

международной конференции и дискуссионного научного клуба "Новые информационные технологии в науке и бизнесе", Украина, Крым, Ялта-Гурзуф, 15-24 мая, 1996г. – 1996. – С. 251.

5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для ВУЗов, х2-е изд. / Ф.А. Новиков – СПб: Питер, 2007. – 364 с.
6. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика: под ред. Д.А. Поспедова / А.В. Зенкин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 192 с.
7. Толок А.В., Морозов Д.Н., Мыльцев А.М. Когнитивность М-образов в системе РАНОК / А.В. Толок, Д.Н. Морозов, А.М. Мыльцев // Техническая эстетика и дизайн. Научно-технический сборник. – 2008. – №5. – С. 140-144.
8. Толок А.В., Мыльцев А.М., Корогод В.Л. Алгоритм пространственного движения по градиенту на основе М-образов / А.В. Толок, А.М. Мыльцев, В.Л. Корогод // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К: КНУСА, 2007. – Вып. 77. – С. 85-90.
9. Монахов В.М. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: пособие для учителей / В.М. Монахов. – М.: Просвещение, 1978. – 175 с.

УДК 519.6

## ГЕОМЕТРИЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ШАБЛОНІВ МЕТОДУ БАРИЦЕНТРИЧНОГО УСЕРЕДНЕННЯ

Тулученко Г.Я., к.т.н., доцент

*Херсонський національний технічний університет*

У статті запропоновано модифікацію методу барицентричного усереднення, яка дозволяє формалізувати процедури вибору положення окремих обчислювальних шаблонів та обмеження їх кількості.

*Ключові слова:* метод барицентричного усереднення, задача Діріхле для рівняння Лапласа.

Тулученко Г.Я. ГЕОМЕТРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ШАБЛОНОВ МЕТОДА БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ / Херсонский национальный технический университет, Украина.

В статье предложена модификация метода барицентрического усреднения, которая позволяет формализовать процедуры выбора положения отдельных вычислительных шаблонов и ограничения их количества.

*Ключевые слова:* метод барицентрического усреднения, задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Tuluchenko G.Ya. GEOMETRY OF COMPUTING PATTERNS OF A METHOD BARYCENTRICAL AVERAGING / Kherson national technical university, Ukraine.

The updating of a method barycentric averaging which allows to formalize procedures of a choice of position of separate computing patterns and restriction of their quantity is offered in the article.

*Key words:* a method barycentric averaging, Dirichlet problem for Laplace equation.

**Постановка проблеми.** У технічних застосуваннях нерідко виникає задача відновлення значення гармонічної функції в одній (або кількох) точках досліджуваної області. Застосування класичних аналітичних та дискретних методів у цьому випадку видається надлишковим, оскільки за ними відновлюються аналітичний вираз шуканої функції або її значення в усіх вузлах сітки, якою покривають область гармонічності. Модифікації методу Монте-Карло, орієнтовані на розв'язання названих задач, вимагають проведення великої кількості статистичних випробувань. При відновленні окремого значення гармонічної функції доцільним є використання більш економічних розрахункових методів.

**Аналіз попередніх публікацій.** Метод барицентричного усереднення для відновлення значень гармонічних функцій бере свій початок у роботах професора А.Н. Хомченка [1]. Ефективність застосування методу та його модифікацій доведена в роботах учнів його школи. Але до цього часу процедура вибору положень обчислювальних шаблонів на окремих "стоп-кадрах" та процедура обмеження кількості "стоп-кадрів" у відповідності до необхідної точності лишаються неформалізованими. При відсутності відомого розв'язку задачі спірним є питання оптимального вибору "стоп-кадрів".

**Цілі статті.** Оптимізувати та формалізувати процедуру вибору вершин симплексів на "стоп-кадрах" та кількості "стоп-кадрів" при застосуванні методу баріцентричного усереднення до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

**Основна частина.** Як відомо, гармонічна в крузі функція в центрі цього круга приймає середнє значення граничної функції [2]. Криволінійний інтеграл першого роду, що обчислюється при знаходженні цього середнього значення, є результатом граничного переходу у відповідній інтегральній сумі:

$$u(w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w_0 + r e^{i\theta}) d\theta \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{3m} u(w_0 + r e^{i\theta_p}) \Delta\theta_p = \sum_{i=1}^{3m} u(w_0 + r e^{i\theta_p}) \frac{\Delta\theta_p}{2\pi}. \quad (1)$$

Причому результат граничного переходу не залежить від способу розбиття кривої та вибору точок на отриманих ділянках. Тому використаємо зручний для програмування спосіб розбиття кола – рівномірний. Будемо розглядати одиничне коло ( $r=1$ ). Нехай кількість точок розбиття буде кратною трьом  $n=3m$ . Розіб'ємо коло на  $3m$  частин. Посередині кожної частини виберемо точку  $M_p$  ( $p=\overline{1;3m}$ ). Крім того, нехай точка  $M_1$  має координати  $M_1(1;0)$  (рис. 1).

За умови рівномірності розбиття кола  $\frac{\Delta\theta_p}{2\pi} = \frac{1}{n} = \frac{1}{3m}$ . Об'єднаємо в симплекси точки з індексами  $M_p$ ,  $M_{m+p}$ ,  $M_{2m+p}$ , ( $p=\overline{1;m}$ ). Тоді інтегральна сума (1) запишеться так:

$$u(w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w_0 + e^{i\theta}) d\theta \approx \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \frac{1}{3} (u(M_p) + u(M_{m+p}) + u(M_{2m+p})). \quad (2)$$

За обраною орієнтацією першого симплекса (рис.1) нові симплекси будемо отримувати, коли вершина  $M_p$  належить дузі  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ . Таким чином, вершини симплексів мають такі полярні координати  $M_p(1, \theta_j)$ ,  $M_{m+p}\left(1, \theta_j + \frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $M_{2m+p}\left(1, \theta_j - \frac{2\pi}{3}\right)$ , ( $p=\overline{1;m}$ ), а кут  $\theta_j$  набуває значення  $\theta_j = -\frac{\pi}{3} + (p-1) \cdot \frac{2\pi}{3} = -\pi + \frac{2\pi}{3} p$ .

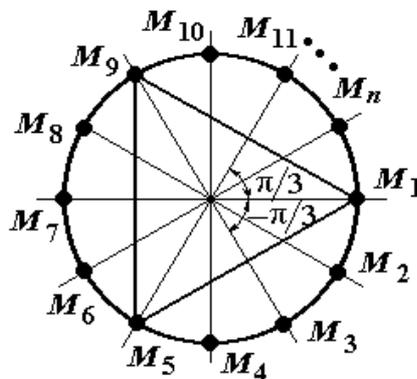


Рис. 1. Утворення "стоп-кадрів" при рівномірному розбитті одиничного кола

У практиці застосувань конформних відображень одиничний круг відіграє роль своєрідного обчислювального шаблону. Відображення круга довільного радіуса  $R$  на одиничний круг, коли внутрішня точка  $a$  круга радіуса  $R$  переходить у центр одиничного круга задається формулою [2]:

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}. \quad (3)$$

де  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $a = \rho_a e^{i\alpha}$ ,  $\bar{a} = \rho_a e^{-i\alpha}$ ,  $w = r e^{i\theta}$ .

Кути  $\theta$  та  $\varphi$  зв'язані співвідношенням:

$$\varphi = \alpha + 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{R - \rho_a}{R + \rho_a} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (4)$$

Таким чином, відновлення значення гармонічної функції в довільній внутрішній точці  $a = \rho_a e^{i\alpha}$  круга радіуса  $R$  при заданому  $m$  зводиться до формування послідовності симплексів  $M_p M_{m+p} M_{2m+p}$  на одиничному колі, відображення її за допомогою формули (4) на коло довільного радіуса та застосування формули (2) до образів вершин симплексів. Оскільки формула (2) є перегрупованим виразом інтегральної суми, то природно, що при зростанні кількості точок розбиття  $3m$  покращується точність відновлюваного значення гармонічної функції. Подвоюючи значення  $m$ , утворюємо ітераційний процес, який припиняємо, коли два послідовні значення інтегральної суми (2) відрізняють менше, ніж на  $\varepsilon > 0$ .

Покажемо ефективність описаного алгоритму відновлення значень гармонічної функції. Алгоритм реалізовано в програмному середовищі системи MATLAB. Розглянемо відому задачу про відновлення електричного потенціалу в крузі [3]. Приклади її розв'язання за допомогою різних модифікацій методу барицентричного усереднення розглядалися в роботах [4, 5].

**Задача 1.** Переріз нескінченної металевої труби – коло одиничного радіуса. На границі перерізу заданий потенціал  $u(1; \varphi) = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi$ , де  $A$  і  $B$  – екстремальні значення потенціалу. Знайти розподіл електростатичного потенціалу всередині труби, якщо  $A=10$  В,  $B=50$  В.

Розподіл електростатичного потенціалу є гармонічною функцією. Для даної задачі відомий точний розв'язок:

$$u(1; \varphi) = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B)\rho^2 \cos 2\varphi$$

або в декартовій системі координат:

$$u(x; y) = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B)(x^2 - y^2). \quad (5)$$

У табл. 1 наведені результати відновлення електростатичного потенціалу в контрольних точках за формулою (5) та за описаною вище модифікацією методу барицентричного усереднення. Оскільки і область, і гранична умова симетричні, контрольні точки розмістимо тільки в першій координатній чверті.

Таблиця 1 - Результати розв'язання задачі 1 за різними методами

Координати контрольної точки	Аналітичний розв'язок	Розв'язок за модифікованим МБУ	Відносна похибка, %	Кількість "стоп-кадрів"
(0,00; 0,00)	30,0000	30,0000	0,0000	2
(0,50; 0,00)	35,0000	35,0001	0,0002	8
(0,75; 0,00)	41,2500	41,2503	0,0007	16
(0,00; 0,50)	25,0000	24,9999	0,0004	8
(0,50; 0,50)	30,0000	30,0000	0,0000	2
(0,75; 0,50)	36,2500	36,2513	0,0037	32
(0,00; 0,75)	18,7500	18,7497	0,0016	16
(0,25; 0,75)	20,0000	19,9980	0,0100	16
(0,50; 0,75)	23,7500	23,7487	0,0055	32

На рис. 2 наведені приклади "стоп-кадрів" для відновлення потенціалу в різних контрольних точках.

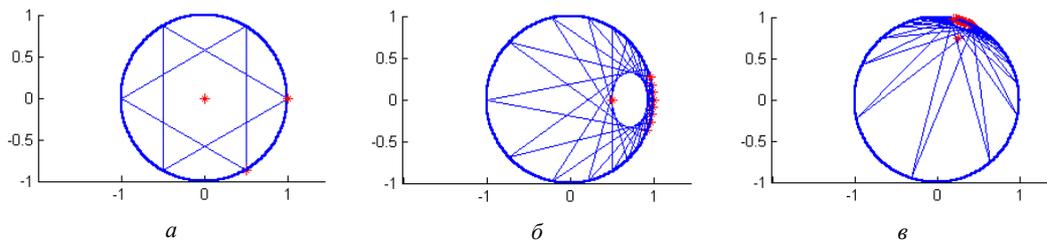


Рис.2. "Стоп-кадри" для відновлення потенціалу в контрольних точках:

а) (0,00; 0,00); б) (0,50; 0,00); в) (0,25; 0,75)

Очевидно, що швидкість збіжності наближеного розв'язку за модифікованим МБУ зменшується з наближенням контрольних точок до границі круга. Аналогічний недолік має точний розв'язок у вигляді інтеграла Пуассона. Крім того, у технічних застосуваннях здебільшого цікавить розподіл потенціалу всередині досліджуваних областей, у точках, віддалених від границі, де збіжність запропонованого методу висока.

У площині  $w$ , у якій досліджувана точка знаходиться в центрі одиничного круга, сторони симплексів є дотичними до кола  $|w| = \frac{1}{2}$ . У площині  $z$  це коло деформується до овалу  $\left| e^{i\alpha} \cdot \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z} \right| = \frac{1}{2}$ . Оскільки при конформному відображенні зберігаються кути між кривими, то сторони симплексів у площині  $z$  є дотичними до визначеного овалу, що дає змогу знаходити положення симплексів із геометричних міркувань.

**Висновки.** Показано зв'язок між процедурами утворення "стоп-кадрів" методу барицентричного усереднення та властивістю середнього значення гармонічної функції в центрі кола. На основі встановлених закономірностей запропоновано модифікацію методу барицентричного усереднення, яка використовує трикутні обчислювальні шаблони з рівними ваговими коефіцієнтами. При реалізації на колі алгоритм автоматично використовує найближчу точку границі при утворенні "стоп-кадрів". Враховуючи існування великих бібліотек конформних перетворень, алгоритм легко переноситься на області іншої конфігурації.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Хомченко А.Н. Дискретные модели и вероятностные схемы в механике деформируемых тел // Дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. – Казань, 1990. – 383 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 688 с.
3. Будникова Т.В., Жукова-Малицкая Г.А., Кузьмин Ю.Н. Задачи по математической физике. – Л: ЛПИ, 1981. – 86 с.
4. Цибуленко О.В. Геометричні моделі для процедур барицентричного усереднення // Дис. канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь, 2004. – 166 с.
5. Валько Н.В. Імовірнісні моделі і методи барицентричного усереднення граничних потенціалів // Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Дніпропетровськ, 2005. – 170 с.