4. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям: Тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257-258.

5. Хомченко А.Н., Камаева Л.И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства// Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./ Горький: ГГУ, 1985. – С. 14-17.

6. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. Вычислительные эксперименты с альтернативными базисами серендиповых аппроксимаций // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горький: ГГУ, 1988. – С. 103-105.

УДК 514.725.22:514.748.2

О РЕГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ С ВЫРОЖДЕННОЙ ИНДИКАТРИСОЙ КРИВИЗНЫ

Величко О.В., к. ф.-м. н., ассистент, *Сорокина Е.А., преподаватель

Запорожский национальный университет
**Запорожский колледж радиоэлектроники ЗНТУ*

В статье введено понятие индикатрисы *n*-го порядка плоской регулярной кривой. Получена формула для кривизны индикатрисы. Описан класс кривых, индикатрисами 1-го порядка которых являются отрезки.

Ключевые слова: кривая, кривизна кривой, индикатриса, натуральное уравнение.

Величко О.В., *Сорокіна К.О. ПРО РЕГУЛЯРНІ КРИВІ З ВИРОДЖЕНОЮ ІНДИКАТРИСОЮ КРИВИНИ / Запорізький національний університет, *Запорізький коледж радіоелектроніки Україна

У статті введено поняття індикатриси n-го порядку плоскої регулярної кривої. Отримана формула для кривини індикатриси. Описано клас кривих, індикатрисами 1-го порядку яких є відрізки.

Ключові слова: крива, кривина кривої, індикатриса, натуральне рівняння.

Velichko H.V., *Sorokina K.A. ON THE REGULAR CURVES WITH THE DEGENERATE INDIKATRIX OF THE KURVATURE / Zaporizhzhya national university, *Zaporizhzhya college of radio electronics Ukraine.

The notion of the n-power indicatrix of the plane regular curve is introduced in the article. The formula for the curvature of the indicatrix is obtained. The class of the curves, which have the segment as the indicatrix of the first power, is described.

Key words: the curve, curvature of the curve, indicatrix, natural equation.

В современной дифференциальной геометрии при изучении геометрических объектов используются многообразие Грассмана и их подмногообразия. Обзор последних достижений в этой области можно найти в монографии [1]. Одним из подмногообразий Грассмана является грассманов образ поверхности. В данной работе рассматривается аналог понятия «грассманов образ поверхности» - индикатриса кривизны плоской кривой.

В этой статье мы выясняем, может ли индикатриса вырождаться (то есть иметь постоянную нулевую кривизну). Другими словами: может ли прямая или ее часть являться индикатрисой некоторой кривой.

Пусть плоская регулярная кривая γ задана векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(s)$, где s –длина дуги (натуральный параметр). В каждой точке M(s) кривой γ построим касательной вектор $k(s) \cdot \bar{r}'(s)$, где *k(s)* – «ориентированная» кривизна кривой в этой точке.

Определение. Индикатрисой кривизны плоской регулярной кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$ (в дальнейшем мы ее будем называть просто индикатрисой) называется годограф вектор – функции $\overline{R}(s) = k(s) \cdot \bar{r}'(s)$.

Таким образом, индикатриса является плоской кривой. Из определения индикатрисы непосредственно следует, что:

а) индикатриса прямой состоит из одной точки;

б) индикатрисой дуги окружности радиуса *R* является дуга окружности радиуса R^{-1}, повернутая на прямой угол по сравнению с исходной дугой.

Установим связь между кривизной исходной кривой и кривизной ее индикатрисы.

Теорема 1. Зависимость между кривой *k(s)* плоской кривой и кривизной *K(s)* ее индикатрисы имеет вид:

$$K(s) = \frac{3k \cdot k'^2 - k^2 \cdot k'' + k^5}{\left(k'^2 + k^4\right)^{3/2}} \tag{1}$$

Доказательство. Так как индикатриса уже не имеет натуральной параметризации, то формула для вычисления ее кривизны будет следующая:

$$K(s) = \frac{\left|\left[\overline{R}', \overline{R}''\right]\right|}{\left|\overline{R}'\right|^3}.$$

Используя деривационные формулы для базиса Френе [2] : $\overline{m}_1, \overline{m}_2$:

$\overline{m}_1' = k\overline{m}_2, \overline{m}_2' = -k\overline{m}_1$

И представление вектора $\overline{R}(s)$ в виде

$$\overline{R}(s) = k(s) \cdot \overline{r}'(s) = k(s)\overline{m}_1(s).$$

Вычислим производные

$$\overline{R}'(s) = k'(s) \cdot \overline{m}_1 + k(s) \cdot \overline{m}_1{}' = k'(s) \cdot \overline{m}_1 + k^2(s)\overline{m}_2,$$

$$\overline{R}''(s) = k''(s) \cdot \overline{m}_1 + 2k'(s) \cdot \overline{m}_1{}' + k \cdot \overline{m}_1'' = (k''(s) - k^3(s)) \cdot \overline{m}_1 + 3k(s) \cdot k'(s) \cdot \overline{m}_2.$$

Далее,

$$\left[\overline{R}', \overline{R}''\right] = [k'(s) \cdot \overline{m}_1 + k^2(s) \cdot \overline{m}_2, (k''(s) - k^3(s)) \cdot \overline{m}_1 + 3k(s) \cdot k'(s) \cdot \overline{m}_2] = \left(3kk'^2 - k^2k'' + k^5\right) \cdot \overline{m}_3,$$

$$\left|\left[\overline{R}', \overline{R}''\right]\right| = \left|3kk'^2 - k^2k'' + k^5\right|,$$

$$\left|\overline{R}'\right| = \sqrt{\left(k' \cdot \overline{m}_1 + k^2 \cdot \overline{m}_2\right)^2} = \sqrt{k'^2 \cdot \overline{m}_1{}^2 + 2 \cdot k' \cdot k^2 \cdot \overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 + k^4 \cdot \overline{m}_2^2} = \sqrt{k'^2 + k^4}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для кривизны, получим искомую формулу для вычисления «ориентированной» кривизны индикатрисы.

Из этой теоремы следует, что условие $k(s_0) = 0$ для некоторого значения параметра s_0 влечет за собой равенство $K(s_0) = 0$, то есть точкам распрямления кривой (таким ее точкам, в которых кривизна равна нулю) соответствуют точки распрямления ее индикатрисы. Возникает естественный вопрос, верно ли обратное предложение? Только ли точки распрямления кривой переходят в точки распрямления индикатрисы? Или, другими словами, для каких кривых их индикатриса вырождается в отрезок.

Пусть точка $M = \overline{R}(s_0)$ является точкой распрямления индикатрисы. Тогда, по определению точки распрямления, кривизна в этой точке равна нулю, то есть $K(s_0) = 0$. Согласно формуле (1),последнее требование приводит к уравнению

$$3kk'^2 - k^2k'' + k^5 = 0. \tag{2}$$

Одним из решений полученного уравнения является $k(s) \equiv 0$. Для нахождения других решений нужно решить дифференциальное уравнение

$$3k'^2 - kk'' + k^4 = 0 \tag{3}$$

При помощи замены

$$k' = p(k) \tag{4}$$

Приводим это дифференциальное уравнение к виду

$$3p^2 - k \cdot p \cdot p' + k^4 = 0.$$

Положив $y(k) = p^2$, $y' = 2 \cdot p \cdot p'$, получим:

$$-\frac{1}{2} k \cdot y' + 3y + k^4 = 0.$$

Так как мы ищем решения, отличные от k=0, разделим полученное уравнение на $-\frac{1}{2}k$. Получим линейное уравнение первого порядка:

$$y' - \frac{6}{k} y - 2k^3 = 0 \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y = Ak^6 - k^4.$$

Отсюда $p = \pm k^2 \cdot \sqrt{Ak^2 - 1}$. Подставляя найденную функцию p(k) в (4), получаем уравнение

$$\frac{dk}{ds} = \pm k^2 \sqrt{Ak^2 - 1}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dk}{k^2 \sqrt{Ak^2 - 1}} = \pm ds,$$

откуда $\frac{\sqrt{Ak^2 - 1}}{k} + B = \pm s$. Отсюда (после переобозначения констант) получим, что

$$k(s) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda^2 - (s - \mu)^2}} \tag{6}$$

где $\lambda, \mu \geq 0$ - произвольные константы. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Среди плоских регулярных кривых без точек распрямления только те имеют индикатрису кривизны в виде отрезка, натуральные уравнения которых имеют вид (6).

Напомним, что по физическому смыслу параметр *s* может принимать только неотрицательные значения.

Исследуя область определения функции из равенства (6), можем сформулировать следующие факты.

Следствие 1. Прямая не может быть индикатрисой никакой регулярной кривой без точек распрямления.

Следствие 2. Отрезок может быть индикатрисой кривизны регулярной кривой без точек распрямления, но только в том случае, когда кривая имеет конечную длину.

Следствие 3. Существует бесконечно много нерегулярных плоских кривых, индикатриса кривизны которых содержит некоторый отрезок.

Уравнение (6) можно рассматривать как натуральное уравнение кривой. По основной теореме теории кривых это возможно сделать единственным (с точностью до положения на плоскости) образом [2].

Приведём пример восстановления, когда натуральное уравнение такой кривой будет иметь вид

$$\mathrm{k}\,(\mathrm{s}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{s}^2}}.$$

Найдём угол α - угол между касательной прямой к кривой и положительным направлением оси *OX*

$$\alpha = \int k(s)ds = \int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s$$

Теперь восстановим уравнения кривой в натуральной параметризации:

$$x(s) = \int \cos(\arcsin s)ds = \int \sqrt{1-s^2}\,ds = \frac{s}{2}\cdot\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2}\cdot\arcsin s,$$

$$y(s) = \int \sin(\arcsin s)ds = \int s ds = \frac{s^2}{2}$$

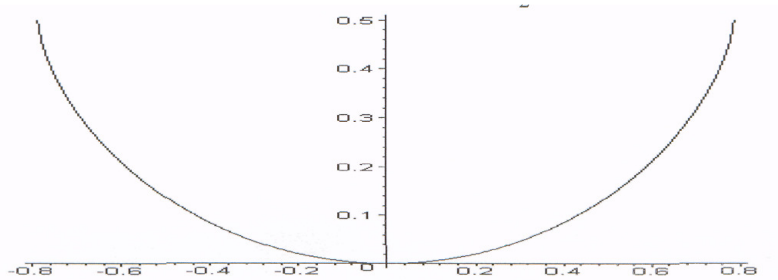

Рис.1.

На рис.1 изображен график восстановленной кривой.

Наряду с понятием индикатрисы можно изучать и некоторые обобщения.

Определение. Индикатрисой порядка n кривизны плоской регулярной кривой $\overline{r} = \overline{r}(s)$ называется годограф вектор-функции $\overline{R}(s) = k^n(s)\cdot\overline{r'}(s)$.

В этом случае вычисления показывают, что

$$[\overline{R'}, \overline{R''}] = k^{2n-1}((n^2+2n)k'^2 - nkk'' + k^4)\cdot\overline{m_3}$$

$$\left|R'\right| = k^{n-1}\sqrt{n^2k'^2 + k^4},$$

а, следовательно, формула для вычисления кривизны индикатрисы порядка n принимает вид

$$K(s) = \frac{\left|\left[\overline{R'}, \overline{R''}\right]\right|}{\left|\overline{R}'\right|^3} = \frac{k^n\left|(n^2+2n)k'^2 - nkk'' + k^4\right|}{\sqrt{n^2k'^2 + k^4}}. \qquad (7)$$

Заметим, что в случае n=1 формула (7) совпадает с (1). Это происходит потому, что понятие индикатрисы 1-го порядка совпадает с введенным в начале статьи понятием индикатрисы.

Таким образом, в статье изучен класс гладких плоских кривых, индикатрисы кривизны которых являются отрезком, а так же получено явное уравнение таких кривых. В дальнейшем планируется изучение пространственных аналогов таких кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. – К.:Наукова думка, 2002. – 469с.
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: МГУ, 1980.-432с.