Onyshko, L.I. and Senyuk, M.M. (2009), Stressed state of a hollow two-layer cylinder under dynamic loads, *Material Science*, 45, no. 1, pp. 55-61.

8. Yin, X.C. and Yue, Z.Q. (2002), Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse, *J. Appl. Mech.*, 69**,** no. 6, pp. 825-835.

9. Galazyuk, V.A. (1981), Chebyshev-Laguerre polynomials method in mixed problem for a linear differential equation of the second order with constant coefficients, *Dopovydy AN USSR*, ser. A, no. 1, pp. 3-7.

10. Timár, I., Sulym, H., Turchyn, I. and Shchukin, V. (2005), The Laguerre polynomials method in the dynamic problem of elasticity for a multilayered half-space, *GÉP*, no. 6, pp. 5-9.

11. Kolodiy, V.A. and Turchin, I.M. (2010), Laguerre polynomials method in dynamic elasticity problem for radial-layered cylinder, *Bulletin of the Lviv University. Ser.: meh.-math.*, vol. 73. pp. 227-233.

12. Sneddon, I. (1951), Fourie transforms, McCraw-Hill Book Company, New York.

13. Small Mining Encyclopedia. In 3 vol., Ed. V.S. Bielecki, vol. 1. (2004), Donbass, Donets'k.

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕНТОЧНОГО ПЬЕЗОМАГНИТНОГО КОМПОЗИТА

Фильштинский Л. А., д. ф.-м. н., профессор, Шрамко Ю. В., к. ф.-м. н.,
Носов Д. Н., аспирант, Еременко А. А., аспирант, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.

Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Методом регулярных структур построена макромодель двоякопериодического пьезомагнитного композитного материала, армированного упругими лентам. Соответствующая граничная задача связанной магнитоупругости сведена к интегро-дифференциальному уравнению, которое было решено численно при помощи метода механических квадратур. В результате макромодули получены в замкнутом виде через функционалы, построенные на решениях соответствующей граничной задачи и содержащие полную информацию о микроструктуре фундаментальной ячейки. Приводятся результаты расчета.
Ключевые слова: пьезомагнитная матрица, ленточный композит, двоякопериодическая задача, эффективные характеристики.

ЕФЕКТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРІЧКОВОГО П'ЄЗОМАГНІТНОГО КОМПОЗИТА

Фільштинський Л. А., д. ф.-м. н., професор, Шрамко Ю. В., к. ф.-м. н.,
Носов Д. М., аспірант, Єременко Г. А., аспірант, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.

Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, Україна

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Методом регулярних структур побудована макромодель двоперіодичного п'єзокомпозита, армованого пружними стрічками. Відповідна гранична задача зв'язаної магнітопружності зведена до інтегро-диференціального рівняння, яке було розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Як результат, макромодулі отримані в замкнутому вигляді через функціонали, які побудовані на розв'язках відповідної граничної задачі та містять у собі вичерпну інформацію про мікроструктуру комірки. Наведені результати розрахунків.
Ключові слова: п'єзомагнітна матриця, стрічковий композит, двоперіодична задача, ефективні характеристики.

EFFECTIVE MODULI OF COMPOSITE MATERIAL WITH RIBBON FIBERS

Filshtinskii L. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Shramko Yu. V., Ph.D. in Physics and Maths, Nosov D. N., Graduate Student,
Eremenko A. A., Graduate Student, Sushko T. S., Ph.D. in Physics and Maths

Sumy State University,
Rimsky-Korsakov str., 2, Sumy, Ukraine

Here we study the properties of piezomagnetic materials reinforced with regular double periodic system of elastic ribbons. It is assumed that average values of the component of magnetic induction vector and average components of elastic tensor are set in the structure.

General representation of solution is investigated in class of quasi-periodic functions and described with Weierstrass zeta-function. As a result, the complex potentials are obtained using Cauchy type generalized integrals form. The representations provide: 1) a double periodical distribution of mechanical strains, magnetic induction and magnetic intensity in a structure; 2) a quasi-periodicity distribution of components of mechanical displacement vector and magnetic potential component; 3) an existence of given average values in structure. Using obtained formulas, a coupled magnetoelasticity boundary problem is reduced to singular integral-differential equation (SIDE) that was solved using numerical scheme of mechanical quadrature method.

A homogeneous piezoceramic medium is regarded as a macromodel of a regularly reinforced piezoceramic material with equation of state coincided with the relationship between the mean values of the components of stresses and the vector of magnetic-field intensity in the structure on the one hand and the mean values of strains and the vector of magnetic induction on the other hand. Thus, using regular structure methods we have constructed the algorithm of calculations of the macroscopic structure parameters via functionals, defined on solutions of SIDE, and contained complete information about the microstructure of the cell. As a result of computation, we have obtained that reinforcing of piezomagnetic matrix with piezopassive but rigid ribbons is yielded in strengthening of the all structure and enhancing of a piezo characteristic of composite material.

Key words: piezomagnetic matrix, ribbon reinforced composite, double periodic boundary value problem, effective moduli.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Решение наиважнейших задач, которые возникают в науке и производстве по повышению надежности, снижению материалоемкости конструкций и сооружений, тесно связано с разработкой и использованием композитных материалов (КМ). Одним из новых классов таких материалов являются КМ с пьезомагнитными компонентами структуры.

Создание пьезокерамики, проявляющей «гигантскую магнитострикцию» [1] - Терфинол-Д - явилось мощным толчком к использованию пьезомагнетиков в современных областях науки и техники, в основном в радиоэлектронике, управляющих системах и вычислительной технике. Учитывая дороговизну таких материалов, а также недостаточную механическую прочность, на практике прибегают к использованию пьезокомпозитов на их основе. Возможность оптимизации и управления структурой КМ открывает путь к созданию новых пьезомагнитных материалов с наперед заданными магнитомеханическими свойствами. В связи с этим, для разработки эффективного метода проектирования состава и структуры КМ необходимы аналитические соотношения, которые описывают зависимости макромодулей КМ от геометрических параметров и физико-механических свойств компонентов.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЕ И ПУБЛИКАЦИЙ

В механике композиционных материалов сформировалось два основных направления – механика стохастических [2-4] и механика регулярных структур [5-7].

Современное производство ленточных (волокнистых) композитов позволяет получать двоякопериодические структуры или близкие к ним. Поэтому при построении макромоделей таких материалов в силу геометрической симметрии можно предположить о двоякопериодическом характере распределения соответствующих полевых величин, которые действуют в композите, и для их описания использовать двоякопериодические функции. Именно эта идея лежит в основе метода регулярных структур [8]. С использованием указанного метода, а так же техники сингулярных интегральных уравнений, одним из авторов в [6] построена модель ленточного упругого композита с анизотропными компонентами структуры в условиях плоской деформации. В работе [8] получены макромодули упругого анизотропного регулярного композита с тонкими неоднородностями, при этом использовался аппарат метода граничных элементов. Методом Мори–Танака в [9] получены макромодули ленточного упругого композита, при этом ленты рассматривались как предельный случай эллиптических волокон.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе, которая основана на результатах исследований [6], проведем осреднение магнитных и механических свойств ленточного пьезомагнитного композита. Эти задачи интересны еще и тем, что являются основой для решения более сложных задач электромагнитоупругости [11].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотри модель ленточного композиционного материала (ЛКМ):

1. Пьезомагнитная матрица армирована в направлении оси $0x_3$ двоякопериодической системой групп тонких упругих инородных лент, параллельных плоскости $0x_1x_3$. Основные периоды армирования ω_1 и ω_2 (рис. 1).

2. Вследствие малости толщины ленты d_j будем считать, что она непрерывно скреплена с матрицей вдоль своей срединной плоскости, сечение которой плоскостью $0x_1x_2$ представляет собой отрезок Γ_j, $\left(j=\overline{1,M}\right)$ с концевыми точками a_j, b_j, $\left(\operatorname{Im} a_j = \operatorname{Im} b_j = h_j\right)$.
3. При нагружении в плоскости поперечного сечения ЛКМ лента работает лишь на растяжение – сжатие, причем жесткость ее значительно превышает жесткость матрицы. Напряжения σ_{22}, смещения u_1, u_2 и компонента вектора магнитной индукции B_2 непрерывно продолжимы через Γ_j, а σ_{12} претерпевает скачок.
4. В структуре ЛКМ имеют место средние напряжения $\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle$ и средние компоненты вектора магнитной индукции $\left\langle B_j \right\rangle$.

Модель магнитоупругости в комплексных переменных содержит материальные уравнения (плоское напряженное состояние) [12]:

$$e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + g_{21}B_2, \quad e_{22} = s_{12}\sigma_{11} + s_{22}\sigma_{22} + g_{22}B_2, \quad 2e_{12} = s_{66}\sigma_{12} + g_{16}B_1 \qquad (1)$$

$$H_1 = -g_{16}\sigma_{12} + \chi_{11}B_1, \quad H_2 = -g_{21}\sigma_{11} - g_{22}\sigma_{22} + \chi_{22}B_2 .$$

Здесь $s_{ij} = s_{ij}^B$ – коэффициенты деформации материала; $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma,B}$ – пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженности; $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$ – коэффициенты магнитной восприимчивости; e_{ij}, H_j, B_j – тензор деформации, векторы напряженности и индукции магнитного поля соответственно.

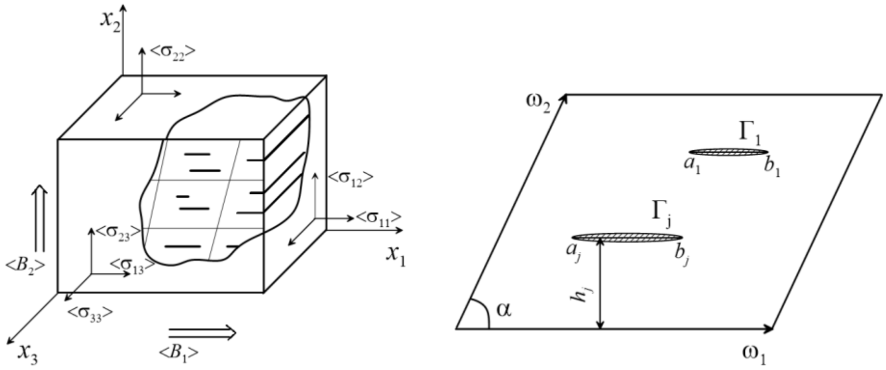


Рис. 1. Структура фундаментальной ячейки

Уравнения равновесия и магнитостатики

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0, \quad \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_2 H_1 - \partial_1 H_2 = 0, \quad \partial_m = \partial/\partial x_m . \qquad (2)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 . \qquad (3)$$

Условия совместности деформации

$$\partial_2^2 e_{11} + \partial_1^2 e_{22} - 2\partial_1\partial_2 e_{12} = 0 . \qquad (4)$$

К уравнениям (1)-(4) необходимо присоединить соответствующие механические и магнитные краевые условия.

Для записи модели в комплексных переменных введем функцию напряжений $F_1(x_1, x_2)$ и магнитный потенциал $F_2(x_1, x_2)$ по формулам:

$$\sigma_{11} = \partial_2^2 F_1, \quad \sigma_{22} = \partial_1^2 F_1, \quad \sigma_{12} = -\partial_1\partial_2 F_1, \quad B_1 = \partial_2 F_2, \quad B_2 = -\partial_1 F_2. \tag{5}$$

С учетом соотношений (1) и (5) приведем уравнение совместности (4) и последнее уравнение в (2) к системе:

$$L_{11}(\partial_1, \partial_2) F_1 - L_{12}(\partial_1, \partial_2) F_2 = 0, \quad L_{21}(\partial_1, \partial_2) F_1 + L_{22}(\partial_1, \partial_2) F_2 = 0,$$
$$L_{11}(\partial_1, \partial_2) = s_{11}\partial_2^4 + (2s_{12} + s_{66})\partial_1^2\partial_2^2 + s_{22}\partial_1^4, \tag{6}$$
$$L_{12}(\partial_1, \partial_2) = g_{22}\partial_1^3 + g_{26}\partial_1\partial_2^2 = L_{21}(\partial_1, \partial_2), \quad L_{22}(\partial_1, \partial_2) = \chi_{22}\partial_1^2 + \chi_{11}\partial_2^2, \quad g_{26} = g_{21} + g_{16}.$$

Пусть

$$F_1 = -L_{22}U, \quad F_2 = L_{21}U. \tag{7}$$

Тогда, второе уравнение в (6) выполнится тождественно, а первое дает:

$$\Delta(\partial_1, \partial_2) = -\left(L_{11}L_{22} + L_{12}^2\right) = 0.$$

Это уравнение – однородное, эллиптического типа. Соответствующее ему характеристическое алгебраическое уравнение имеет вид:

$$\sum_{m=0}^{3} a_{2m}\mu^{2m} = 0, \quad a_0 = s_{22}\chi_{22} + g_{22}^2,$$
$$a_2 = s_{22}\chi_{11} + (2s_{12} + s_{66})\chi_{22} + 2g_{26}g_{22} \tag{8}$$
$$a_4 = s_{11}\chi_{22} + (2s_{12} + s_{66})\chi_{11} + g_{26}^2, \quad a_6 = s_{11}\chi_{11}.$$

Уравнение (8) не может иметь действительных корней, в дальнейшем считаем, что они простые $\operatorname{Im}\mu_1 > 0$, $\operatorname{Im}\mu_2 > 0$, $\operatorname{Im}\mu_3 > 0$, $\mu_4 = \overline{\mu_1}$, $\mu_5 = \overline{\mu_2}$, $\mu_6 = \overline{\mu_3}$.

Функцию напряжений, магнитный потенциал и полевые величины определим последовательно, исходя из соотношений (7), (5). Имеем:

$$F_1(x_1, x_2) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k f_k''(z_k), \quad F_2(x_1, x_2) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k f_k'''(z_k), \quad \Phi_k(z_k) = f_k^{(IV)}(z_k),$$
$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\{\mu_k^2, -\mu_k, 1\}\gamma_k\Phi_k(z_k) \tag{9}$$
$$\{B_1, B_2\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\{\mu_k, -1\}\lambda_k\Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\{1, \mu_k\}\mu_k r_k\Phi_k(z_k),$$
$$\gamma_k = -\chi_{22} - \chi_{11}\mu_k^2, \quad \lambda_k = g_{22} + g_{26}\mu_k^2, \quad r_k = g_{16}\gamma_k + \chi_{11}\lambda_k, \quad z_k = x_1 + \mu_k x_2 = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z.$$

Наконец, в результате совместного интегрирования соотношений (3), получим вектор механического перемещения в виде:

$$\{u_1, u_2\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\{p_{1k}, p_{2k}\}\varphi_k(z_k), \quad \varphi_k'(z_k) = \Phi_k(z_k), \tag{10}$$

$$p_{1k}=\left(s_{11}\mu_k^2+s_{12}\right)\gamma_k-g_{21}\lambda_k,\quad p_{2k}=\left(s_{12}\mu_k+s_{22}\mu_k^{-1}\right)\gamma_k-g_{22}\mu_k^{-1}\lambda_k.$$

Компоненты вектора напряжения, нормальная компонента вектора магнитной индукции и касательная компонента вектора магнитной напряженности на некоторой дуге AB определяется согласно (9) формулами:

$$\left\{X_{1n},X_{2n}\right\}=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\left\{\mu_k,-1\right\}\gamma_k a_k\left(\psi\right)\Phi_k\left(z_k\right),\quad a_k\left(\varphi\right)=dz_k/ds \tag{11}$$

$$B_n=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k a_k\left(\psi\right)\Phi_k\left(z_k\right),\quad H_S=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k r_k a_k\left(\psi\right)\Phi_k\left(z_k\right).$$

Интегрируя (11), определяем главный вектор механических усилий, действующих на AB, поток вектора магнитной индукции через AB и работу вектора магнитной напряженности на AB. Имеем:

$$X_1=\int_{AB}X_{1n}ds=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\gamma_k\varphi_k\left(z_k\right)\Big|_A^B,\quad X_2=\int_{AB}X_{2n}ds=-2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\varphi_k\left(z_k\right)\Big|_A^B, \tag{12}$$

$$\Pi=\int_{AB}B_n ds=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\varphi_k\left(z_k\right)\Big|_A^B,\quad \Gamma=\int_{AB}H_s ds=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k r_k\varphi_k\left(z_k\right)\Big|_A^B.$$

Согласно принятой модели контакта по линии усилие на ленту передается за счет разности контактных касательных напряжений на берегах Γ_j. Запишем согласно рис. 1:

$$F_j\, d\sigma_{11}^j/dx=\sigma_{12}^- -\sigma_{12}^+ = q_j\left(x\right),\quad \sigma_{11}^j\left(x_0\right)=-\int_{x_0}^{b_j}q_j\left(x\right)F_j^{-1}ds,\quad x_1=x, \tag{13}$$

где F_j – площадь поперечного сечения j-го волокна, σ_{11}^j – погонное растягивающее напряжение в точке $x_0\in\Gamma_j$.

Условия сопряжения волокна и матрицы представим согласно (1) и (13) в виде:

$$\left[e_{11}\right]=s_{11}\left[\sigma_{11}\right]=0,\quad \left[e_{22}\right]=s_{12}\left[\sigma_{11}\right],\quad \left[2e_{12}\right]=s_{66}q\left(x\right)+g_{16}\left[B_1\right],\quad \left[\partial_1 u_2\right]=0. \tag{14}$$

Здесь учтено, что $\left[f\right]=f^- - f^+$, $\left[\sigma_{22}\right]=0$, $\left[e_{11}\right]=0$, $\left[B_2\right]=0$, $\left[\sigma_{12}\right]=q_j\left(x\right)$ на оси ленты Γ_j.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Представим комплексные потенциалы, фигурирующие в (9) в виде обобщенных интегралов типа Коши:

$$\Phi_k\left(z_k\right)=A_k-c_k\int_\Gamma q\left(t\right)\zeta\left(t_k-z_k\right)dt=\varphi_k'\left(z_k\right),\quad q\left(t\right)=\left\{q_j\left(t\right),t\in\Gamma_j\right\}, \tag{15}$$

$$\varphi_k\left(z_k\right)=A_k z_k+c_k\int_\Gamma q\left(t\right)\ln\sigma\left(z_k-t_k\right)dt,\quad \Gamma=U\Gamma_j,\quad t=x+ih_j,\quad t_k=x+\mu_k h_j,$$

где $\zeta\left(z\right)$ и $\sigma\left(z\right)$, соответственно, мероморфная дзета-функция и целая сигма-функция Вейерштрасса [13], A_k – константы, отвечающие за существование средних величин $\left\langle\sigma_{ij}\right\rangle$, $\left\langle B_j\right\rangle$, c_k – константы, введенные для выполнения условий сопряжения (14).

Представления (15) обеспечивают двоякопериодическое распределение механических напряжений, полей магнитной индукции и напряженности, а также квазипериодический характер поля перемещений и потока индукции магнитного поля. В самом деле, в силу групповых свойств эллиптических функций [13], имеем:

$$\zeta\left(z_k+\omega_m^{(k)}\right)-\zeta\left(z_k\right)=\delta_m^{(k)}, \quad \ln\sigma\left(z_k+\omega_m^{(k)}\right)-\ln\sigma\left(z_k\right)=\pi i+\delta_m^{(k)}\left(z_k+0{,}5\omega_m^{(k)}\right), \tag{16}$$

$$\omega_1^{(k)}=\omega_1, \quad \left(\operatorname{Im}\omega_1=0\right), \quad \omega_2^{(k)}=\operatorname{Re}\omega_2+\mu_k\operatorname{Im}\omega_2=h+\mu_k H,$$

$$\delta_m^{(k)}=2\zeta\left(0{,}5\omega_m^{(k)}\right), \quad m=\overline{1,2}, \quad k=\overline{1,3}.$$

Причем, необходимо иметь ввиду, что $\zeta\left(z_k\right)$ и $\sigma\left(z_k\right)$ построены на периодах $\omega_1^{(k)}$ и $\omega_2^{(k)}$. Соответственно этому записывается соотношение Лежандра [13]:

$$\delta_1^{(k)}\omega_2^{(k)}-\delta_2^{(k)}\omega_1^{(k)}=2\pi i. \tag{17}$$

Из (15) с учетом соотношений (16) и двоякой периодичности $\Phi_k\left(z_k\right)$, получаем:

$$\Phi_k\left(z_k+\omega_m^{(k)}\right)-\Phi_k\left(z_k\right)=c_k\delta_m^{(k)}\int_\Gamma q(t)\,dt=0, \quad \left(m=\overline{1,2};\ k=\overline{1,3}\right) \tag{18}$$

$$\varphi_k\left(z_k+\omega_m^{(k)}\right)-\varphi_k\left(z_k\right)=A_k\omega_m^{(k)}-c_k\delta_m^{(k)}l_k, \quad l_k=\int_\Gamma t_k q(t)\,dt.$$

Таким образом, из дополнительного условия равновесия j-го включения

$$\int_{\Gamma_j} q_j(t)\,dt=0, \quad \left(j=\overline{1,M}\right) \tag{19}$$

вытекают условия периодичности и квазипериодичности в (18).

Обоснование интегральных представлений (15). Покажем, что константы c_k, фигурирующие в этих представлениях, вполне определяются из контактных условий сопряжения (14). Для этого запишем следы функций $\Phi_k\left(z_k\right)$ на берегах Γ. Имеем, с учетом формул Сохоцкого–Племеля [13]:

$$\Phi_k^{\pm}\left(t_{ok}\right)=A_k\mp\pi i c_k q\left(t_0\right)-c_k\int_\Gamma q(t)\zeta\left(t_k-t_{0k}\right)dt, \quad t_0\in\Gamma, \tag{20}$$

$$\left[\Phi_k\left(t_{ok}\right)\right]=\Phi_k^{-}\left(t_{0k}\right)-\Phi_k^{+}\left(t_{0k}\right)=2\pi i c_k q\left(t_0\right), \quad t_{0k}=\operatorname{Re}t_0+\mu_k\operatorname{Im}t_0.$$

С учетом скачков в (20) и формул для полевых величин (9), (10), сводим условия сопряжения (14), после преобразований к системе:

$$2\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^m c_k=Q_m, \quad \left(m=\overline{-1,4}\right), \tag{21}$$

$$Q_0=0, \quad Q_2=0, \quad Q_4=0, \quad a_0=s_{22}\chi_{22}+g_{22}^2, \quad Q_1=g_{21}/2\pi\Delta_0, \quad Q_3=\left(g_{16}\chi_{22}-g_{22}\chi_{11}\right)/2\pi\chi_{11}\Delta_0,$$

$$Q_{-1}=\left(2\pi a_0\right)^{-1}\left(s_{12}-g_{21}m_0\Delta_0^{-1}\right), \quad m_0=s_{22}\chi_{11}+g_{22}g_{26}, \quad \Delta_0=\chi_{11}g_{22}-\chi_{22}g_{26}.$$

Система Вандермонда (21) в принятых ранее предположениях относительно чисел μ_k, однозначно разрешима [13]. Для нахождения A_k, будем исходить из формул (12) для интегральных величин и учитывать выражения для приращений (18). Имеем (рис. 1):

на грани ячейки BC $\left(\psi=\alpha+3\pi/2\right)$

$$H\langle\sigma_{11}\rangle - h\langle\sigma_{12}\rangle = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\gamma_k\alpha_2^{(k)}, \quad H\langle\sigma_{12}\rangle - h\langle\sigma_{22}\rangle = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\alpha_2^{(k)}, \tag{22}$$

$$H\langle B_1\rangle - h\langle B_2\rangle = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\alpha_2^{(k)};$$

на грани ячейки CD $(\psi = \pi/2)$

$$\omega_1\left\{\langle\sigma_{12}\rangle, \langle\sigma_{22}\rangle, \langle B_2\rangle\right\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\left\{-\mu_k\gamma_k, \gamma_k, -\lambda_k\right\}\alpha_1^{(k)},$$

$$\alpha_m^{(k)} = A_k\omega_m^{(k)} - c_k l_k\delta_m^{(k)}, \ \left(k = \overline{1,3}, m = \overline{1,2}\right), \ \alpha_2^{(k)}\omega_1^{(k)} - \alpha_1^{(k)}\omega_2^{(k)} = 2\pi i c_k l_k.$$

Из этих равенств с учетом соотношения Лежандра (17), находим:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\left\{\mu_k\gamma_k, \gamma_k, \lambda_k\right\}A_k^* = \left\{-\langle\sigma_{12}\rangle, \langle\sigma_{22}\rangle, -\langle B_2\rangle\right\},$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_k A_k^* = \langle B_1\rangle + 4\pi F_0^{-1}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{3}c_k l_k\lambda_k, \tag{23}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^2 A_k^* = \langle\sigma_{11}\rangle + 4\pi F_0^{-1}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{3}c_k l_k\gamma_k\mu_k, \quad A_k^* = A_k - \delta_1^{(k)}\omega_1^{-1}c_k l_k, \quad F_0 = H\omega_1.$$

Уравнения (23) получены при условии совместности

$$\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k c_k l_k = 0. \tag{24}$$

Соотношения (23) содержат пять вещественных уравнений относительно трех комплексных постоянных A_1, A_2, A_3. Для их однозначного определения зафиксируем средний угол поворота ячейки $\langle\varepsilon\rangle$, положив его равным нулю. Имеем, с учетом (10), шестое уравнение

$$2\langle\varepsilon\rangle = \langle\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1\rangle = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\left(p_{2k} - \mu_k p_{1k}\right)A_k^* + 4\pi F_0^{-1}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{3}p_{1k}c_k l_k = 0. \tag{25}$$

Из равенств (23), (25) приходим после преобразований к системе линейных алгебраических уравнений типа Вандермонда

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^m A_k^* = R_m, \quad \left(m = \overline{-1,4}\right), \tag{26}$$

где

$$\Delta_0 R_0 = g_{26}\langle\sigma_{22}\rangle - \chi_{11}\langle B_2\rangle, \quad \Delta_0 R_1 = \chi_{11}\langle B_1\rangle - g_{26}\langle\sigma_{12}\rangle, \quad \Delta_0 R_2 = \chi_{22}\langle B_2\rangle - g_{22}\langle\sigma_{22}\rangle,$$

$$\Delta_0 R_3 = g_{22}\langle\sigma_{12}\rangle - \chi_{22}\langle B_1\rangle, \quad \chi_{11}R_4 = -\langle\sigma_{11}\rangle - \chi_{22}R_2 - l_0F_0^{-1}, \quad \Delta_0 = \chi_{11}g_{22} - g_{26}\chi_{22},$$

$$\alpha_0 R_{-1} = \left(g_{26}m_0\Delta_0^{-1} - s_{12} - 0,5s_{66}\right)\langle\sigma_{12}\rangle - \left(\chi_{11}m_0\Delta_0^{-1} + 0,5g_{16}\right)\langle B_1\rangle.$$

Таким образом, представления комплексных потенциалов (15) корректны в том смысле, что они обеспечивают двоякопериодическое распределение механических напряжений, магнитной напряженности и индукции в структуре; квазипериодическое распределение механических перемещений и магнитного потенциала; выполнение условий сопряжения (14); существование в структуре заданных средних величин $\langle\sigma_{ij}\rangle$, $\langle B_j\rangle$.

Для определения контактного напряжения $q(t)$ составим условие совместности деформаций волокна и матрицы (ниже считаем, что в ячейке имеется одно волокно). При этом, имеем следующие упрощения, которые будут учитываться ниже. В силу (19), учитывая (21), (26) и (27), имеем:

$$t = x + ih_1, \quad t_k = x + \mu_k h_1, \quad q(t) = q_0(x), \quad l_k = \int_{\Gamma_1} x q_0(x)\, ds = l_0 \tag{27}$$

$$\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3} c_k \gamma_k l_k = 0, \quad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3} c_k \gamma_k \mu_k l_k = \frac{1}{4\pi} l_0, \quad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3} c_k \lambda_k l_k = 0, \quad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3} c_k p_{1k} l_k = 0.$$

Приравнивая деформацию в матрице и волокне в точке x_0 с учетом (13) приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению на Γ_1

$$\int_{\Gamma_1} G(x, x_0)\, q_0(x)\, dx + \frac{s_{11}^{(1)}}{s_{11} F_1} \int_{x_0}^{b_1} q_0(x)\, dx = N, \tag{28}$$

где

$$G(x, x_0) = x F_0^{-1} + s_{11}^{-1} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{1k} c_k \left[\delta_1^{(k)} \omega_1^{-1} x - \zeta_k (x - x_0) \right], \quad N = -\langle \sigma_{11} \rangle - s_{12} s_{11}^{-1} \langle \sigma_{22} \rangle - g_{21} s_{11}^{-1} \langle B_2 \rangle.$$

Решение этого уравнения в классе функций с корневыми особенностями на концах Γ_1 фиксируется дополнительным условием (19).

После определения функции $q_0(x)$ магнитоупругое поле в ЛКМ определяется по формулам (9) с учетом представлений (15).

ЭФФЕКТИВНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛКМ

Интерес представляет проблема определения магнитоупругих свойств такого материала. При рассмотрении этого вопроса будем исходить из того, что упругие перемещения в структуре и магнитный потенциал – квазипериодические функции и, следовательно, их можно сопоставить с соответствующими величинами в однородной (модельной) среде, где они линейно зависят от координат. В соответствии с этим замечанием можем записать, с учетом (10), (18):

$$\begin{gathered}
u_1(x_1 + \omega_1, x_2) - u_1(x_1, x_2) = \omega_1 \langle e_{11} \rangle = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{1k} \alpha_1^{(k)}, \\
u_2(x_1 + \omega_1, x_2) - u_2(x_1, x_2) = \omega_1 \langle \partial_1 u_2 \rangle = \omega_1 \left(\langle e_{12} \rangle - \langle \varepsilon \rangle \right) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{2k} \alpha_1^{(k)}, \\
u_1(x_1 + h, x_2 + H) - u_1(x_1, x_2) = h \langle e_{11} \rangle + H \left(\langle e_{12} \rangle + \langle \varepsilon \rangle \right) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{1k} \alpha_2^{(k)}, \\
u_2(x_1 + h, x_2 + H) - u_2(x_1, x_2) = H \langle e_{22} \rangle + h \left(\langle e_{12} \rangle - \langle \varepsilon \rangle \right) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_{2k} \alpha_2^{(k)},
\end{gathered} \tag{29}$$

где $\langle e_{ik} \rangle$ и $\langle \varepsilon \rangle$ – соответствующие деформации и угол поворота ячейки в модельной среде.

Для осреднения магнитных свойств воспользуемся представлениями магнитной напряженности в (3), откуда следуют равенства:

$$F(x_1 + \omega_1, x_2) - F(x_1, x_2) = \omega_1 \langle H_1 \rangle = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k r_k \alpha_1^{(k)}, \tag{30}$$

$$F\left(x_1+h,x_2+H\right)-F\left(x_1,x_2\right)=h\langle H_1\rangle+H\left\langle H_2\right\rangle=2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k r_k\alpha_2^{(k)}.$$

Учитывая соотношения (20), (30) и введя стандартное решение $q_0^c\left(x\right)$, соответствующее правой части $N=1$, приходим к следующим материальным уравнениям для макромодели

$$\langle e_{11}\rangle=a_{11}\left\langle\sigma_{11}\right\rangle+a_{12}\left\langle\sigma_{22}\right\rangle+a_{13}\left\langle B_2\right\rangle,\quad 2\langle e_{12}\rangle=s_{66}\left\langle\sigma_{12}\right\rangle+g_{16}\left\langle B_1\right\rangle,$$

$$\langle e_{22}\rangle=a_{21}\left\langle\sigma_{11}\right\rangle+a_{22}\left\langle\sigma_{22}\right\rangle+a_{23}\left\langle B_2\right\rangle,$$

$$\langle H_1\rangle=-g_{16}\left\langle\sigma_{12}\right\rangle+\chi_{11}\left\langle B_1\right\rangle,\quad \langle H_2\rangle=a_{31}\left\langle\sigma_{11}\right\rangle+a_{32}\left\langle\sigma_{22}\right\rangle+a_{33}\left\langle B_2\right\rangle, \tag{31}$$

где

$$a_{11}=s_{11}\left(1-l_0^cF_0^{-1}\right),\quad a_{12}=s_{12}\left(1-l_0^cF_0^{-1}\right),\quad a_{13}=g_{21}\left(1-l_0^cF_0^{-1}\right),$$

$$a_{22}=s_{22}\left(1-s_{12}^2l_0^cs_{11}^{-1}\right),\quad a_{23}=g_{22}\left(1-l_0^cF_0^{-1}\,g_{21}s_{12}/g_{22}s_{11}\right),\quad a_{33}=\chi_{22}\left(1+l_0^cF_0^{-1}\,g_{21}^2/s_{11}\chi_{22}\right),$$

$$q_0\left(x\right)=n\left(s,g\right)q_0^c\left(x\right),\quad n\left(s,g\right)=-\langle\sigma_{11}\rangle-\frac{s_{12}}{s_{11}}\langle\sigma_{22}\rangle-\frac{g_{21}}{s_{11}}\langle B_2\rangle,\quad l_0=n\left(s,g\right)\int_{\Gamma_1}xq_0^c\left(x\right)dx.$$

Под константами a_{ij} понимаем эффективные магнитоупругие параметры ЛКМ. Величины s_{66}, g_{16}, χ_{11} – совпадают с соответствующими материальными константами матрицы.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматривается композит тетрагонального строения, матрица которого изготовлена из пьезокерамики *Terfenol-D* [12]: $s_{11}/s_0=119{,}7$, $s_{22}/s_0=17{,}18$, $s_{12}/s_0=-6$, $s_{66}/s_0=119{,}77$, $g_{16}/g_0=215{,}54$, $g_{21}/g_0=-100{,}08$, $g_{22}/g_0=207{,}63$, $\chi_{11}/\beta_0=76{,}9$, $\chi_{22}/\beta_0=188{,}57$, $s_0=10^{-6}$ МПа$^{-1}$, $g_0=10^{-5}$ МТл$^{-1}$, $\beta_0=10^{-3}$ МПа/МТл^2. Волокно – анизотропный материал, жесткость которого значительно превышает жесткость матрицы.

На рис. 2а построены зависимости макромодуля a_{11}/s_{11} в функции параметра $\lambda=2l/\omega_1$, где l – ширина ленты. Размеры ячейки $\omega_1=2$ и $\omega_2=2i$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям модуля податливости волокна $s_{11}^{(1)}/s_0=0{,}01;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 1$ соответственно. Влияние пьезоэффекта на осредненные характеристики приведено на рис. 2б. Кривые 1-6 соответствуют макромодулю a_{11}/s_{11}, построенные для композита с фундаментальной ячейкой $\omega_1=2$, $\omega_2=2i$ (кривые 3-6) и $\omega_1=2$, $\omega_2=i$ (кривые 1, 2) в функции параметра $\lambda=2l/\omega_1$. Модуль податливости волокна для кривых 1-4 и 5-6 $s_{11}^{(1)}/s_0=0{,}01;1$ соответственно. Сплошные линии отвечают матрице из *Terfenol-D*, штрихпунктирные – пьезопассивной матрице (*Terfenol-D* с нулевыми пьезомодулями). Как следует из полученных результатов, армирование жесткими упругими лентами приводит к упрочнению всей структуры, кроме того, возрастает пьезомодуль a_{13}/g_{21}. К упрочнению ЛКМ так же приводит уменьшение расстояния между лентами. Остальные физико-механические характеристики ЛКМ не изменяются. Кроме того, установлено, что наличие пьезоэффекта существенно влияет на механические характеристики ЛКМ: модуль упругости a_{11}/s_{11} уменьшается на 15%.

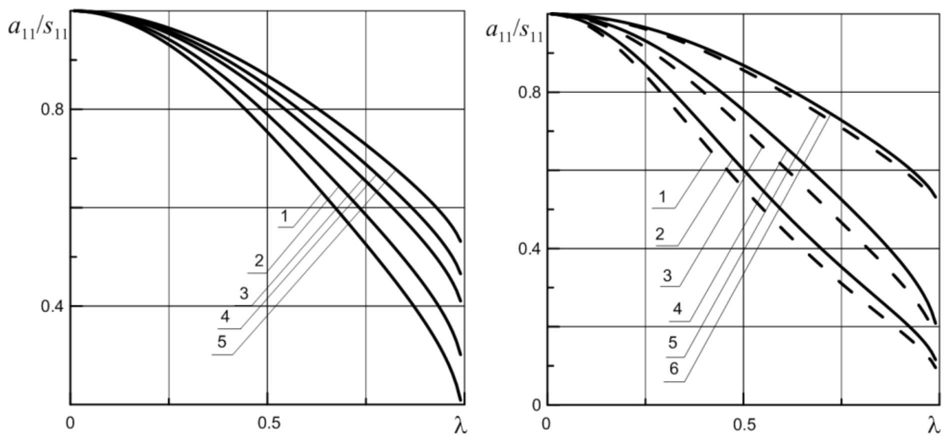


Рис. 2. а) макромодуль композита a_{11}/s_{11} в функции параметра $\lambda = 2l/\omega_1$; б) влияние пьезоэффекта на осредненные характеристики композита

ВЫВОДЫ

В работе исследованы свойства двоякопериодических ленточных композитов с пьезокерамической матрицей в условиях плоского напряженного состояния. Предполагается, что в структуре заданы средние компоненты тензора механических напряжений и вектора индукции магнитного поля.

Комплексное представление решения разыскивалось в классе квазипериодических функций и описывалось дзета-функцией Вейерштрасса. Предложен подход, при котором граничная задача магнитоупругости сведена только к одному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению первого рода на разомкнутом контуре. Впоследствии получена численная схема реализации построенного алгоритма с использованием метода механических квадратур.

Схема решения задачи осреднения упругих ЛКМ была обобщена на случай ЛКМ с пьезомагнитной матрицей. Методом регулярных структур построена процедура нахождения макроскопических параметров структуры через функционалы, которые определяются на решениях интегро-дифференциального уравнения и содержат полную информацию о микроструктуре ячейки. Как следует из полученных результатов, армирование жесткими упругими лентами приводит к упрочнению всей структуры, кроме того возрастает пьезомодуль a_{13}/g_{21} . К упрочнению ЛКМ так же приводит уменьшение расстояния между лентами. Остальные физико-механические характеристики ЛКМ не изменяются. Кроме того, установлено, что наличие пьезоэффекта существенно влияет на механические характеристики ЛКМ: модуль упругости a_{11}/s_{11} уменьшается на 15%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Engdahl G. Handbook of Giant Magnetostrictive Materials / G. Engdahl. – Academic press, USA, 2000. – 409 p.
2. Соколкин Ю. В. Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами / Ю.В. Соколкин, А.А. Паньков. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
3. Хорошун Л. П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов. – К. : Наук. думка, 1993. – 131 с.
4. Milton G. W. The theory of composite / G.W. Milton. – Camb. Univ. Press, 2004. – 719 p.

5. Бардзокас Д. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.

6. Григолюк Э. И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. – М. : «Физико-матем. лит.», 1994. – 335 с.

7. Manevitch L. I. Mechanics of periodically heterogeneous structures / L.I. Manevitch, I.V. Andrianov, V.G. Oshmyan. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo : Springer, 2002. – 264 p.

8. Filshtinsky L. Mathematical models of elastic and piezoelectric fields in two-dimensional composites / L. Filshtinsky, V. Mityushev // Mathematics Without Boundaries. Surveys in Interdisciplinary Research, Pardalos, Panos M., Rassias, Themistocles M. (Eds.)/Springer Science + Business Media New York VIII. – 2014. – Pp. 217-262.

9. Zhao Y. H. Effective Ellastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composite / Y.H. Zhao, G.J. Weng // Journal of Applied Mechanics. – 1990. – Vol. 112. – Pp. 158-167.

10. Pasternak Ya. M. Plane Problem of Elasticity for an Anisotropic Body with Doubly Periodic Systems of Thin Inhomogeneities / Ya.M. Pasternak, G.T. Sulim // Mechanics of Solids. – 2014. – Vol. 49, No. 2. – Зр. 162-174.

11. Паньков А. А. Электромагнитоупругие поля и эффективные свойства пьезокомпозитов с квазипериодическими структурами / А.А. Паньков // Механика композитных материалов и коструктций. – 2012. – Т. 18, №3. – С. 345-358.

12. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк : Юго-Восток, 2007. – 269 с.

13. Фильштинский Л. А. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Т.1 / Л.А. Фильштинский, Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский. – М., Ижевск : НИЦ РХД, 2010. - 864 с.

REFERENCES

1. Engdahl, G. (2000), “Handbook of Giant Magnetostrictive Materials”, Academic press, USA.

2. Sokolkiv, Yu.V. and Pan'kov, A.A. (2003), “Elektrouprugost p'ezokompositov c neregulyarnymi strukturami”, FIZMATLIT, Moskow, Russia.

3. Khoroshun, L.P. and Maslov, B.P. (1993), “Nelineynye svoystva kompozitnykh materialov stokhasticheskoy struktury”, Nauk. dumka, Kiev.

4. Milton, G.W. (2004), “The theory of composite”, Camb. Univ. Press.

5. Bardzokas, D.I. and Zobnin, A.I. (2003), “Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury”, Editorial URSS, Moskow, Russia.

6. Grigolyuk, E.I. and Fil'shtinskij, L.A. (1994), “Regulyarnye kusochno-odnorodnye struktury s defektami”, «Fiziko-matem. lit.», Moskow, Russia.

7. Manevitch, L.I., Andrianov, I.V. and Oshmyan, V.G. (2002), “Mechanics of periodically heterogeneous structures”, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.

8. Filshtinsky, L. and Mityushev, V. (2014), “Mathematical models of elastic and piezoelectric fields in two-dimensional composites”, *Mathematics Without Boundaries. Surveys in Interdisciplinary Research, Pardalos, Panos M., Rassias, Themistocles M. (Eds.)/Springer Science + Business Media New York VIII*, 648, pp. 217-262.

9. Zhao, Y.H. and Weng, G.J. (1990), “Effective Ellastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composite”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 112, pp. 158-167.
10. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2014), “Plane Problem of Elasticity for an Anisotropic Body with Doubly Periodic Systems of Thin Inhomogeneities”, *Mechanics of Solids*, vol. 49, no. 2, pp. 162-174.
11. Pan'kov, A.A. (2012), “Elektromagnitouprugie polya i effektivnye svojstva p'ezokompozitov s kvaziperiodicheskimi strukturami”, *Mekhanika kompositnykh materialov i konstrukziy*, vol. 18, no. 3, p. 345-358.
12. Kaloerov, S.A., Baeva, A.I. and Boronenko, O.I. (2007), “Dvumernye zadachi elektro i magnitouprugosti dlya mnogosvyaznykh oblastey”, Yugo-Vostok, Donetsk.
13. Fil'shtinskij, L.A., Barzdokas, D.I. and Fil'shtinskij, M.L. (2010), “Aktual'nye problemy svyazannykh fizicheskikh poley v deformiruemykh telakh. Matematicheskiy apparat fizicheskikh i inzhenernykh nauk”, vol. 1, NITS RKHD, Moskow, Izhevsk.

УДК 539.377

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВОХЕЛЕМЕНТНОЇ ПРИЗМАТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІЗНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна

bogdan.khapko@gmail.com

Досліджено термонапружений стан тонкої призматичної оболонки спричинений різницею температур довкілля, і залежних від координати коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях. Задачу теплопровідності для оболонки зведено до взаємозв’язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему розв’язку інтегральних рівнянь з використанням методу квадратурних формул. Для знаходження функції напружень та прогину використано скінченні інтегральні перетворення Фур’є. Наведено результати числового аналізу розподілу температурних характеристик, прогину, моментів та зусиль.

Ключові слова: теплопровідність, оболонка, злам, кусково-постійні коефіцієнти тепловіддачі, прогин, зусилля, моменти.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛООТДАЧИ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б, г. Львов, 79060, Украина

bogdan.khapko@gmail.com

Исследовано термонапряжённое состояние тонкой призматической оболочки, вызванное разницей температур окружающей среды и зависимых от координаты коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях. Задачу теплопроводности для оболочки сведено к взаимосвязанной системе интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода. Построено числовую схему решения интегральных уравнений с использованием метода квадратурных формул. Для нахождения функции напряжений и прогиба использовано конечные интегральные преобразования Фурье. Приведены результаты численного анализа распределения температурных характеристик, прогиба, моментов и усилий.

Ключевые слова: теплопроводность, оболочка, излом, кусочно-постоянные коэффициенты теплоотдачи, изгиб, усилия, моменты.

THERMOSTRESSED STATE OF PRISMATIC SHELL COMPOSED OF TWO ELEMENTS WITH DIFFERENT HEAT-TRANSFER COEFFICIENS

Khapko B. S., Ph.D. in Physics and Maths

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
The National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova str., 3b, L'viv, 79060, Ukraine

bogdan.khapko@gmail.com

The problem of determining the thermostressed state in a thin shallow prismatic shell composed of two flat elements is considered taking into account the convective heat exchange with the surrounding environment at front surfaces of the shell. The heat-transfer coefficients at the front surfaces are coordinate-dependent. With the use of the propositions of heat conduction in thin elements of constructions, a model for describing temperature field in a prismatic shell, caused by the difference between the temperatures of the surrounding environment at the front surfaces, is proposed. Utilizing the method of variation of constants, an approach for reducing the heat conduction boundary value problem for the shell with a break to a system of integral equations with Volterra and Fredholm integral operators of the second kind for the functions that are linear combinations of the integral characteristics of the shell temperature (the mean temperature and the temperature moment) is developed. A numerical scheme for solving the system of integral equations is constructed using the quadrature method. In particular, Simpson's quadrature formulae are utilized to evaluate the integrals, and the system of integral equations with Volterra and Fredholm integral operators of the second kind is reduced to a system of linear algebraic equations. To determine the thermostressed state in the shallow prismatic shell, the complex stress function is given through the stress function and the deflection. The shell with breaks is simply supported by rigid vertical diaphragms at its edges. The edges with the break of the mid-surface are thermally insulated, and the temperature of the surrounding environment is zero at the other edges. The finite Fourier integral transforms are employed to determine the stress function and the deflection. The numerical results for distributions of the mean temperature, temperature moment, deflection, moments and stresses are given for various values of the heat-transfer coefficient at the bottom front surface of the second element of the shell. It is revealed that a decrease in the heat-transfer coefficient up to zero (the case of thermal insulation) leads to a decrease in the mean temperature, bending moments and the absolute values of deflection and stresses, which is accompanied by shift of their maximum values towards the fold where the heat-transfer coefficient is constant. However, the values of the temperature moment increase, and this increase is especially noticeable in the region where the heat-transfer coefficient varies.

Key words: heat conduction, shell, break, piecewise constant heat-transfer coefficients, deflection, stresses, moments.

ВСТУП

Тонкостінні елементи конструкцій з нерегулярними серединними поверхнями використовують у будівельній індустрії та техніці. До таких слід віднести конструкції у вигляді пологих оболонок, складених з плоских елементів. Надання складок є одним зі способів збільшення їхньої загальної жорсткості, особливо, якщо матеріал, з якого побудоване тіло, має невеликий модуль пружності. Це є раціональні просторові накриття промислових і цивільних споруд, а також окремі елементи конструкцій машинобудівної техніки, які працюють в умовах нерівномірного теплового навантаження. Такі конструкції по лініях спряження мають злами серединної поверхні. При їх розрахунку можна використовувати метод поділу конструкції на окремі елементи, але це призводить до громіздких виразів для рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, та умов на контурі і необхідності спрягати розв’язки для окремих елементів по поверхнях поділу.

Теоретичні дослідження пологих оболонок з ламаною формою серединної поверхні для будівельної механіки, під дією силового навантаження розроблялися в роботах [1-4], а під дією теплового навантаження – в [5-8]. В [2] досліджувались пружні пластинчаті системи, які мали розриви жорсткості, кривини, а також навантаження. Для опису нерегулярної поверхні одним рівнянням і для отримання її диференціальних характеристик, у роботі [3] використовували елементи теорії узагальнених функцій. Термонапружений стан пологої призматичної оболонки за різних кутів зламу досліджено в роботі [7]. Рівняння теплопровідності для тонкої оболонки зі зламами вздовж координатних ліній за змінних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь отримано в [8].

Задачі теплопровідності і термопружності для пластин і оболонок, які перебувають під дією теплового навантаження за різних постійних коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях, а також для кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі, але однакових на цих поверхня, розглядались у працях [9-13]. Врахування впливу кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі на різних лицевих поверхнях на напружено-деформований стан пластинок та пологих оболонок досліджено в роботах [14-16].

Це дослідження присвячене розрахунку складеної призматичної пологої оболонки з двох плоских елементів за теплового навантаження. Для розрахунку термопружного стану пологих оболонок з ломаною поверхнею, як єдиного цілого, використали теорію узагальнених функцій і метод кінцевих інтегральних перетворень Фур'є. У цій роботі запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для оболонки зі зламом до системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду відносно функцій, що є лінійними комбінаціями інтегральних характеристик температури. Виявлено збурення температурного поля і згинних моментів на лініях зламів та зменшення прогину та згинних моментів за зменшення коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо тонку пологу призматичної форми оболонку товщиною $2h$ зі сторонами r і b. На лицевих поверхнях $z=\pm h$ кожного з двох пластинчатих елементів, з яких утворена оболонка (рис. 1), відбувається конвективний теплообмін з середовищем температури $t_c^{\pm}$ за різних коефіцієнтів тепловіддачі з них

$$\mu^{\pm}(x)=\mu_1^{\pm}+\left(\mu_2^{\pm}-\mu_1^{\pm}\right)S_-\left(x-x_1\right),$$

де $S_-(x-x_1)=\begin{cases}1, & x\geq x_1,\\ 0, & x<x_1\end{cases}$ – функція Гевісайда.

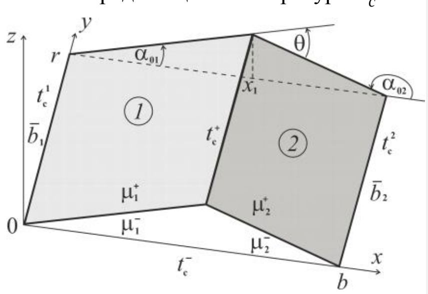


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Серединну поверхню оболонки опишемо рівнянням $z(x,y)=\operatorname{tg}\alpha_{01}\,x-(\operatorname{tg}\alpha_{01}-\operatorname{tg}\alpha_{02})(x-x_1+|x-x_1|)/2$, де $\operatorname{tg}\alpha_{01}$, $\operatorname{tg}\alpha_{02}$ – кутові коефіцієнти направляючої першого (*1*) і другого (*2*) елементів; $x=x_1$ – лінія спряження двох елементів (лінія зламу); $b=x_1(\operatorname{tg}\alpha_{02}-\operatorname{tg}\alpha_{01})/\operatorname{tg}\alpha_{02}$; $\theta=\pi-\alpha_{02}+\alpha_{01}$ – кут зламу, який приймаємо малим. Диференціальні характеристики серединної поверхні пологої оболонки, коли її грані мають одинакові розміри, запишемо так [5]: $k_1=-2\operatorname{tg}\alpha_{01}\,\delta\left(x-x_1\right)$, $k_{12}=0$, $k_2=0$. Оболонка на торцях $x=0,b$ обмінюється теплом з зовнішнім середовищем температури t_c^1 і t_c^2 та коефіцієнтами тепловіддачі $\bar{b}_1$ і $\bar{b}_2$ відповідно. На торцях $y=0$, r вона теплоізольована. Згідно з гіпотезою про лінійний за товщиною призматичної оболонки розподіл температури [11]

$$t(x,z)=T_1(x)+\frac{z}{h}T_2(x)$$

стаціонарне температурне поле в ній виражається через інтегральні температурні характеристики – середню температуру $T_1(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}t(x,z)\,dz$ і температурний момент $T_2(x)=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}zt(x,z)\,dz$, які визначаються із системи диференціальних рівнянь [8]:

$$h^2\frac{d^2T_1(x)}{dx^2}-\eta_1^{+}T_1(x)-\eta_1^{-}T_2(x)=\left[(\eta_2^{+}-\eta_1^{+})T_1(x)+(\eta_2^{-}-\eta_1^{-})T_2(x)\right]S_-(x-x_1)+$$

$$+\frac{h}{2}\theta\delta(x-x_1)T_2(x)-(\eta_1^+t_1+\eta_1^-t_2)-\left[(\eta_2^+-\eta_1^+)t_1+(\eta_2^--\eta_1^-)t_2\right]S_-(x-x_1),$$

$$h^2\frac{d^2T_2(x)}{dx^2}-3(1+\eta_1^+)T_2(x)-3\eta_1^-T_1(x)=3\left[(\eta_2^+-\eta_1^+)T_2(x)+(\eta_2^--\eta_1^-)T_1(x)\right]S_-(x-x_1)+$$

$$+\frac{3h}{2}\theta\delta(x-x_1)T_1(x)-3(\eta_1^+t_2+\eta_1^-t_1)-3\left[(\eta_2^+-\eta_1^+)t_2+(\eta_2^--\eta_1^-)t_1\right]S_-(x-x_1) \qquad (1)$$

за крайових умов

$$\frac{dT_l}{dx}-b_1\left(T_l-T_{l1}^c\right)=0,\ \text{при}\ x=0;\ \frac{dT_l}{dx}+b_2\left(T_l-T_{l2}^c\right)=0,\ x=b;\ l=1,2. \qquad (2)$$

Тут $T_{l1}^c=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}t_c^l dz$, $T_{l2}^c=\frac{3}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h}zt_c^l dz$, $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}$, $t_{1,2}(x)=\frac{t_c^+\pm t_c^-}{2}$, $\eta_i^\pm=\bar{\mu}_i^+\pm\bar{\mu}_i^-$; $\bar{\mu}_i^+=h\mu_i^+/2\lambda$, $\bar{\mu}_i^-=h\mu_i^-/2\lambda$ – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на лицевих поверхнях $z=h$ та $z=-h$ відповідно, $b_l=h\bar{b}_l/\lambda$ – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на торцях $x=0$ та $x=b$ відповідно, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Увівши безрозмірну координату $\eta=x/h$ і заміни [11]

$$\lambda_0T_1=\lambda_2(F_1-\lambda_1F_2),\ \lambda_0T_2=\lambda_2F_2-F_1,\ \eta_1=x_1/h, \qquad (3)$$

систему диференціальних рівнянь (1) частково розділимо. У лівій частині першого рівняння отриманої системи залишимо шукану функцію $F_1(\eta)$, а другого – $F_2(\eta)$. У праві частини цих рівнянь перенесемо члени, до яких входять функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$, помножені на функцію Гевісайда, або Дірака. Функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у правих частинах отриманих рівнянь вважатимемо відомими. Тоді кожне з цих диференціальних рівнянь розв'язуємо методом варіації сталої. Врахувавши перетворені крайові умови (2), визначимо сталі інтегрування, підставляючи які в знайдені загальні розв'язки кожного із рівнянь, отримаємо систему інтегральних рівнянь. До правої частини цих рівнянь входять невідомі функції $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$. Беручи функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у знайдених інтегральних рівняннях на лінії зламу $\eta=\eta_1$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи цю систему і підставляючи знайдені функції $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$ в інтегральні рівняння, отримаємо систему інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра і Фредгольма другого роду для визначення невідомих функцій $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у вигляді:

$$F_l(\eta)-\int\limits_0^p[R_{l1}(\eta,s)F_1(s)+R_{l2}(\eta,s)F_2(s)]S_-(s-\eta_1)ds-$$

$$-\frac{1}{a_l}\int\limits_0^\eta[d_{l1}F_1(s)+d_{l3}F_2(s)]S_-(s-\eta_1)sh[a_l(\eta-s)]ds=R_{l3}(\eta),\ l=1,2. \qquad (4)$$

Позначення R_{l1},R_{l2},R_{l3} через їх громіздкість тут не наведені. Вирази для сталих a_l,d_{l1},d_{l3} можна знайти у [8~~10~~]. Розв'язуючи систему інтегральних рівнянь (4) методом квадратурних формул [17], із співвідношень (3) знаходимо середню температуру $T_1(\eta)$ і температурний момент $T_2(\eta)$, необхідні для визначення термонапруженого стану в розглядуваній оболонці.

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ОБОЛОНКИ

Для визначення термонапруженого стану пологої призматичної оболонки зі зламом на лінії $\eta = \eta_1$ комплексну функцію напружень $\Phi(\eta,\xi)$ подамо через функцію напружень $\varphi(\eta,\xi)$ та прогин $w(\eta,\xi)$ у вигляді $\Phi(\eta,\xi) = w(\eta,\xi) + i\varphi(\eta,\xi)/E_0$. Вважаємо, що на торцях $\eta = 0$ і $\eta = p$ оболонка вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми та на них задана нульова температура середовища, для цього в граничних умовах (2) b_l спрямуємо у нескінченність та покладемо $T_{l1}^c = 0$ і $T_{l2}^c = 0$, $l = 1, 2$. Тоді комплексна функція напружень $\Phi(\eta,\xi)$ визначається із ключового рівняння [5]

$$\left(\frac{d^4}{d\eta^4} + \frac{d^4}{d\eta^2 d\xi^2} + \frac{d^4}{d\xi^4}\right)\Phi(\eta,\xi) + ia^2h^2\theta\frac{\partial^2\Phi(\eta,\xi)}{\partial\xi^2}\delta(\eta-\eta_1) =$$

$$= -\alpha_t a^2 h^2\left(i\frac{d^2T_1(\eta)}{d\eta^2} + \nu_0\frac{d^2T_2(\eta)}{d\eta^2}\right), \tag{5}$$

за крайових умов

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ і } \eta = p,$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ і } \xi = d, \tag{6}$$

де $E_0 = \dfrac{2Eh}{a^2}$, $a^2 = \dfrac{1}{h}\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}$, $\nu_0^2 = \dfrac{1+\nu}{3(1-\nu)}$, E – модуль Юнга, α_t, ν – коефіцієнти лінійного температурного розширення і Пуассона відповідно, $\xi = y/h$, $d = r/h$.

До правих частин рівняння (5) входять другі похідні від температурних характеристик $\dfrac{d^2T_1}{d\eta^2}$ і $\dfrac{d^2T_2}{d\eta^2}$. Визначимо їх з системи рівнянь (1) та підставимо в рівняння (5), у результаті отримаємо

$$\left(\frac{d^4}{d\eta^4} + \frac{d^4}{d\eta^2 d\xi^2} + \frac{d^4}{d\xi^4}\right)\Phi(\eta,\xi) + ia^2h^2\theta\frac{\partial^2\Phi(\eta,\xi)}{\partial\xi^2}\delta(\eta-\eta_1) =$$

$$= -\alpha_t a^2 h^2\left\{i\left[R_1(\eta) - R_2(\eta)S_-(\eta-\eta_1) + \theta_1\delta(\eta-\eta_1)T_2(\eta_1)\right] +\right.$$

$$\left. + \nu_0\left[R_3(\eta) - R_4(\eta)S_-(\eta-\eta_1) + 3\theta_1\delta(\eta-\eta_1)T_1(\eta_1)\right]\right\}. \tag{7}$$

Тут $\theta_1 = \dfrac{\theta}{2}$,

$$R_1(\eta) = \eta_1^+\left(T_1(\eta) - t_1\right) + \eta_1^-\left(T_2(\eta) - t_2\right),\ R_2(\eta) = \left(\eta_2^+ - \eta_1^+\right)\left(T_1(\eta) - t_1\right) + \left(\eta_2^- - \eta_1^-\right)\left(T_2(\eta) - t_2\right),$$

$$R_3(\eta) = 3\left(1 + \eta_1^+\right)\left(T_2 - t_2\right) + 3\eta_1^-\left(T_1 - t_1\right) + 3t_2,$$

$$R_4(\eta) = 3\left[\left(\eta_2^+ - \eta_1^+\right)\left(T_2 - t_2\right) + \left(\eta_2^- - \eta_1^-\right)\left(T_1 - t_1\right)\right].$$

Для розв’язання крайової задачі (7), (6) скористаємося скінченними інтегральними перетвореннями Фур’є [~~7~~8]:

$$\overline{\Phi}^*(\alpha_m,\beta_n)=\frac{1}{pd}\int_0^p\int_0^d \Phi(\eta,\xi)\sin(\beta_n\xi)\sin(\alpha_m\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{8}$$

де $\alpha_m=\dfrac{m\pi}{l}$ і $\beta_n=\dfrac{n\pi}{d}$; $n,m=\overline{1,\infty}$.

Застосувавши інтегральні перетворення (8) по координаті η і ξ до рівняння (7) та задовольнивши крайові умови (6), і розв'язавши отриману рівність відносно зображення $\overline{\Phi}^*(\alpha_m,\beta_n)$, одержимо

$$\overline{\Phi}^*(\alpha_m,\beta_n)=i\frac{1\beta_n^2h^2a^2\theta}{l\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2}\Phi^*(\eta_1,\beta_n)\sin\alpha_m\eta_1-$$

$$-\frac{\alpha_t a^2h^2\left[(-1)^{n+1}+1\right]}{d\beta_n\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2}\left\{i\left[\theta_1T_2(\eta_1)\sin\alpha_m\eta_1+\frac{1}{p}\int_0^p\{R_1(\eta)-R_2(\eta)S_-(\eta-\eta_1)\}\sin\alpha_m\eta\,d\eta\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu_0}{p}\int_0^p[R_3(\eta)-R_4(\eta)S_-(\eta-\eta_1)]\sin\alpha_m\eta\,d\eta+3\nu_0\theta_1T_1(\eta_1)\sin\alpha_m\eta_1\right\}. \tag{9}$$

Перший доданок правої частини рівняння (9) містить зображення по координаті ξ комплексної функції $\Phi(\eta,\xi)$ на лінії злому $\eta=\eta_1$. Тому для знаходження зображення $\Phi^*(\eta_1,\beta_n)$ спочатку застосовуємо до цього рівняння обернене перетворення Фур'є за координатою η, отримаємо:

$$\Phi^*(\eta,\beta_n)-i\Phi^*(\eta_1,\beta_n)D_1(\eta,\beta_n)=-iD_2(\eta,\beta_n)-D_3(\eta,\beta_n), \tag{10}$$

де

$$C_1(\eta,\beta_n)=\frac{h^2a^2\theta}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_n^2}{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2}\sin\alpha_m\eta_1\sin\alpha_m\eta,$$

$$C_2(\eta,\beta_n)=\frac{\alpha_t a^2h^2}{d}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^{n+1}+1\right]}{\beta_n\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2}\left[\theta_1T_2(\eta_1)\sin\alpha_m\eta_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p}\int_0^p\{R_1(\eta)-R_2(\eta)S_-(\eta-\eta_1)\}\sin\alpha_m\eta\,d\eta\right],$$

$$C_3(\eta,\beta_n)=\frac{\alpha_t a^2h^2}{d}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^{n+1}+1\right]}{\beta_n\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2}\left\{\frac{\nu_0}{p}\int_0^p[R_3(\eta)-R_4(\eta)S_-(\eta-\eta_1)]\sin\alpha_m\eta\,d\eta+\right.$$

$$\left.+3\nu_0\theta_1T_1(\eta_1)\sin\alpha_m\eta_1\right\}\sin\alpha_m\eta.$$

Далі в рівнянні (10) беремо $\eta=\eta_1$ та розв'язуємо його, виділивши дійсну і уявну частину в чисельнику і знаменнику отриманої рівності. Далі помноживши чисельник та знаменник на спряжене до комплексного числа у знаменнику, отримаємо:

$$\Phi^*(\eta_1,\beta_n)=-\frac{C_1(\eta_1,\beta_n)C_2(\eta_1,\beta_n)+C_3(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2(\eta_1,\beta_n)}+i\frac{C_1(\eta_1,\beta_n)C_3(\eta_1,\beta_n)-C_2(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2(\eta_1,\beta_n)}. \tag{11}$$

Отформатировано: не выше на / ниже на

Отформатировано: украинский

Підставивши вираз (11) для $\Phi^*\left(\eta_1,\beta_n\right)$ у формулу (10) для $\Phi^*\left(\eta,\beta_n\right)$, отримаємо

$$\Phi^*\left(x,\beta_n\right) = -C_3(\eta,\beta_n) - C_1(\eta,\beta_n)\frac{C_1\left(\eta_1,\beta_n\right)C_3(\eta_1,\beta_n) - C_2(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2\left(\eta_1,\beta_n\right)} -$$

$$-i\left[\frac{C_1\left(\eta_1,\beta_n\right)C_2(\eta_1,\beta_n) + C_3(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2\left(\eta_1,\beta_n\right)}C_1(\eta,\beta_n) + C_2(\eta,\beta_n)\right]. \qquad (12)$$

Застосувавши до рівності (12) обернене перетворення Фур'є за координатою ξ, знайдемо комплексну функцію напружень $\Phi(\eta,\xi)$:

$$\Phi(\eta,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_3(\eta,\beta_n) + C_1(\eta,\beta_n)\frac{C_1\left(\eta_1,\beta_n\right)C_3(\eta_1,\beta_n) - C_2(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2\left(\eta_1,\beta_n\right)}\right]\sin\beta_n\xi -$$

$$-i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_1\left(\eta_1,\beta_n\right)C_2(\eta_1,\beta_n) + C_3(\eta_1,\beta_n)}{1+C_1^2\left(\eta_1,\beta_n\right)}C_1(\eta,\beta_n) + C_2(\eta,\beta_n)\right]\sin\beta_n\xi.$$

Зусилля і моменти в оболонці визначаються через функції $\varphi(\eta,\xi)$ і $w(\eta,\xi)$ за формулами:

$$N_1(\eta,\xi) = E_0\frac{\partial^2\varphi(\eta,\xi)}{h^2\partial\xi^2}, \quad N_2(\eta,\xi) = E_0\frac{\partial^2\varphi(\eta,\xi)}{h^2\partial\eta^2},$$

$$M_1(\eta,\xi) = -D_2\left[\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{h}T_2(\eta,\xi)\right],$$

$$M_2(\eta,\xi) = -D_2\left[\frac{1}{h^2}\left(\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right) + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{h}T_2(\eta,\xi)\right], \quad D_2 = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}.$$

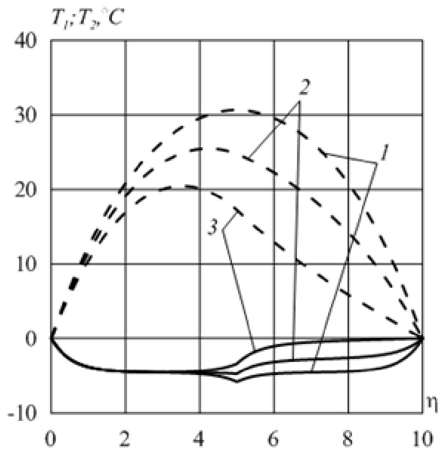


Рис. 2. Розподіл температурних характеристик T_1 (штрихові) і T_2 (суцільні) за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\overline{\mu}_2 = 0,5;\ 0,25;\ 0$

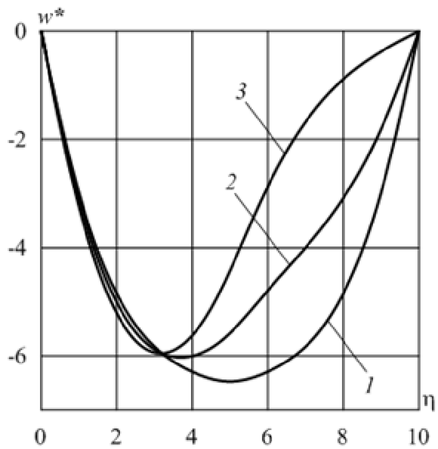


Рис. 3. Розподіл нормованого прогину w^* за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\overline{\mu}_2 = 0,5;\ 0,25;\ 0$

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ

Розглядали тонку призматичну оболонку з безрозмірними величинами $p=10$, $d=10$, $\eta_1=5$ та кутом зламу $\theta=0{,}1$ за температури середовища рівної нулю на верхній лицевій поверхні оболонки $z=h$ і на торцях $\eta=0$ та $\eta=10$ ($t_c^+=t_c^1=t_c^2=0^\circ C$) та рівної сто градусів на нижній поверхні $z=-h$ ($t_c^-=100^\circ C$). Вважали, що коефіцієнти тепловіддачі на верхніх лицевих поверхнях $z=h$ двох елементів однакові і дорівнюють $\bar{\mu}_1^+=\bar{\mu}_2^+=0{,}5$; на нижній лицевій поверхні $z=-h$ коефіцієнт тепловіддачі першого елемента *(1)* оболонки рівний $\bar{\mu}_1^-=0{,}5$ та розглядали різні значення коефіцієнта тепловіддачі на нижній лицевій поверхні другого елемента: $\bar{\mu}_2^-=0{,}5$; $\bar{\mu}_2^-=0{,}25$; $\bar{\mu}_2^-=0$. На рис. 2-4 криві 1-3 ілюструють розподіли температурних характеристик, прогину, моментів зусиль по лінії $\xi=5$. Зауважимо, що крива 1 відповідає однаковим коефіцієнтам тепловіддачі на лицевих поверхнях, $\bar{\mu}_1^+=\bar{\mu}_2^+=\bar{\mu}_1^-=\bar{\mu}_2^-=0{,}5$; крива 2 – зменшенню тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента вдвічі $\bar{\mu}_2^-=0{,}25$; крива 3 – повній термоізоляції на ній $\bar{\mu}_2^-=0$.

Штриховими лініями на рис. 2 показано розподіл середньої температури T_1, а суцільними – температурного моменту T_2 за тих же значень коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки. За однакових коефіцієнтів тепловіддачі з нижньої поверхні обох елементів оболонки $\bar{\mu}_1^-=\bar{\mu}_2^-=0{,}5$ (крива 1) максимальне значення середньої температури T_1 досягається на лінії зламу, а температурний момент T_2 досягає мінімуму на цій лінії. Коли коефіцієнт тепловіддачі з нижньої поверхні другого елемента оболонки стає вдвічі меншим (крива 2), то T_1 зменшується, а максимальне значення T_1 знаходиться в першому елементі і зміщується на 0,075 довжини оболонки від лінії зламу в напрямку до її торця, а T_2 підвищується в другому елементі та в околі лінії зламу першого елемента, залишаючись мінімальним на лінії зламу. У випадку повної теплоізоляції нижньої лицевої поверхні другого елементу оболонки середня температура далі зменшується, міняючи опуклість у другому елементі і досягає максимуму на віддалі 0,145 довжини оболонки від лінії зламу. Значення температурного моменту в цьому випадку підвищується, а його мінімальне значення зміщується в перший елемент оболонки на 0,2 її довжини від лінії зламу.

На рис. 3 спостерігається зменшення абсолютної величини нормованого прогину $w^*=10^5 w\big/(\alpha_t t_c^- h)$ оболонки зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні її другого елемента. За однакових коефіцієнтів тепловіддачі на всіх лицевих поверхнях прогин симетричний відносно до лінії зламу (крива 1) і досягає на ній максимуму. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі до $\bar{\mu}_2^-=0{,}25$ (крива 2) і аж до теплоізоляції нижньої поверхні другого елемента оболонки $\bar{\mu}_2^-=0$ (крива 3) абсолютна величина прогину зменшується, досягаючи максимальних значень на лініях $\eta=3{,}7$ та $\eta=3{,}2$ її першого елемента відповідно.

Нормований згинальний момент $M_1^*=10^3 M_1 h\big/(\alpha_t t_c^- D_2)$, коли коефіцієнти тепловіддачі оболонки однакові (крива 1 рис. 4а), зростає, досягаючи максимуму на лінії зламу. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки він зменшується і міняє опуклість за теплоізоляції (крива 3) у межах другого елемента. Розподіл

Отформатировано: Цвет шрифта: Авто

нормованого моменту $M_2^* = 10^3 M_2 h / D_2$ (рис. 4б) якісно аналогічний до розподілу моменту M_1^*. Мінімальних значень моменти досягають на торцях.

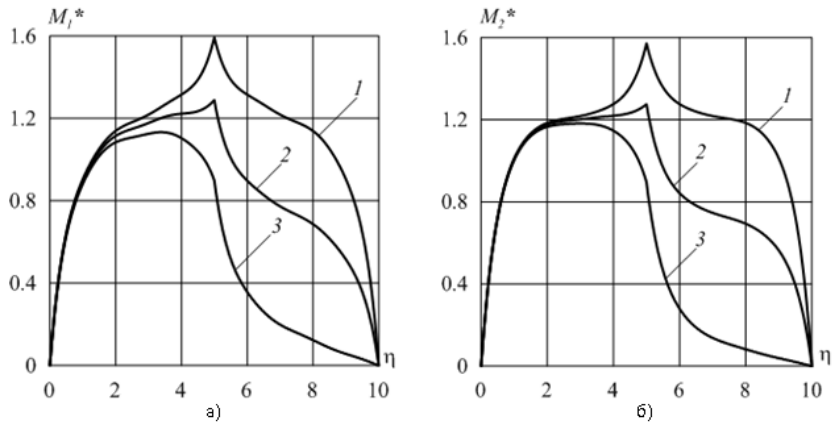
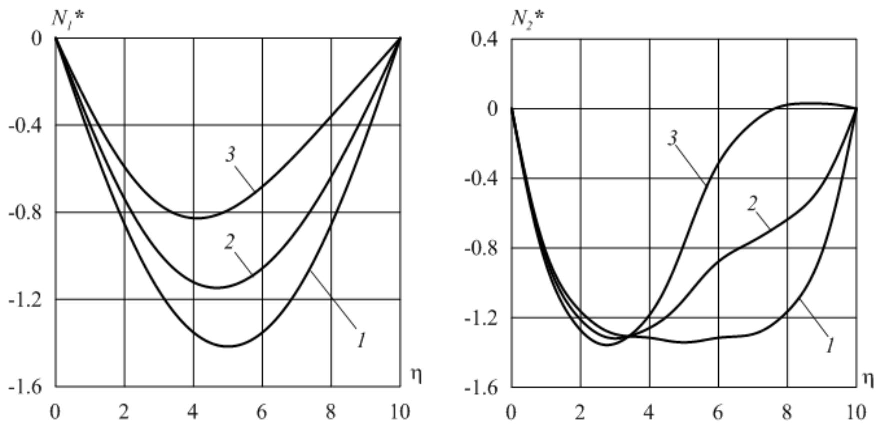


Рис. 4. Розподіл нормованих моментів M_1^* (а) і M_2^* (б) за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\bar{\mu}_2^+ = 0,5;\ 0,25;\ 0$

Абсолютна величина нормованого зусилля $N_1^* = 10^2 N_1 h / \left(\alpha_t t_c^- E_0\right)$ на рис. 5а за однакових коефіцієнтів тепловіддачі досягає максимуму на зламі оболонки. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі ці зусилля спадають, а їх максимум зміщується на перший елемент оболонки і досягається на лініях $\eta = 4,7$ та $\eta = 4,1$ відповідно. На рис. 5б наведено розподіл нормованого зусилля $N_2^* = 10^2 N_2 h^2 / \left(\alpha_t t_c^- E_0\right)$, який є симетричним відносно до лінії зламу і його абсолютна величина досягає максимуму на ній (крива 1) за однакових коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях оболонки. Коли коефіцієнт тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента зменшився вдвічі, абсолютна величина зусилля N_2^* спадає в межах $3 < \eta < 10$ та дещо зростає в межах $0 < \eta < 3$, досягаючи максимуму на лінії $\eta = 3$ (крива 2). За теплової ізоляції нижньої поверхні другого елемента оболонки розподіл зусилля N_2^* міняє опуклість у його межах та спадає на відрізку $2,25 < \eta < 7,7$, набуваючи в межах $7,7 < \eta < 10$ додатних значень, і досягає абсолютного максимуму на лінії $\eta = 2,25$.



а) б)

Рисунок 5. Розподіл зусиль N_1 (а) і N_2 (б) за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\overline{\mu}_2^+ = 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0$

ВИСНОВКИ

Розглядається задача про визначення термонапруженого стану в тонкій пологій складеній призматичній оболонці із двох плоских елементів при конвективному теплообміні з навколишнім середовищем на лицевих поверхнях. Коефіцієнти тепловіддачі на лицевих поверхнях залежні від координати. Використовуючи метод варіації сталої, розроблено спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для оболонки зі зламом до системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри і Фредгольма другого роду. Для визначення термонапруженого стану пологої призматичної оболонки, комплексну функцію напружень подано через функцію напружень та прогин. На торцях оболонка зі зламом вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми. Торці, де є злам серединної поверхні, теплоізольовані, а на інших задана нульова температура середовища. Для знаходження функції напружень та прогину використано скінченні інтегральні перетворення Фур’є. Наведено результати числового аналізу розподілу середньої температури, температурного моменту, прогину, моментів та зусиль за різних значень коефіцієнта тепловіддачі на нижній лицевих поверхні другого елемента оболонки. Виявлено, що зменшення коефіцієнта тепловіддачі аж до теплоізоляції призводить до спадання середньої температури оболонки зі зламом, згинних моментів та абсолютних величин прогину і зусиль зі зміщенням максимальної їх величини в бік складки, де коефіцієнт тепловіддачі не змінювали. Однак, значення температурного моменту підвищуються, особливо на ділянці зміни коефіцієнта тепловіддачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Назаров А. Г. Некоторые контактные задачи теории оболочек/ А.Г. Назаров // Доклады АН Арм. ССР. – 1948. – Т. 9. – № 2. – С. 61-66.
2. Вайнберг Д. В. Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами / Д.В. Вайнберг, И.З. Ройтфарб // Расчет пространственных конструкцій. – М. : Стройиздат. – 1965. – Вып. 10. – С. 39-80.
3. Хлебной Я. Ф. Пространственные железобетонные конструкции. Расчет и конструирование / Я.Ф. Хлебной. – М., 1977. – 225 с.
4. Михайлов Б. К. Пластинки и оболочки с разрывными параметрами / Б.К Михайлов. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 196 с.

5. Швець Р. М. Про рівняння термопружності тонких пологих оболонок зі зломами серединної поверхні / Р.М. Швець, Б.С. Хапко // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 135-139.

6. Швець Р. М. Температурні поля і напруження у пологій оболонці зі зломами серединної поверхні / Р.М. Швець, Б.С. Хапко // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 2. – С. 62-69.

7. Хапко Б. С. Полога призматична оболонка в нерівномірному температурному полі / Б.С. Хапко // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005. – № 2. – С. 33-38.

8. Швец Р. Н. Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи / Р.Н. Швец, Б.С. Хапко, А.И. Чиж // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 69-76.

9. Підстригач Я. С. Температурне поле в тонких пластинках при змінному коефіцієнті тепловіддачі з бокових поверхонь / Я.С. Підстригач, Ю.М. Коляно // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1971. – № 1. – С. 75-78.

10. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / [Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень]. – К. : Наук. думка, 1977. – 158 с.

11. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – К. : Наук. думка, 1978. – 344 с.

12. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.

13. Sugano Y. Material design for reduction ogtermal stress in a functionally graded material rotating disk / Y. Sugano, R. Chiba, K. Hirose, K. Takahashi // JSME international journal, Series A. – 2004. – **47**, № 2. – P. 189-197.

14. Хапко Б. С. Термічний прогин смуги і прямокутної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі / Б.С. Хапко, А.І. Чиж // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 198-206.

15. Хапко Б. Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі / Б. Хапко, А. Чиж // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 133-144.

16. Хапко Б. С. Про вплив змінних коефіцієнтів тепловіддачі на термонапруження у скінченній циліндричній оболонці / Б.С. Хапко, А.І. Чиж // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 2. – С. 195-203.

17. Верлань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1978. – 292 с.

REFERENCES

1. Nazarov, A.H. (1948), “Nekotorye kontaktnye zadachi teorii obolochek”, *Doklady AN Arm. SSR*, vol. 9, no. 2, pp. 61-66.

2. Vaynberg, D.V. and Rojtfarb, Y.Z. (1965), “Raschet plastin i obolochek s razryvnymi parametrami”, *Raschet prostranstvennykh konstruktcij*, issue 10, pp. 39-80.

3. Khlebnoj, Ya. F. (1977), *Prostranstvennye zhelezobetonnye konstruktcii. Raschet y konstruirovanie* [Three-Dimensional Reinforced-Concrete Structures. Numerical Analysis and Design], Stroyyzdat, Moskow, Russia.

4. Mikhailov, B.K. (1980), *Plastinki i obolochki s razryvnymi parametrami* [Plates and Shells with Discontinuous Parameters], Izdatelstvo Leningradskogo. universiteta, Leninhrad, Russia.

5. Shvets, R.M. and Khapko, B.S. (1997), “On equations of thermoelasticity for thin shells with breaks of median surface”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, **40**, no. 1, pp. 135-139.

6. Shvets, R.M. and Khapko, B.S. (1999), “Temperature fields and stresses in a gently sloping shell with breaks in the median surface”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, **42**, no. 2, pp. 62-69.

7. Khapko, B.S. (2005), “Shallow Prismatic Shell in a Nonuniform Temperature Field”, *Fhysicochemical mechanics of materials*, no. 2, pp. 33-38.

8. Shvets, R.M., Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2010), “Heat conduction equations for shells having breaks with variable heat transfer coefficients”, *Theoretical and applied mechanics*, issue 1(47), pp. 69-76.

9. Pidstryhach, Ya.S. and Kolyano, Yu.M. (1971), “Temperaturne pole v tonkykh plastynkakh pry zminnomu koefitsiyenti teploviddachi z bokovykh poverkhon'”, *Dop. AN URSR, Ser. A*, no. 1, pp. 75-78.

10. Podstrigach, Ya.S. , Kolyano, Yu.M., Gromovyk, V.I. and Lozben, V.L. (1977), *Termouprugost tel pri peremennyx koefficientax teplootdachi* [Thermoelasticity of Bodies with Variable Heat-Transfer Coefficients], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

11. Podstrigach, Ya.S. and Shvec, R.N. (1978), *Termouprugost tonkich obolochek* [Thermoelasticity of thin shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

12. Podstrigach, Ya.S., Lomakin, V.A. and Kolyano, Yu.M (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoj struktury* [Thermoelasticity of Bodies with a heterogeneous structure], Nauka, Moskow, Russia.

13. Sugano, Y., Chiba, R., Hirose, K. and Takahashi, K. (2004), “Material design for reduction ogtermal stress in a functionally graded material rotating disk”, *JSME international journal, Series A*, 47, no. 2, pp. 189-197.

14. Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2011), “Thermal bending of a strip and a rectangular plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients”, *J. Math. Sci.*, 174, no. 3, pp. 375-386.

15. Khapko, B. and Chyzh, A. (2009), “Temperature field and deflection of a semi-infinite plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients”, *Physico-mathematical modeling and informational technologies*, issue 9, pp. 133-144.

16. Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2014), “On effect of variable heat exchange coefficients on thermal stresses in finite cylindrical shell”, *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 57, no. 2, pp. 195-203.

17. Verlan, A.F. and Sizikov, V.S. (1978), *Metody resheniya integralnyh uravnenij s programmami dlya EVM* [Methods for the Solution of Integral Equations using Computer Programs], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

УДК 539.375

ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИНИ З КОЛІНЕАРНОЮ ЩІЛИНОЮ ЗА ЗГИНУ ПЛАСТИНИ

Шацький І. П., д. ф.-м. н., Даляк Т. М., к. ф.-м. н.

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна

ipshatsky@gmail.com, tdalyak@gmail.com

У двовимірній постановці розглянута задача згину пластини, послабленої співвісними тріщиною та щілиною. Тріщина трактується як математичний розріз, береги якого контактують по лінії в лицьовій поверхні пластини; під щілиною розуміється розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому допускають від'ємний стрибок переміщень. Вивчено вплив взаємодії різнотипних дефектів на напружений стан поблизу їхніх вершин.
Ключові слова: пластина, тріщина, щілина, взаємодія, згин, контакт берегів.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ С КОЛЛИНЕАРНОЙ ЩЕЛЬЮ В ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

Шацкий И. П., д. ф.-м. н., Даляк Т. М., к. ф.-м. н.

Ивано-Франковский отдел Института прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Микитинецкая, 3, г. Ивано-Франковск, 76002, Украина

ipshatsky@gmail.com, tdalyak@gmail.com

В двумерной постановке рассмотрена задача изгиба пластины, ослабленной соосными трещиной и щелью. Трещина интерпретируется как математический разрез, берега которого контактируют по линии в лицевой поверхности пластины; под щелью подразумевается разрез со свободными от напряжений поверхностями, на котором допустим отрицательный скачок перемещений. Изучено влияние взаимодействия разнотипных дефектов на напряженное состояние вблизи их вершин.
Ключевые слова: пластина, трещина, щель, взаимодействие, изгиб, контакт берегов.

INTERACTION OF CRACK AND COLLINEAR SLOT IN PLATE BENDING

Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc., Dalyak T. M., Cand. Phys. & Math. Sc.

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Mykytynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine

ipshatsky@gmail.com, tdalyak@gmail.com

The aim of the paper is to study the effect of interaction of contact rectilinear crack and coaxial slots for plate bending and on this basis to demonstrate qualitative differences in the concentration of stresses near defects of different nature. Crack is treated as a mathematical cut, the edges of which contact along the line on the outside of the plate. The slot is referred to as stress-free surfaces cut, the negative jump of normal displacement can occur on this cut. The problem of uniform bending of infinite plate weakened by through defects: cracks and slots located on a straight line, is considered in the two-dimensional formulation. The crack closure caused by bending deformation was studied based on classical hypothesis of direct normal and the previously developed model of contact of edges along the line. When the interaction of the edges on the crack under bending is taken into account, the asymmetry of stress fields along thickness across the plate is distorted. A new boundary problem for a couple of biharmonic equations of plane stress and plate bending with interconnected boundary conditions on the cuts has been formulated. The method of singular integral equations was applied to develop an analytical solution of the problem for defects of different lengths. The expressions for the derivatives from jumps of displacements and angles of the normal rotation, for the forces and moments intensity factors near the tips of defects, and for contact reaction on the closed edges of the crack have been obtained. Detailed analysis of these results was carried out for cracks and slots of equal length, depending on the parameter of their relative position. The comparison of findings with the known results for like dyads: crack-crack and slot-slot has been provided. As the result of the research show, the interacting contact crack and free slot are fundamentally different stress concentrators that produce qualitatively different patterns of local perturbations of the stress state of the plate.
Key words: plate, crack, slot, interaction, bending, edges contact.

ВСТУП

Адекватний аналіз міцності та довговічності тонкостінних конструкцій не можливий без урахування концентрації напружень поблизу тріщиноподібних дефектів. Серед проблем механіки тріщин у пластинах та оболонках виділяється специфічний круг задач, пов'язаних із взаємним наляганням поверхонь тріщин, які потрапляють у зону стиску. Контактна взаємодія берегів дефектів може істотно перерозподілити поле напружень і вплинути на показники міцності конструкції. Стосовно тонких пластин згадані задачі природно постають у разі дії на пластину згинального навантаження, яке дає різні знаки напружень обабіч серединної поверхні. Якщо теорія щілин (тріщин з вільними від в'язей поверхнями) у зігнутих пластинах достатньо розвинута [1-3], то феномен часткового закриття тріщин за згину пластин у рамках двовимірних теорій вивчався лише в останні десятиріччя. Найбільш продуктивною тут виявилася модель контакту берегів уздовж лінії [4-7]. Асимптотичне дослідження взаємодії контактної тріщини і щілини за великої віддалі між різнотипними дефектами описано в повідомленні [8]. У статті [9] розглянуто пружну рівновагу зігнутої пластини, послабленої прямолінійними тріщинами, сполученими зі співвісними щілинами.

Мета цієї роботи – побудувати аналітичний розв'язок задачі про взаємодію прямолінійної контактної тріщини та співвісної щілини за згину безмежної пластини і на цій основі продемонструвати якісні відмінності у концентрації напружень поблизу дефектів різної природи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Насамперед пояснимо термінологію. Тріщину розглядаємо як математичний розріз з нульовою відстанню між берегами, які можуть контактувати, взаємно не проникаючи. Під щілиною розуміємо фізичний розріз з малою відстанню між берегами, однак у модельній постановці трактуємо її як математичний розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому допускається від'ємний стрибок переміщень. Рівень згинального навантаження припускається таким, що береги щілини не контактують за жодних умов.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену двома прямолінійними наскрізними дефектами, розташованими на одній прямій, що співпадає з віссю абсцис (рис. 1). Нехай $2l_1$ – довжина тріщини, $2l_2$ – довжина щілини, а d – відстань між центрами дефектів. Пластина навантажена згинальними моментами m, рівномірно розподіленими на безмежності. Слід визначити напружено-деформований стан дефектної пластини з урахуванням закриття тріщини, спричиненого деформацією згину.

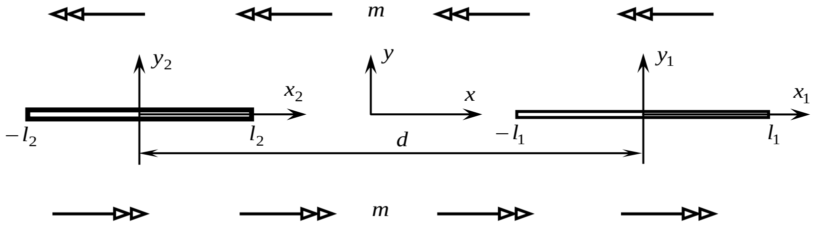


Рис. 1. Співвісні щілина та тріщина в безмежній пластині

Дослідження проводили у двовимірній постановці, спираючись на гіпотезу прямої нормалі та модель контакту вздовж лінії [4-7]. Врахування взаємодії берегів на тріщині за згину порушує антисиметрію полів напружень по товщині у всій пластині. Напружений стан ззовні дефектів описуємо бігармонічними рівняннями плоского напруженого стану та класичної теорії згину пластин:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L, (1)$$

де φ – функція Ері, w – прогин пластини, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, L – сукупність розрізів.

Крайові умови на берегах розрізів задаються в локальних системах координат залежно від типу дефектів. Для тріщини – це умови контакту берегів [4], записані в рамках гіпотези жорсткої нормалі:

$$\left[u_{y_1}\right](x_1) = h\left|\left[\vartheta_{y_1}\right](x_1)\right| > 0, \quad M_{y_1}(x_1,0) = h\,N_{y_1}(x_1,0)\operatorname{sgn}\left[\vartheta_{y_1}\right](x_1), \quad N_{y_1}(x_1,0) < 0;$$

$$N_{x_1y_1}(x_1,0) = 0, \quad P_{x_1y_1}(x_1,0) = C_1, \quad x_1 \in (-l_1, l_1);(2)$$

для щілини – класичні умови вільного краю [1-3]:

$$N_{y_2}(x_2,0) = 0\,,\ M_{y_2}(x_2,0) = 0\,;\quad N_{x_2y_2}(x_2,0) = 0\,,\quad P_{x_2y_2}(x_2,0) = C_2\,,\quad x_2 \in (-l_2, l_2)\,. \quad (3)$$

На безмежності задано зовнішнє навантаження:

$$M_x = M_{xy} = 0,\ M_y = m,\ N_y = N_x = N_{xy} = 0, \quad (x, y) \to \infty. \qquad (4)$$

У формулах (2)-(4) і далі використано такі позначення: $\left[u_{x_n}\right]$, $\left[u_{y_n}\right]$ – розриви переміщень на розрізах у серединній площині пластини, $\left[\vartheta_{x_n}\right]$, $\left[\vartheta_{y_n}\right]$ – стрибки кутів повороту нормалі; N_x, N_y, N_{xy} – мембранні зусилля, M_x, M_y, M_{xy} – згинальні та крутний моменти, Q_y – перерізувальна сила, $P_{xy} = \partial^{-1}Q_y/\partial x + M_{xy}$ – узагальнений за Кірхгофом крутний момент; C_n – довільні сталі. Під значеннями зусиль та моментів на розрізах (при $y = 0$) розуміємо півсуми їх граничних значень при $y = \pm 0$; самі ж чинники при переході через розрізи змінюються неперервно: $\left[N_{y_n}\right] = \left[N_{x_{ni}y_n}\right] = \left[M_{y_n}\right] = \left[P_{x_ny_n}\right] = 0$, $x_n \in (-l_n, l_n)$, $n = 1, 2$.

Співвідношення (1)-(4) – некласична крайова задача для пари бігармонічних рівнянь із загалом взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Для побудови розв'язку сформульованої задачі використали метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральні зображення зусиль та моментів на лініях розрізів подаються формулами [3]:

$$N_{y_n}(x_n,0) = \frac{B}{4\pi}\left(\int_{-l_n}^{l_n}\frac{\left[u_{y_n}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n} + \int_{-l_k}^{l_k}\frac{\left[u_{y_k}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n - (-1)^k d}\right),$$

$$N_{x_ny_n}(x_n,0) = \frac{B}{4\pi}\left(\int_{-l_n}^{l_n}\frac{\left[u_{x_n}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n} + \int_{-l_k}^{l_k}\frac{\left[u_{x_k}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n - (-1)^k d}\right),$$

$$M_{y_n}(x_n,0) = m - \frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_n}^{l_n}\frac{\left[\vartheta_{x_n}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n} + \int_{-l_k}^{l_k}\frac{\left[\vartheta_{x_k}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n - (-1)^k d}\right),$$

$$P_{x_ny_n}(x_n,0) = C_n - \frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_n}^{l_n}\frac{\left[\vartheta_{x_n}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n} + \int_{-l_k}^{l_k}\frac{\left[\vartheta_{x_k}\right]'(\xi)\,d\xi}{\xi - x_n - (-1)^k d}\right),\ n, k = 1, 2;\ n \neq k\,. \quad (5)$$

Тут і далі $B=2Eh$, $D=2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, $a=(3+\nu)(1-\nu)$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Після підстановки інтегральних зображень (5) у крайові умови (2), (3) отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі:

$$\left[u_{y_1}\right]'(x_1)=h\left[\vartheta_{y_1}\right]'(x_1)\operatorname{sgn}\left[\vartheta_{y_1}\right](x_1),$$

$$m-\frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[\vartheta_{y_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[\vartheta_{y_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1-d}\right)=\frac{Bh\operatorname{sgn}\left[\vartheta_{y_1}\right](x_1)}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[u_{y_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[u_{y_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1-d}\right),$$

$$\frac{B}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[u_{x_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[u_{x_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1-d}\right)=0,\quad \frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[\vartheta_{x_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[\vartheta_{x_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_1-d}\right)=C_1,$$

$x_1\in(-l_1,l_1)$;

$$\frac{B}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[u_{y_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2+d}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[u_{y_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2}\right)=0,\quad \frac{B}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[u_{x_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2+d}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[u_{x_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2}\right)=0,$$

$$\frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[\vartheta_{y_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2+d}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[\vartheta_{y_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2}\right)=m,$$

$$\frac{Da}{4\pi}\left(\int_{-l_1}^{l_1}\frac{\left[\vartheta_{x_1}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2+d}+\int_{-l_2}^{l_2}\frac{\left[\vartheta_{x_2}\right]'(\xi)d\xi}{\xi-x_2}\right)=C_2,\quad x_2\in(-l_2,l_2).\qquad(6)$$

Єдиність розв'язку рівнянь (6) у класі функцій, необмежених на кінцях розрізів, забезпечують додаткові умови однозначності переміщень та кутів повороту нормалі:

$$\int_{-l_n}^{l_n}u_{x_n}(\xi)d\xi=0,\quad \int_{-l_n}^{l_n}u_{y_x}(\xi)d\xi=0,\quad \int_{-l_n}^{l_n}\left[\vartheta_{x_n}\right]'(\xi)d\xi=0,$$

$$\int_{-l_n}^{l_n}\left[\vartheta_{y_n}\right]'(\xi)d\xi=0,\quad \int_{-l_n}^{l_n}\left[\vartheta_{x_n}\right](\xi)d\xi=0,\quad (n=1,2).\qquad(7)$$

За рівномірного навантаження $\operatorname{sgn}\left[\vartheta_{y_1}\right](x_1)=\mathrm{const}$, отож, (6) – система рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Аналітичний розв'язок задачі (6), (7) побудували у вигляді:

$$\left[u_{y_1}\right]'(x_1)=-\frac{4|m|}{Bh}\frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{x_1^2+x_1d+a_1}{\sqrt{l_1^2-x_1^2}\sqrt{(x_1+d)^2-l_2^2}},$$

$$\left[u_{y_2}\right]'(x_2)=-\frac{4|m|}{Bh}\frac{\kappa}{1+\kappa}\left\{\frac{-x_2}{\sqrt{l_2^2-x_2^2}}+\frac{-x_2^2+x_2d+a_2}{\sqrt{l_2^2-x_2^2}\sqrt{(x_2-d)^2-l_1^2}}\right\},$$

$$\left[\vartheta_{y_1}\right]'(x_1)=\frac{4m}{Da}\frac{1}{1+\kappa}\frac{x_1^2+x_1\,d+a_1}{\sqrt{l_1^2-x_1^2}\sqrt{\left(x_1+d\right)^2-l_2^2}},$$

$$\left[\vartheta_{y_2}\right]'(x_2)=\frac{4m}{Da}\frac{1}{1+\kappa}\left\{\frac{\kappa\,x_2}{\sqrt{l_2^2-x_2^2}}+\frac{-x_2^2+x_2\,d+a_2}{\sqrt{l_2^2-x_2^2}\sqrt{\left(x_2-d\right)^2-l_1^2}}\right\}; \qquad (8)$$

$$\left[u_{x_n}\right]'(x_n)=0,\ \left[\vartheta_{x_n}\right]'(x_n)=0,\ C_n=0,\ n=1,2.$$

Тут $\kappa=Bh^2/Da=3(1+\nu)/(3+\nu)$, $a_n=(-1)^k\left(\frac{d^2-l_n^2-l_k^2}{2}+\frac{\left(l_n-l_k\right)^2-d^2}{2}\frac{E(\rho)}{K(\rho)}\right)$, $n,k=1,2$, $n\neq k$, де $E(\rho)$, $K(\rho)$ – повні еліптичні інтеграли відповідного першого та другого роду з аргументом $\rho=2\sqrt{l_nl_k\Big/\left(d^2-\left(l_n-l_k\right)^2\right)}$.

За знайденим розв'язком (8) і формулами

$$K_{Nn}^{\pm}=\mp\frac{B}{4\sqrt{l_n}}\lim_{x_n\to\pm l_n}\sqrt{l_n^2-x_n^2}\left[u_{y_n}\right]'(x_n),\quad K_{Mn}^{\pm}=\pm\frac{Da}{4\sqrt{l_n}}\lim_{x_n\to\pm l_n}\sqrt{l_n^2-x_n^2}\left[\vartheta_{y_n}\right]'(x_n)$$

отримали значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околах вершин дефектів:

$$K_{N1}^{\pm}=\pm\frac{|m|\kappa}{h(1+\kappa)}\frac{\left(d\pm l_1\right)^2-l_2^2+\left[d^2-(l_1-l_2)^2\right]E(\rho)/K(\rho)}{2\sqrt{l_1}\sqrt{\left(d\pm l_1\right)^2-l_2^2}},$$

$$K_{N2}^{\pm}=\frac{|m|\kappa}{h(1+\kappa)}\left\{-\sqrt{l_2}\pm\frac{l_1^2-\left(l_2\mp d\right)^2-\left[d^2-\left(l_2-l_1\right)^2\right]E(\rho)/K(\rho)}{2\sqrt{l_2}\sqrt{\left(\pm l_2-d\right)^2-l_1^2}}\right\},$$

$$K_{M1}^{\pm}=\pm\frac{m}{1+\kappa}\frac{\left(d\pm l_1\right)^2-l_2^2+\left[d^2-\left(l_1-l_2\right)^2\right]E(\rho)/K(\rho)}{2\sqrt{l_1}\sqrt{\left(d\pm l_1\right)^2-l_2^2}},$$

$$K_{M2}^{\pm}=\frac{m}{1+\kappa}\left\{\kappa\sqrt{l_2}\pm\frac{l_1^2-\left(l_2\mp d\right)^2-\left[d^2-\left(l_2-l_1\right)^2\right]E(\rho)/K(\rho)}{2\sqrt{l_2}\sqrt{\left(\pm l_2-d\right)^2-l_1^2}}\right\}. \qquad (9)$$

Підставивши розв'язки (8) у перше з інтегральних співвідношень (5) і прийнявши $n=1, k=2$, отримали вираз для обчислення контактних зусиль між зімкнутими берегами тріщини:

$$N_{y_1}(x_1,0)=-\frac{|m|}{h}\frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{x_1+d}{\sqrt{\left(x_1+d\right)^2-l_2^2}}. \qquad (10)$$

Зазначимо, що силова нерівність контакту в крайових умовах (2) не порушується.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Проаналізуємо отримані розв'язки для випадку дефектів однакової довжини $l_1=l_2=l$. Введемо безрозмірний параметр відносного розташування дефектів $\lambda=2l/d$. Формули (9) матимуть вигляд:

$$K_{N1}^{\pm}=\frac{|m|\kappa\sqrt{l}}{h(1+\kappa)}\left\{\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\},\quad K_{N2}^{\pm}=\frac{|m|\kappa\sqrt{l}}{h(1+\kappa)}\left\{-1\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\},$$

$$K_{M1}^{\pm}=\frac{m\sqrt{l}}{1+\kappa}\left\{\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\},\quad K_{M2}^{\pm}=\frac{m\sqrt{l}}{1+\kappa}\left\{\kappa\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\}. \qquad (11)$$

Задля порівняння наведемо іще вирази коефіцієнтів інтенсивності у вершинах двох колінеарних щілин [2, 3]:

$$K_{N1}^{\pm}=K_{N2}^{\mp}=0,\quad K_{M1}^{\pm}=K_{M2}^{\mp}=m\sqrt{l}\left\{\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\}, \qquad (12)$$

та двох колінеарних контактних тріщин [10]:

$$K_{N1}^{\pm}=K_{N2}^{\mp}=\frac{|m|\kappa\sqrt{l}}{h(1+\kappa)}\left\{\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\},\quad K_{M1}^{\pm}=K_{M2}^{\mp}=\frac{m\sqrt{l}}{1+\kappa}\left\{\pm\frac{1\pm\lambda-E(\lambda)/K(\lambda)}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\right\}. \qquad (13)$$

На рис. 2 подано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності силових чинників, що обчислюються за формулами (11)-(13) та відображають вплив одного з дефектів на напружено-деформований поблизу іншого. Якщо на одному з дефектів врахувати контакт його берегів (розглядаємо тріщину), то відсутність чи наявність взаємодії на іншому ніяк не вплине на напружено-деформований стан в околі цього дефекту (розкриття тріщини в діаді «тріщина – щілина» таке ж, як і в діаді «тріщина – тріщина». Якщо ж розглянути щілину – без взаємодії берегів, то врахування контакту на другому дефекті (тріщині) призведе до зменшення коефіцієнтів інтенсивності згинальних моментів на щілині та до появи ненульових коефіцієнтів мембранних зусиль.

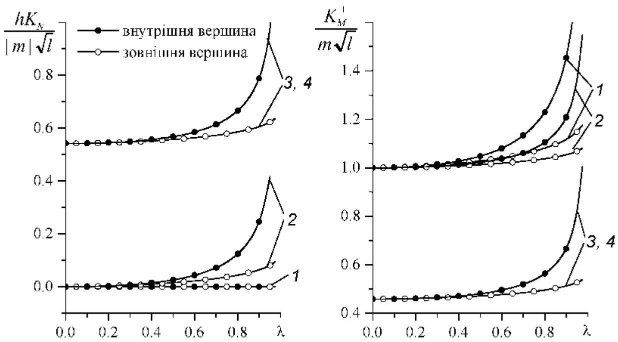


Рис. 2. Коефіцієнти інтенсивності мембранного зусилля та згинального моменту для діад співвісних дефектів: 1 – щілина – щілина, 2, 3 – щілина – тріщина, 4 – тріщина – тріщина

Рис. 3 демонструє розподіл контактних зусиль на лінії тріщини. При наближенні тріщини до щілини (зростання λ) реактивні зусилля збільшуються за модулем, отже, взаємодія кромок тріщини інтенсифікується.

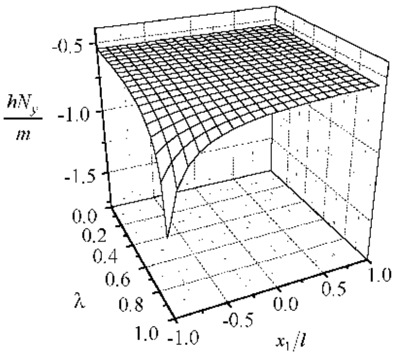


Рис. 3. Розподіл контактної реакції між зімкнутими берегами тріщини, яка взаємодіє з щілиною

У граничному випадку $\lambda \to 0$ отримуємо відомі результати для ізольованої тріщини [4, 5] та щілини (з неврахуванням взаємодії країв) [1–3]. Якщо зближувати дефекти, то в границі $\lambda \to 1$ у внутрішній вершині тріщини отримаємо кореневу особливість контактного зусилля, як і в задачі для згину пластини зі сполученими тріщиною та щілиною [9].

ВИСНОВКИ

Прийняті в роботі моделі тріщини та щілини дали можливість побудувати аналітичний розв'язок задачі згину пластини з різнотипними колінеарними дефектами різної довжини. Виконане дослідження показало, що контактна тріщина і вільна щілина, що взаємодіють між собою і в умовах деформації згину, є принципово різними концентраторами напружень, які продукують якісно відмінні картини локальних збурень напруженого стану пластини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Williams M. L. The bending stress distribution on the base of a stationary crack / M.L. Williams // J. Appl. Mech. – 1961. – V. 28, № 1. – P. 78-82.
2. Бережницкий Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1979. – 400 с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
5. Young M. J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution / M.J. Young, C.T. Sun // Intern. J. Fract. – 1992. – V 55. – P. 81-93.
6. Шацкий И. П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91-97.
7. Khludnev A. M. Analysis of cracks in solids / A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko. – Southampton; Boston : WIT-Press, 2000. – 408 p.
8. Даляк Т. М. Про взаємодію тріщин з щілинами при згині пластинки / Т.М. Даляк // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2) : В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В.В. – Львів : Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 269-272.
9. Шацький І. П. Про закриття тріщин, з'єднаних зі щілинами, в зігнутій пластині / І.П. Шацький, Т.М. Даляк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 24-30.

10. Шацкий И. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70-75.

REFERENCES

1. Williams, M.L. (1961), "The bending stress distribution on the base of a stationary crack", *J. Appl. Mech*, vol. 28, no. 1, pp. 78-82.
2. Berezhnitskii, L.T., Delyavskii, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izgib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects such as cracks], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
3. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Ttwo-dimensional problems of elasticity for cracked bodyes], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
4. Shatskyi, I.P (1988), "Bending of plate weakened by the cut with contacting edges", *Dopovidi AN URSR. Ser. A*, no. 7, pp. 49-51.
5. Young, M.J. and Sun, C.T. (1992), "Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution", *Intern. J. Fract.*, vol. 55, pp. 81-93.
6. Shatskii, I.P. (2001), "Model for contact of crack boundaries in a bending plate", *J. Math. Sci.*, vol. 103, iss. 3, pp. 357-362.
7. Khludnev, A.M. and Kovtunenko, V.A. (2000), "Analysis of cracks in solids", WIT-Press, Southampton; Boston.
8. Dalyak, T.M. (1999), "About interaction between cracks and slots in plate bending", *Mekhanika ruynuvannya materialiv i mitsnist konstruktsi*, (Iss. 2): In 3 vol. / Ed. Panasyuk V. V., Kamenyar, Lviv, vol. 2, pp. 269-272.
9. Shats'kyi, I.P. and Dalyak, T.M. (2002), "Closure of cracks merged with slots in bent plates", *Materials Sci*, vol. 38, iss. 1, pp. 24-33.
10. Shatskii, I.P. (1990), "Interaction of collinear sections with contacting edges in a bent plate", *Materials Sci.*, vol. 26, iss. 3, pp. 311-316.

УДК 539.3

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ РОТОРА С ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ КОНТАКТИРОВАНИЯ БЕРЕГОВ

Шульженко Н. Г., д. т. н., профессор, Зайцев Б. Ф., д. т. н., с. н. с.,
Руденко Е. К., к. т. н., н. с., Асаенок А. В., к. т. н., н. с.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина

shulzh@kharkov.ua

Представлена методика расчета колебаний неравномерно нагретого ротора с «дышащей» трещиной. Использованы МКЭ, конечно-разностное решение начальной задачи с итерациями для выполнения условий контактирования берегов. На реальном примере исследованы особенности колебаний ротора с учетом влияния температурного поля.

Ключевые слова: колебания, ротор, поперечная трещина, температурное поле, конечный элемент, контакт берегов.

ОЦІНКА ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ НА КОЛИВАННЯ РОТОРА З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУВАННЯ БЕРЕГІВ

Шульженко М. Г., д. т. н., професор, Зайцев Б. Ф., д. т. н., с. н. с.,
Руденко О. К., к. т. н., н. с., Асайонок О. В., к. т. н., н. с.

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

shulzh@kharkov.ua

Представлена методика розрахунку коливань нерівномірно нагрітого ротора з «дихаючою» тріщиною. Застосовані МСЕ, скінченно-різницеве розв'язання початкової задачі з ітераціями для виконання умов контактування берегів. На реальному прикладі досліджені особливості коливань ротора з урахуванням впливу температурного поля.

Ключові слова: коливання, ротор, поперечна тріщина, температурне поле, скінченний елемент, контакт берегів.

ASSESSMENT OF TEMPERATURE STRESS IMPACT ON VIBRATION OF ROTOR WITH TRANSVERSE CRACK ACCOUNTING BANKS CONTACT

Shulzhenko N. G., D. of Technical Science, Professor,
Zaitsev B. Ph., D. of Technical Science, Senior Researcher,
Rudenko E. K., Ph.D. of Technical Science, Asaenok A. V., Ph.D. of Technical Science

*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,
Pozharsky str., 2/10, Kharkov, 61000, Ukraine*

shulzh@kharkov.ua

The method for vibration analysis of unevenly heated rotor with transverse crack, banks of which is in contact, is proposed. Vibrations are considered in the moving coordinate system associated with rotor. Three dimensional finite element modeling is used. Special method is used to set crack in the original solid rotor. This method is based on modification of finite element mesh and creation of surface with unrelated double nodes. Formalized matrix operations are applied to standard elements. The database of degenerate finite elements is created. This method allows making modeling of cracks with complex surface and imposes no restriction on number of them.

Matrix form equations of motion are received. There are stiffness and mass matrix of rotor with crack in those equations. The equations supplemented by special mass matrix that allows taking into account linear change of centrifugal forces under three dimensional rotor deformations.

The interaction of crack banks is considered as normal separation scheme without friction. Terms of banks non-penetration is performed by entering of unknown contact forces in the double nodes. Contact forces on surface of the crack are presented at the right side of equations of motion.

Temperature field in the rotor is determined from equations of unsteady heat conduction and accounted by setting fictitious body forces.

The initial problem of rotor vibrations is solved by direct numerical integration with Newmark's scheme. Contact forces are defined iteratively at each time step until condition of banks contact is performed.

The method is used to study vibrations of real heating rotor. Unsteady temperature field is analyzed by Crank–Nicolson's method. The most noticeable effect of temperature field is shown for the moments corresponding to the maximal radial temperature difference on the rotor shaft. The features of vertical vibrations of rotor and their spectral composition with and without considering temperature field are assessed. Contact between banks of crack under rotation of rotor is absent when no considering temperature field. Superresonance 2/1 and main resonance occurs in the range before operating frequency. Contact areas remain constant with different frequencies under the action of temperature field. The influence is seen in smoothen of crack «breathing» effect, i.e. the absence of resonances. It leads to mainly monoharmonical vibrations.

Key words: vibrations, rotor, transverse crack, temperature field, finite element, banks contact.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ вибрационного состояния тел с трещинами актуален при решении задач диагностики конструкций. В большинстве работ, посвященных этой тематике (например, [1-8]), применяются стержневые модели, в которых по-разному учитывается изменение состояния и влияния трещины на податливость системы при повороте, связанных с ее «дыханием». В [2-6] изменение податливости системы с трещиной определяется на основе использования энергетических соотношений механики трещин. В [1, 3] ее «дыхание» задается как мгновенный переход из открытого в закрытое состояние и наоборот, в зависимости от углового положения системы. В [4-6, 7] переменная податливость определяется в зависимости от углового положения с введением линии закрытия трещины, исходя из кинематических [1, 4, 5, 8] или статических [1, 6] представлений.

Условность моделирования процесса «дыхания» и применение стержневых моделей не позволяет в ряде случаев адекватно отобразить особенности рассматриваемых процессов (наличие трещины в местах резкого изменения формы деталей; наклонные, продольные и криволинейные трещины). Представляется, что процессы сближения–расхождения берегов трещины и изменения податливости системы с ней более адекватно могут быть описаны при решении контактной задачи на основе использования трехмерных моделей.

Роторы турбомашин подвержены действию не только веса или центробежных сил, но также внутренних самоуравновешенных сил, обусловленных, прежде всего, неравномерным температурным полем, технологическими факторами, которые сопровождали изготовление конструкции (ковка, сварка, закалка и т.д.). Следствием влияния эксплуатационных и технологических факторов являются начальные напряжения, а также деформации (искривления), которые вместе с напряжениями от активных сил влияют на результирующее напряженно-деформированное состояние. При этом, если в конструкции имеется трещина, то ее проявление существенно зависит от результирующего поля напряжений. Начальные напряжения определяются стационарными факторами, а напряжения от сил, вызывающих колебания, – переменными.

Т.о., имеет место комбинация полей НДС – стационарных и нестационарных. Если трещина расположена в части конструкции, где начальные напряжения сжимающие, то она может не проявляться при деформациях, вызванных колебаниями.

На качественном уровне влияние начальных, прежде всего температурных напряжений, на колебания ротора с трещиной известно, однако количественная оценка их влияния отсутствует. Это объясняется значительными математическими сложностями решения задачи о колебаниях ротора с «дышащей» трещиной при наличии произвольного температурного поля, которое возможно только в трехмерной постановке.

В данной работе описываются методика расчета колебаний ротора по трехмерной модели с трещиной произвольного вида, «дыхание» которой определяется контактированием и раскрытием ее берегов с использованием условий нормального отрыва, и рассмотрен пример реального ротора с температурным полем, имеющим максимальный радиальный перепад и возникающим при наборе турбинной номинальной мощности.

МЕТОДИКА

Составляющими методики являются построение конечноэлементной (КЭ) модели тела с трещиной, учет контактирования («дыхания») ее берегов, построение уравнений колебаний вращающегося тела (ротора) с учетом температурного поля и алгоритмов решения нелинейной начально-краевой задачи.

Способ построения КЭ-модели тела с трещиной состоит в разрыве связей между узлами ее КЭ-сетки по поверхности, разделяющей берега трещины, и выполняется согласно [9]. Полученная модифицированная сетка конечных элементов содержит разделяющую поверхность, имеющую несвязанные между собой двойные узлы, представляющие берега трещины. Применение схемы введения разрезов [9] для учета трещины приводит к изменению основных характеристик КЭ-модели – матриц жесткости [**K**] и масс [**M**]. Это позволяет моделировать трещины со сложной поверхностью, например, состоящей из состыкованных или пересекающихся плоскостей различных направлений, и не накладывает ограничения на количество вводимых трещин. Берега трещины при колебаниях тела могут входить в односторонний контакт, когда отрыв возможен, а взаимное проникновение берегов отсутствует.

В рассматриваемой постановке контактирование берегов задается по нормали к поверхности трещины. При этом допускается проскальзывание без трения. Условие непроникновения берегов трещины имеет вид:

$$\delta_{in} = u_{in}^{+} - u_{in}^{-} \geq 0, \qquad (1)$$

где u_{in}^{+}, u_{in}^{-} – перемещения по нормали $\overline{n}$ в i двойном узле на положительной (+) и отрицательной (–) поверхностях трещины (рис. 1); δ_{in} – сближение по нормали в i двойном узле. Знаку равенства в (1) соответствует состояние контакта берегов трещины.

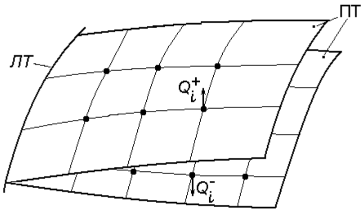


Рис. 1. Схемы введения диполей в двойных узлах:
ПТ – поверхность трещины; ЛТ – линия трещины

Силы, возникающие при контактировании берегов трещины (в зонах раскрытия они отсутствуют), определяются с помощью системы контактных сил $Q_i\left\{Q_i^+, Q_i^-\right\}$, приложенных в двойных узлах [10], попарно равных по величине $\left(Q_i^+ = Q_i^-\right)$ и противоположных по направлению и подлежащих определению, причем $i = 1 \div m$, где m – число двойных узлов на поверхности трещины. В соответствии с терминологией в теории упругости их можно назвать диполями (рис. 1).

Уравнения движения МКЭ вращающегося тела (ротора) с «дышащей» трещиной представляются в подвижной системе координат, связанной с телом, так

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} - 2\omega\cdot[\mathbf{M}_2]\dot{\mathbf{u}} + ([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}_1] - \omega^2[\mathbf{M}'_\omega])\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_т + \mathbf{Q}\{Q_i\}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения узлов; ω – частота вращения; $\omega^2\mathbf{P}$ – вектор центробежных сил в недеформированном состоянии; $\mathbf{F}_e$ – вектор внешней нагрузки; $\mathbf{F}_т$ – вектор температурных сил; $\mathbf{Q}\{Q_i\}$ – система диполей, учитывающая переменные поверхностные силы, действующие по берегам трещины; $[\mathbf{M}_1]$, $[\mathbf{M}_2]$, $[\mathbf{M}'_\omega]$ состоят из элементов матрицы масс, причем $[\mathbf{M}_1]$ имеет симметричную структуру, $[\mathbf{M}_2]$, $[\mathbf{M}'_\omega]$ – несимметричную.

Выражения для температурной нагрузки $\boldsymbol{F}_T$, обусловленной температурным полем $T(x, y, z)$, определяются дополнительным слагаемым в функционале Лагранжа-Даламбера для движущейся среды

$$-\int_V \frac{\alpha E}{1-2\nu}\theta T dV\,, \qquad (3)$$

где E, ν – модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; θ – объемная деформация.

Исходя из выражения (3) и соотношений для перемещений и декартовых координат через функции формы $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ локальных координат ξ, η, ζ, можно получить общее выражение для узловых значений температурной нагрузки $\boldsymbol{F}_T$ на КЭ. В случае постоянных характеристик материала выражения имеют вид:

$$F_T = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\int\limits_{КЭ} T(x,y,z)\sum_i\left(u_{xi}\frac{\partial N_i}{\partial x} + u_{yi}\frac{\partial N_i}{\partial y} + u_{zi}\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)dV\,, \tag{4}$$

где u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} – узловые значения компонентов вектора перемещений.

Полный вектор температурной нагрузки получается суммированием по всем КЭ модели ротора.

С помощью матрицы $[\mathbf{M}'_{\omega}]$ в уравнении (2) учитывается в линейной постановке изменения центробежных сил при смещениях с сохранением их радиальной направленности [11].

Распределение контактных сил – диполей $\mathbf{Q}\{Q_i\}$ – изменяется во времени и определяется из решения контактной задачи для берегов трещины до выполнения условий (1).

Определение матриц масс и жесткости (2) тела осуществляется при полностью открытой трещине. Введением системы диполей $\mathbf{Q}$ в правой части уравнений (2) учитывается влияние изменения формы тела при изменении зон контакта, что позволяет при этом не перевычислять матрицы жесткости и масс.

Решение начальной задачи (2) для расчета колебаний выполняется прямым интегрированием по двухслойной неявной конечноразностной схеме Ньюмарка, являющейся, безусловно, устойчивой [12]. Конечноразностные соотношения по методу Ньюмарка представляются в виде:

$$[\hat{\mathbf{K}}]\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}\,, \tag{5}$$

где $[\hat{\mathbf{K}}]$ – модифицированная матрица жесткости; $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений для конца шага; $\hat{\mathbf{R}}_{t+\Delta t}$ – модифицированная правая часть уравнений (2) для момента времени $t+\Delta t$.

Модифицированный вектор правой части может быть представлен в виде

$$\hat{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} = \tilde{\hat{\mathbf{R}}}_{t+\Delta t} + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}\,,$$

где $\tilde{\hat{\mathbf{R}}}_{t+\Delta t}$ соответствует известной части модифицированного вектора правой части; $\mathbf{Q}_{t+\Delta t}$ – наперед неизвестная часть, но в конце шага должна быть такой, чтобы удовлетворялись условия контакта (1).

Перемещения в конце шага $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\,,$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений, соответствующий известной (вычисленной) части выражения (5); $\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ – вектор дополнительных перемещений от контактных сил $\mathbf{Q}_{t+\Delta t}$.

Перемещения $\tilde{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ определяются при решении системы (5) с известной правой частью, а перемещения $\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ – после нахождения $Q_{t+\Delta t}$ методом итераций до выполнения условий контактирования (1). После определения контактных усилий перемещения $\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ могут быть вычислены

$$\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = [\mathbf{B}]_{\Delta t}\mathbf{Q}_{t+\Delta t}\,,$$

где $[\mathrm{B}]_{\Delta t}$ – матрица коэффициентов влияния размерностью $N\times m$ (N – число переменных в узлах). Элементы строк матрицы $[\mathrm{B}]_{\Delta t}$ вычисляются предварительно и равны динамическим смещениям в теле за промежуток времени Δt от единичных диполей, приложенных поочередно в каждом из двойных узлов.

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследования выполнялись на примере ротора среднего давления (РСД-1) теплофикационной турбины Т-250/300-240 Уральского турбомоторного завода. Модель ротора представлена на рис. 2, где показано расположение подшипниковых опор и рассматриваемой гипотетической трещины по валу ротора, которая занимает половину сечения.

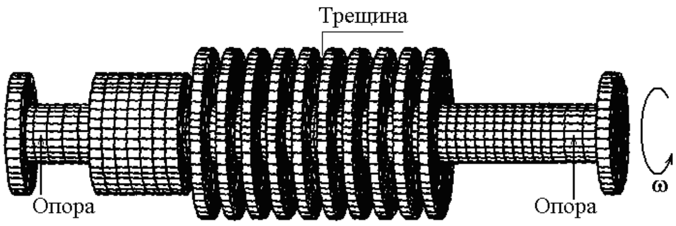


Рис. 2. Модель ротора

Температурное поле при пуске ротора по мере его прогрева меняется, достигая на установившемся режиме стационарного состояния. Исследования, выполненные при решении задачи термоупругости для различных температурных полей в роторе, показывают, что наибольшее влияние на колебания ротора с поперечной трещиной может быть при максимальных радиальных перепадах температуры, что представляет наибольший интерес.

Нестационарное температурное поле рассчитывалось МКЭ с использованием конечно-разностной схемы интегрирования по времени Крэнка-Николсона [13] матричного уравнения теплопроводности с помощью математического обеспечения [14]. Температурное поле с максимальным перепадом, который составил по валу около 50°С, было достигнуто через 9,5 часа после пуска турбины в момент выхода на максимальную мощность 300 МВт.

Влияние температурных напряжений для рассматриваемого поля значительное, что проявляется в неизменности зоны контактирования берегов поперечной трещины при различных частотах вращения ротора. Такое состояние фиксируется для принятой дискретизации поперечного сечения ротора (21 двойной узел на берегах трещины). Контактирование берегов трещины следует из рис. 3, где зона контакта занимает периферию сечения (более высокая температура осесимметричного поля и температурные напряжения сжатия), а зона отрыва – сердцевину сечения (более низкая температура и температурные напряжения растяжения).

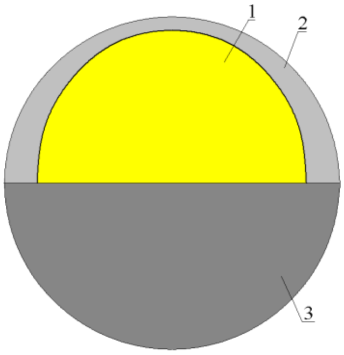


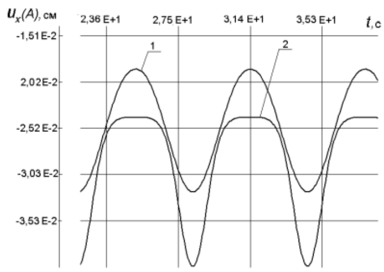
Рис. 3. Контактное состояние берегов трещины:
1 – зона отрыва; 2 – зона контакта; 3 – цельная часть сечения

Следует отметить, что при более густой дискретизации можно ожидать некоторого изменения расположения линии, разграничивающей области контакта и отрыва при вращении ротора.

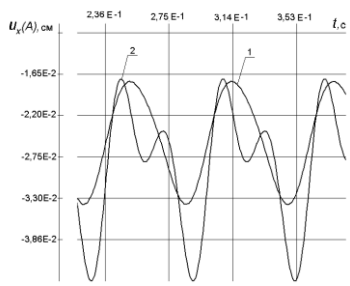
Изменения в характере колебаний ротора (точка оси ротора в сечении с трещиной) под влиянием температурного поля с максимальным радиальным перепадом при различных частотах вращения представлены на рис. 4, где для сравнения приводятся данные расчетов в отсутствии температурного поля (кривые 2). Результаты показывают, что данное температурное поле в целом значительно уменьшает максимальные значения прогибов и размахи колебаний.

При этом вид колебаний приближается к моногармоническим, что объясняется почти постоянной областью контактирования берегов трещины. При постоянной области контакта деформирование почти линейное, но с переменной жесткостью, обусловленной не изменением зон контакта, а положением сечения (аналогично валу двоякой жесткости). При этом добавляется составляющая от прецессии искривленного вследствие температурного поля ротора. Это подтверждается данными спектрального анализа гармонических составляющих вертикального смещения на периоде колебаний $2\pi/\omega$. Результаты гармонического анализа представлены на рис. 5.

При отсутствии температурного поля с изменением частоты вращения спектр гармонических составляющих сильно меняется. По достижении приблизительно половины низшей собственной частоты (ω = 100 с$^{-1}$) наблюдается возрастание второй гармоники, что может квалифицироваться, учитывая нелинейность системы, как суперрезонанс 2/1. В зарезонансной области происходит резкое перераспределение гармонических составляющих, где преобладающей становится первая гармоника. В области частот вращения, близких к собственным частотам, соответствующим первой форме изгибных колебаний ротора с трещиной (ω = 200 с$^{-1}$), возникает основной резонанс по оборотной составляющей. Далее, с возрастанием частоты до рабочей, амплитуды гармонических составляющих уменьшаются. При наличии температурного поля с радиальным перепадом основной в спектре является первая гармоника и колебания близки к моногармоническим с оборотной частотой.



ω = 1 с$^{-1}$



ω = 100 с$^{-1}$

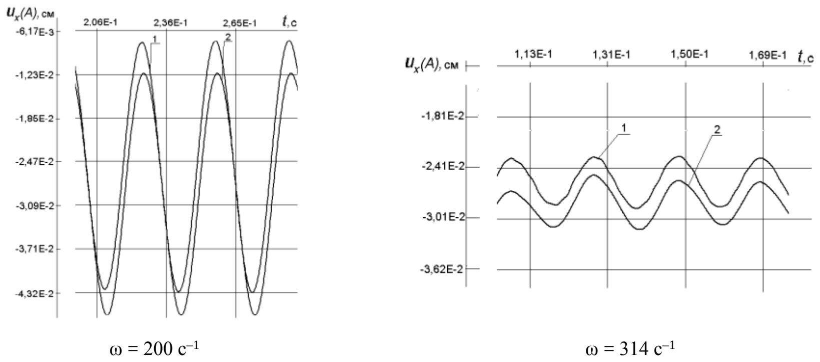


Рис. 4. Вертикальные колебания ротора при различных частотах вращения:
1 – вес и Т-поле; 2 – вес

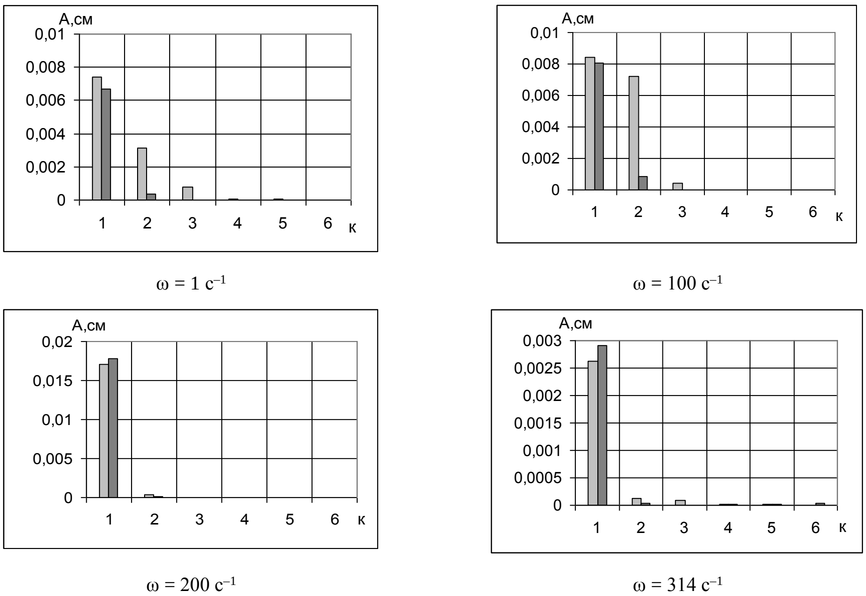


Рис. 5. Спектральный состав вертикальных перемещений ротора
при различных частотах вращения и учете: – веса и Т-поля; – только веса

ВЫВОДЫ

Наибольший эффект влияния нестационарного температурного поля в роторе с поперечной трещиной на его колебания проявляется при максимальном радиальном перепаде температуры. Контактирование берегов трещины при отсутствии температурного воздействия переменное, а при его наличии зоны контакта и отрыва берегов стабильны и не изменяются с частотой вращения.

Расчетные исследования нелинейных колебаний ротора (ротор гибкий) без учета влияния температурного поля на различных частотах показывают, что он испытывает два резонанса. Первый квалифицируется как суперрезонанс 2/1 на частоте близкой к половине расслоившихся из-за трещины низших собственных частот, на которой вторая гармоническая составляющая достигает максимума. Второй резонанс является основным, на котором оборотная гармоническая составляющая максимальна. Влияние температурного поля проявляется в сглаживании эффектов (резонансов) «дышащей» трещины и приводит к моногармоничности колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульженко Н. Г. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат-фундамент / Н.Г. Шульженко, Ю.С. Воробьев. – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Матвеев В. В. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях / В.В. Матвеев, А.П. Бовсуновский // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23.
3. Kicinski J. Assessment of materials and operational imperfections in rotating machinery / J. Kicinski // Key Eng. Materials. – Trans. Tech. Publications, Switzerland. – 2005. – Vol. 293, 294. – P. 391-400.
4. Sekhar A. S. Effects of cracks on rotor system instability / A.S. Sekhar, J.K. Dey // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Vol. 35. – P. 1657-1674.
5. Darpe A. K. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor / A.K. Darpe, K. Gupta, A. Chawla // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 269. – P. 33-60.
6. Pennacchi P. A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines / P. Pennacchi, N. Bachschmid, A. Vania // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2000. – Vol. 20. – P. 2112-2147.
7. Shulzhenko N. G Simplified models of turbine vibrations with breathing crack in the shaft / N.G. Shulzhenko, B.Ph. Zajtsev, A.V. Asaenok, S. Banaszek // Int. J. Applied Mechanics and Engineering. – 2012. – Vol. 17. – No. 1. – P. 233-247.
8. Шульженко Н. Г. Методы расчета и анализ характеристик колебаний многоопорного ротора с поперечной трещиной / Н.Г. Шульженко, Г.Б. Овчарова // Проблемы прочности. – 1997. – № 4. – С. 92-99.
9. Асаёнок А. В. Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций / А.В. Асаёнок, Б.Ф. Зайцев, Н.Г. Шульженко // Проблемы машиностроения. – 2003. – Т.6, № 3. – С. 58-63.
10. Шульженко Н. Г. Расчет колебаний ротора с «дышащей» трещиной по трехмерной модели / Н.Г. Шульженко, Б.Ф. Зайцев, Н.Е. Викман, А.В. Асаенок // Проблемы прочности. – 2012. – № 6. – С. 137-145.
11. Зайцев Б. Ф. Построение матриц масс для учета центробежных сил при колебаниях трехмерного вращающегося тела / Б.Ф. Зайцев, А.В. Асаенок, Н.Е. Викман // Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин. – 2009. – Вып. 30. – С. 52-56.
12. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.
13. Эмери А. Ф. Оценка применимости МКЭ при расчетах температуры / А.Ф. Эмери, В.В. Карлсон // Теплопередача. – 1971. – № 2. – С. 6-17.
14. Шульженко Н. Г. Задачи термопрочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований) : монография / Н.Г. Шульженко, П.П. Гонтаровский, Б.Ф. Зайцев. – Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, 2011. – 370 с.

REFERENCES

1. Shul'zhenko, N.G. and Vorob'ev, Ju.S. (1991), “Chislennyj analiz kolebanij sistemy turboagregat-fundament”, Nauk. dumka, Kiev.

2. Matveev, V.V. and Bovsunovskij, A.P. (2000), “K opredeleniju vibracionnyh harakteristik sterzhnja s zakryvajushhejsja treshhinoj pri izgibnyh kolebanijah”, *Problemy prochnosti*, no. 3, pp. 5-23.
3. Kicinski, J. (2005), “Assessment of materials and operational imperfections in rotating machinery”, *Key Eng. Materials*, Trans. Tech. Publications, Switzerland, vol. 293, 294, pp. 391-400.
4. Sekhar, A.S. and Dey, J.K. (2000), “Effects of cracks on rotor system instability”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 1657-1674.
5. Darpe, A.K., Gupta, K. and Chawla, A. (2004), “Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, pp. 33-60.
6. Pennacchi, P., Bachschmid, N. and Vania A. (2000), “A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, pp. 2112-2147.
7. Shulzhenko, N.G., Zajtsev, B.Ph., Asaenok, A.V. and Banaszek, S. (2012), “Simplified models of turbine vibrations with breathing crack in the shaft”, *Int. J. Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, no. 1, pp. 233-247.
8. Shul'zhenko, N.G. and Ovcharova, G.B. (1997), “Metody rascheta i analiz harakteristik kolebanij mnogoopornogo rotora s poperechnoj treshhinoj”, *Problemy prochnosti*, no. 4, pp. 92-99.
9. Asajonok, A.V., Zajcev, B.F. and Shul'zhenko, N.G. (2003), “Metodika vvedenija razrezov v sheme metoda konechnyh jelementov v zadachah statiki i sobstvennyh kolebanij trehmernyh konstrukcij”, *Problemy mashinostroenija*, vol. 6, no. 3, pp. 58-63.
10. Shul'zhenko, N.G., Zajcev, B.F., Vikman, N.E. and Asaenok, A.V. (2012), “Raschet kolebanij rotora s “dyshashhej” treshhinoj po trehmernoj modeli”, *Problemy prochnosti*, no. 6, pp. 137-145.
11. Zajcev, B.F., Asaenok, A.V. and Vikman, N.E. (2009), “Postroenie matric mass dlja ucheta centrobezhnyh sil pri kolebanijah trehmernogo vrashhajushhegosja tela”, *Vestnik NTU “HPI”, Dinamika i prochnost' mashin*, issue 30, pp. 52-56.
12. Bate, K. and Vil'son, E. (1982), “Chislennye metody analiza i metod konechnyh jelementov”, Strojizdat, Moskow.
13. Jemeri, A.F. and Karlson, V.V. (1971), “Ocenka primenimosti MKJe pri raschetah temperatury”, *Teploperedacha*, no. 2, pp. 6-17.
14. Shul'zhenko, N.G., Gontarovskij, P.P. and Zajcev, B.F. (2011), “Zadachi termoprochnosti, vibrodiagnostiki i resursa jenergoagregatov (modeli, metody, rezul'taty issledovanij): monografija”, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, Saarbrücken, Germany.

УДК …………

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей** статті (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обгрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, ***напівжирний курсив*** зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;

b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;

c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;

d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;

e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;

f) для анотацій, виносок, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;

g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;

h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовок статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 250-300 слів) анотація із ключовими словами англійською мовою**.** Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і **не виділяється відступом або пустим рядком.**

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з обтіканням «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблиця 1, Таблиця 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка **[8, с.16].** Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядкові заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різнорідності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли:**

✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,

✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 228-76-28 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти: kpmm.mf@znu.edu.ua

ДЛЯ НОТАТОК

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки

№ 1, 2015

Технічний редактор – *Безугла Л. А.*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку.20.05.2015 Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 28,7

Замовлення № 110 Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007