3. Угодчиков А. Решение задач теории упругости методами функций комплексного переменного. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – 395 с.

4. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Связанная задача термоупругости для полубесконечного стержня // Матер. 4 Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. конструкций и сплош. сред», Ярополец, 16-20 февр., 1998. – М., 1998. – С.95-100.

5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов (Обзор) // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 2. – С.39-63.

УДК 681.3:771.537.442

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА R-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ «РАНОК»

*Толок А.В., д.т.н., профессор, Мыльцев А.М., ассистент, Корогод В.Л., ассистент

Запорожский национальный университет
**Московский институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Предлагается способ формулировки задач линейного и нелинейного программирования на основе аппарата R-функций В.Л. Рвачёва для решения в системе аналитического проектирования РАНОК-МП. На примере задач математического программирования рассматривается принцип работы системы, его преимущества и недостатки.

Ключевые слова: оптимизация, R-функция, рекурсивный анализ, образ-модель, градиентный метод, математическое программирование, РАНОК-МП, глобальный экстремум.

*Толок О.В., Мильцев О.М., Корогод В.Л., ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СИСТЕМІ «РАНОК» / Запорізький національний університет, Україна; *Московський інститут проблем управління В.О. Трапезнікова РАН, Росія

Пропонується спосіб формулювання задач лінійного та нелінійного програмування на базі апарату R-функцій В.Л. Рвачова для розв'язання в системі аналітичного програмування РАНОК-МП. На прикладі задач математичного програмування розглядається принцип роботи системи, його переваги та недоліки.

Ключові слова: оптимізація, R-функція, рекурсивний аналіз, образ-модель, градієнтний метод, математичне програмування, РАНОК-МП, глобальний екстремум.

*Tolok A.V., Myltsev A.M., Korogod V.L. APPLICATION OF R-FUNCTIONS FOR SOLVING MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN SYSTEM "RANOK" / Zaporizhzhya national university, Ukraine; *Moscow Institute of Control Sciences Russian Academy of Sciences, Russia

In this article we propose method of problems definition for linear and nonlinear programming which is based on R-functions of V.L.Rvachov for their solution in the analytical projection system RANOK-MP. Principle of system operation, its advantages and disadvantages are considered by means of example of mathematical programming problems.

Key words: optimization, R-function, recursive analysis, form-model, gradient method, mathematical programming, RANOK-MP, global extremum.

Задачи математического программирования базируются на оптимизационных постановках, формирующих группу методов математической оптимизации. Несмотря на обилие аналитических подходов к оптимизационным решениям, базирующихся на сложных алгебраических формулировках решения систем уравнений, наиболее часто применяемыми в решении задач такого класса оказались симплексный и градиентный методы. Простота понимания алгоритма предопределила их наибольшую потребность в инженерной среде. Такая тенденция говорит об актуальности развития подобных алгоритмов, наиболее подходящих к автоматизации процесса оптимизации на основе корректной аналитической постановки задачи. В работе рассматривается один из методов аналитического моделирования оптимизационной задачи с применением математического аппарата R-функций для её автоматизированного решения в системе РАНОК [1].

Система аналитического проектирования РАНОК-МП предусматривает возможность моделирования алгебры многообразий для пространств E^2 и E^3 с применением R-операций теории В.Л. Рвачёва [1, 2]. Система базируется на воксельном представлении модели графических данных, что позволяет моделировать объём с заданной плотностью при неограниченной сложности аналитического описания. Отличительной особенностью системы РАНОК-МП (Рекурсивный АНализ Образных Компонентов) является формирование и применение внутреннего представления графических данных. Оно базируется на синтезе *специальных графических образов* исследуемого аналитического объекта или процесса (*образов-моделей*), которые являются информационной основой не только для рендеринга иллюстративной модели на устройствах вывода для визуальной оценки, но и дифференциального анализа, позволяющего решать градиентные задачи при оптимизации сформулированного процесса [3]. В предлагаемой работе рассматривается один из способов решения задач математического программирования (МП) с применением R-операций и возможностей системы РАНОК-МП.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ АППАРАТА R-ФУНКЦИЙ

Логические R-операции В.Л. Рвачёва [2]

$$R_0^{\wedge} = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R_0^{\vee} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2},$$

где x, y - предикатные функции, в последнее время активно используются в процессах моделирования сложных геометрических многообразий в различных размерностях декартового пространства. При этом формируются положительные и отрицательные области, а также нулевая граница, характеризующая зрительное восприятие геометрических характеристик формируемого объекта.

Исходим из того, что МП рассматривает методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). Таким образом, постановка задачи сводится к организации такого пространства, где определяется область допустимых решений со значениями целевой функции внутри (область допустимых планов), а остальная область не должна противоречить решению поставленной оптимизационной задачи градиентным методом.

В общем случае рассмотрим систему ограничений как множество предикатных функций $w_1, w_2, ..., w_n$ для некоторого пространства R^n. Область допустимых решений w можно организовать как пересечение предикатных функций

$$w = \bigcap_{i=1}^{n} w_i = w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_n . \tag{1}$$

Для помещения целевой функции F в область w необходимо предварительно обнулить положительные значения внутри области w.

Для этого предлагается использовать главное свойство теории R-функций – сохранение нулевой границы в ходе логических операций над предикатами. Вычтем из полученной функциональной зависимости w её значение по модулю

$$w_0 = w - |w| . \tag{2}$$

При этом внутренняя область значений w обнуляется, а внешняя область обретает более выраженное убывание отрицательных значений. Окончательный вид функции F_w можно записать как:

$$F_w = F \pm w_0 \cdot (1 + F), \tag{3}$$

где F - целевая функция; w_0 - обнулённая область допустимых планов. Знак $\pm$ определяется поиском максимума или минимума функции F_w соответственно.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании изломов функции F_w и возможных разрывов. Решить данную проблему позволяет принцип получения дифференциальных образов-моделей в системе РАНОК-МП. Он основан на рекурсивном дихотомическом разбиении области определения функции и всегда рассматривает «окрестность излома» с постоянным приближением. Погрешность решения, при этом, зависит от заданной глубины рекурсии. Принцип работы системы тем самым становится ближе к реальному миру, отходя от абстракций. Исходя из того, что в природе не существует идеальной формы угла. На определённом уровне уточнения наблюдается гладкий переход. Этот принцип позволяет с заданной степенью точности обрабатывать «аналитический угол». Таким же образом контролируется разрыв поверхности.

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ РАНОК-МП

Система аналитического проектирования РАНОК-МП оснащена компилятором проблемно-ориентированного формульного языка FORTU, применяемого в системе решения задач математической физики FORTU-2 [4]. Специфика программной реализации компилятора позволяет входящую информацию разделить на два информационных потока. В первом редакционном окне системы РАНОК-МП описана формулировка системы ограничений w прикладной задачи математического программирования. Второе окно содержит формулировку целевой функции F (рис.1). Такая организация входных данных удобна, поскольку позволяет исследователю структурировать свою работу, сосредотачиваясь на том или ином аспекте. Остальные операции с применением w_0 и F_w отрабатываются автоматически самой системой. Таким образом, исследователю становится не важен сам принцип обработки его информации, что облегчает освоение системы РАНОК-МП.

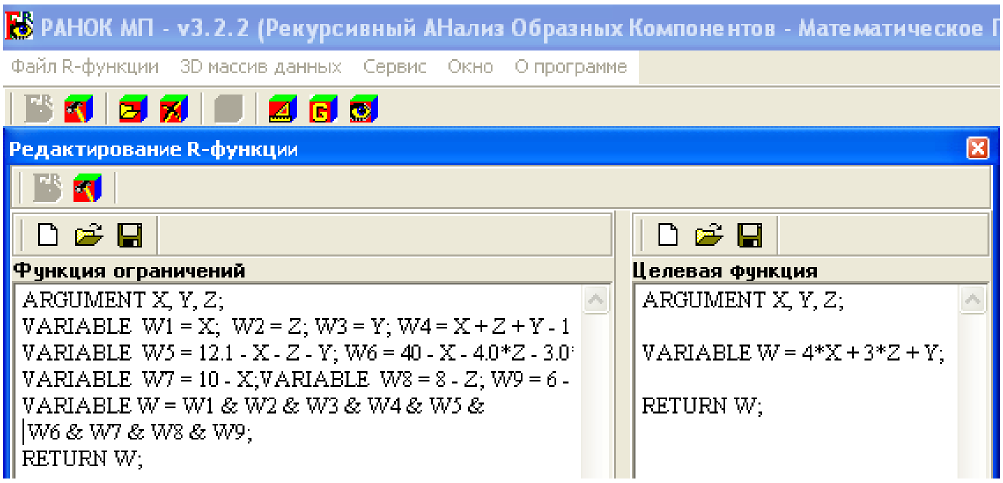

Рис. 1. Двухоконная система ввода описания оптимизационной задачи

В процессе формульного перевода описания задачи в компьютерное представление система РАНОК-МП рекурсивно отображает область определения функций цели F и ограничений w на множество определения этих функций $Dom\ F$ и $Dom\, w$ [5] соответственно. В итоге формируются два трёхмерных воксельных массива. Значением вокселя являются нормированные по палитре три значения компоненты вектора нормали $Im\, N_F$ и $Im\, N_w$ для соответствующих элементов рассматриваемых множеств определения $Dom\ F$ и $Dom\, w$. Полученные воксельные графические образы отображают соответственно определённое дифференциальное свойство функций F и w, являясь образами-моделями (М-образами) этих функций. М-образы принадлежат к классу когнитивных графических образов [6, 7] и являются основой не только построения реалистичного иллюстративного образа функций для решения градиентных задач для этих функций [7].

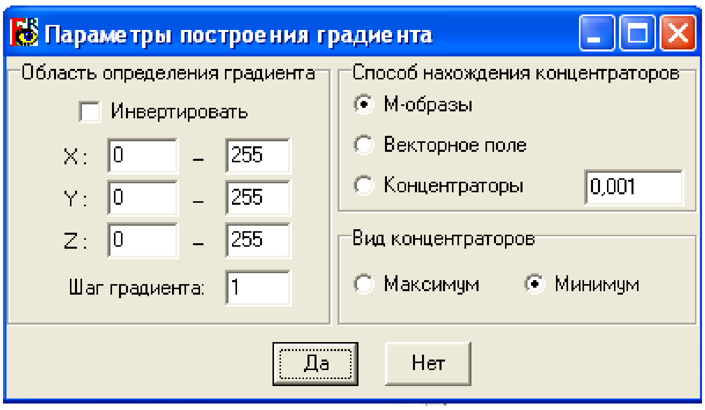

Рис.2. Окно задания параметров построения градиента

Поскольку этап построения воксельных массивов занимает приличное время расчёта компьютера, в системе РАНОК-МП предусмотрена файловая организация массивов непосредственно на диске. Это позволяет разбить работу с системой на два этапа: построение когнитивного графического представления задачи математического программирования и её решение. На этапе решения открывается сохранённый на диске компьютера файл с расширением *.3dm0* и запускается градиентная обработка воксельного массива $Im\,N_{F_w}$ на максимум или минимум в зависимости от целевой постановки (рис.2). Воксельный массив $Im\,N_w$ служит основой для визуализации многогранника допустимых решений, куда будет помешена точка глобального экстремума.

Изображение результатов решения задачи начинается с задания параметров визуализации. При этом необходимо выбрать пространственное положение воксельного массива $Im\,w$, вращающегося с помощью мыши или заданных угловых значений поворота вокруг осей в специальной графической области окна «параметры визуализации 3D массива данных» (рис.3). На рисунке 3 видна общая картина возможностей визуализации результатов системы. Рассмотрим основные параметры, рекомендуемые для корректного изображения решения задачи МП. Для визуальной ориентации полученной точки глобального экстремума следует поместить её в прозрачную границу области допустимых решений функции w. В результате получим наглядную прозрачную фигуру, содержащую границы допустимого решения с оптимальным вариантом решения внутри или на границе.

Рассмотрим ряд задач математического программирования, выбранный из литературного источника [9].

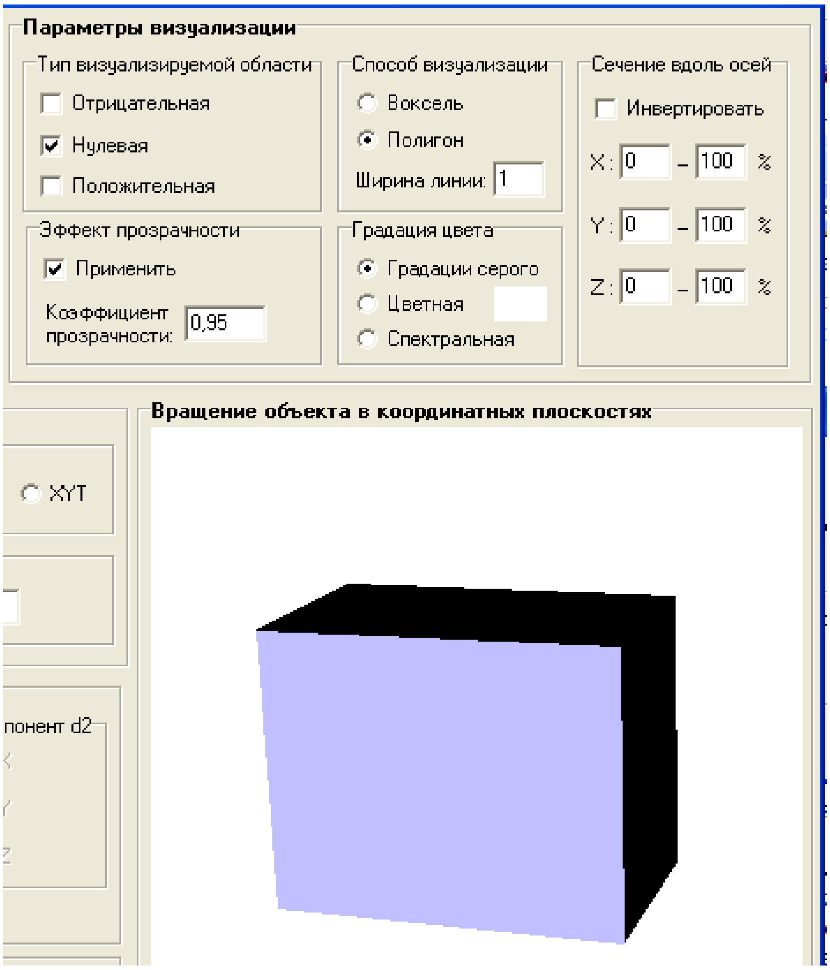

Рис.3. Фрагмент окна параметров визуализации решения

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕРОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ РАНОК-МП

Рассмотрим применение предложенного способа на наглядных примерах математического программирования. Математическая постановка может выглядеть так:

Задача 1. *Найти глобальные экстремумы функции* $z=(x-2)^2+(y-3)^2$ *на множестве решений системы*

$$\begin{cases} x+2y\le 12 \\ x+y\le 9 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Решение. Построим многоугольник допустимых планов и несколько линий уровня (рис. 4). Линии уровня $z=c$ представляют собой окружности с центром в точке $A(2;3)$ и радиусом $r=\sqrt{c}$. Из рисунка 1 видно, что $z_{min}=0$ достигается в точке $A(2;3)$, z_{max} - в точке $B(9;0)$.

Решение в системе РАНОК-МП. Опишем постановку задачи, используя R-операции В.Л. Рвачёва и предложенную формулу (3) на специальном языке системы:

```
//Область допустимых решений:
ARGUMENT x,y,z;
VARIABLE w1=-(x+2*y-12), w2=-(x+y-9), w3=x, w4=y;
VARIABLE w=w1&w2&w3&w4;
RETURN w;
//Целевая функция:
ARGUMENT x,y,z;
VARIABLE F=(x-2)*(x-2)+(y-3)*(y-3);
RETURN F;
```

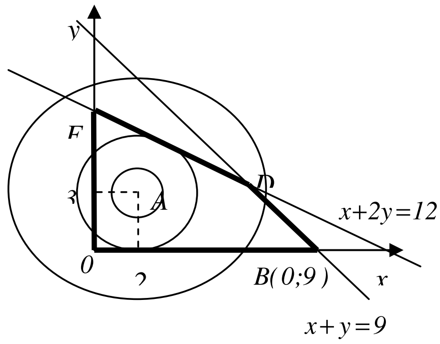

Рис.4. Графическое представление задачи

Результат определения пространственного положения глобальных максимумов и минимумов рассматриваемой задачи представлен на рисунках 5 и 6.

Координаты точек A и B в системе РАНОК-МП определены на глубине рекурсии равной 9-ти. Поэтому точность их выражается погрешностью до сотых: *A(8.9619140625, 0.0126953125), B(1.9853515625, 3.0087890625).*

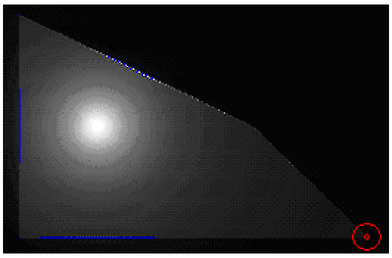

Рис.5 Определение глобального максимума в системе РАНОК

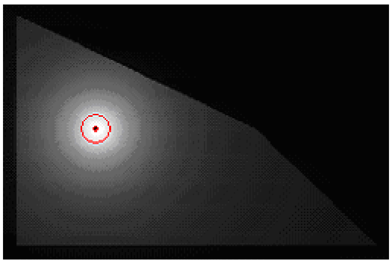

Рис.6 определение глобального минимума в системе РАНОК

Задача 2. *Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трёхтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трёхтонного грузовика 4000 руб., пятитонного – 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысяч рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?*

Задача заключается в максимизации целевой функции $F=3x+5y\rightarrow max$ при ограничениях: $4000x+5000y\le 141000,\ 0\le x\le 19,\quad 0\le y\le 17$.

Решение задачи симплекс-методом привело к результирующей точке с координатами $(14,17,127)$, т.е. чтобы достичь максимального значения грузоподъёмности

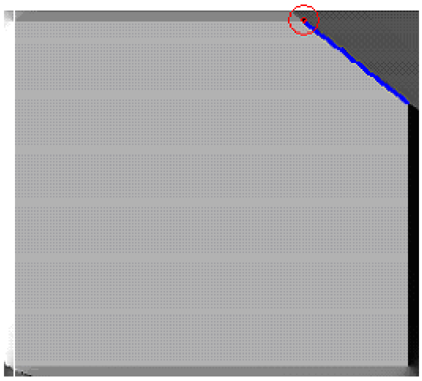

Рис.7 Определение глобального максимума грузоподъёмности

127 тонн, необходимо приобрести 14 трёхтонных и 17 пятитонных грузовиков.

Результат работы системы РАНОК-МП изображён на рисунке 7, где на области допустимых решений указана искомая точка с координатами *(13.9775390625, 16.9873046875, 126.869140625)* на 9-ти итерациях рекурсии.

Задача 3. *Найти глобальные экстремумы функции* $F = x^2 + y^2$ *на множестве системы ограничений*

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 \leq 36 \\ x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Решение. На рисунке 8 множество допустимых решений ограниченно замкнутой жирной линией. Как видно из рисунка, оно является выпуклым. Очевидно, что наименьшее значение функция z достигает в точке B, а наибольшее – в точке K. Точка B принадлежит прямой $x+8=y$ и окружности $(x-5)^2+(y-3)^2=9$. Решая систему, определяем $B(2.8786; 5.1213)$. Точка K принадлежит линии центров OO_1 с уравнением $y=3/5x$ и окружности $(x-5)^2+(y-3)^2=36$. Определяем $K(10.1449; 6.0869)$

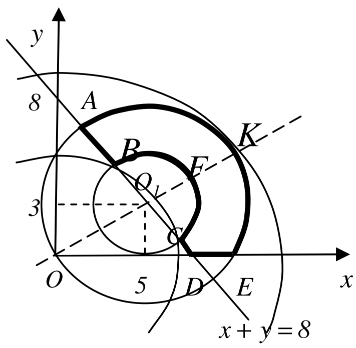

Рис.8. Графическое представление задачи

Следовательно,

$z_{min} = 43 - 12\sqrt{0{,}5} \approx 34{,}51; \quad z_{max} = 70 + 12\sqrt{34} \approx 139{,}97$.

На рисунках 9 и 10 представлены результаты решения задачи в системе РАНОК-МП с использованием градиентного анализа сформулированной функции (3). Результирующие значения точек: $K(10{,}1495; 6{,}0789; 139{,}9670)$ и $B(2{,}8525; 5{,}1267; 34{,}6358)$. Сходимость результата обеспечивается уточнением графических образов-моделей, используемых в системе РАНОК.

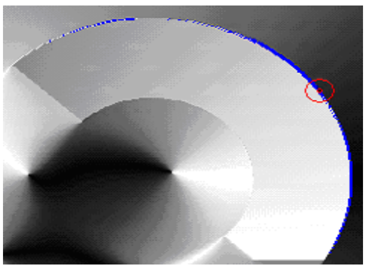
Рис.9 Максимум Fw

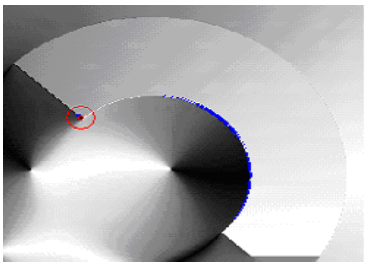
Рис.10 Минимум Fw

Задача 4 (транспортная задача): Ежедневно в город поставляется одним видом транспорта 12 тонн картофеля из трёх колхозов: из *первого колхоза по цене 4 рубля за тонну, из второго – по цене 3 рубля за тонну, из третьего – по цене 1 рубль за тонну. Чтобы поставка картофеля в город была произведена своевременно, необходимо на погрузку требуемых 12 тонн затратить не более 40 минут. Известно, что в первом колхозе уровень механизации позволяет погрузку 1 тонны производить за одну минуту, во втором – за 4 минуты, в третьем – за 3 минуты. Производственные мощности этих колхозов следующие: первый колхоз*

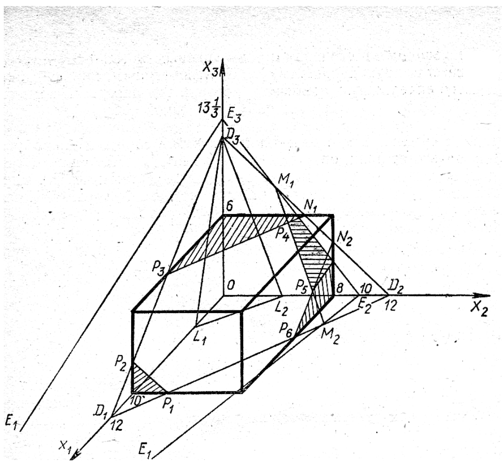
Рис.11. Графическое решение транспортной задачи

должен ежедневно выделять для поставки в город не более 10 тонн, второй – не более 8 тонн, третий – не более 6 тонн. Как распределить заказы на поставку 12 тонн между колхозами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной?

Минимизировать целевую функцию

$$F = 4x_1 + 3x_2 + x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 6 \end{cases}$$

Решение изображено графически на рисунке 11. Оно находится в плоскости допустимых решений, ограниченной многоугольником $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. в точке $P_4 = (\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}; 6)$, $F(P_4) = 24\frac{2}{3}$.

Для описания условия задачи в системе РАНОК условие $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ можно представить двумя предикатами: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$ и $x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$. На рисунке 12 демонстрируется результат работы системы при 8-ми кратном рекурсивном погружении. При этом искомая точка глобального минимума имеет координаты $(0{,}828515;\ 5{,}157421;\ 5{,}933203)$, $F = 24{,}71953$. Погрешность решения порядка 10^{-1} получается в результате применения в рассматриваемом случае относительно малого рекурсивного погружения. При увеличении глубины рекурсивного погружения можно наблюдать сходимость с аналитическим решением.

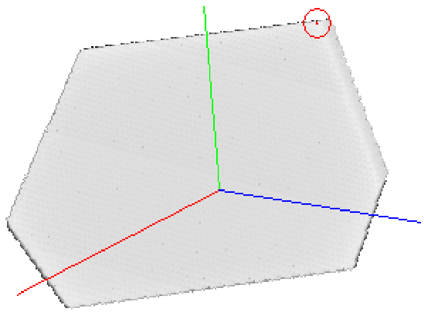

Рис.12. Результат решения транспортной задачи в системе РАНОК

Представленный в растровых и воксельных изображениях один из способов применения векторных полей в решении градиентных задач позволяет по новому рассматривать применение теории полей в системах автоматизации. Такой подход позволяет сводить плотность исследуемого поля к максимально наглядному решению. Следует также отметить ряд очевидных преимуществ перед многими существующими способами решения задач математического программирования: применение R-операций позволяет кусочно описывать области допустимых решений и целевые функции любой сложности, а применение образов-моделей в контексте системы РАНОК-МП в дальнейшем позволит работать с любой размерностью пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толок А.В., Мыльцев А.М., Корогод В.Л. Аналитическое моделирование на основе графических преобразований в системе РАНОК / А.В. Толок, А.М. Мыльцев, В.Л. Корогод // Вісник Запорізького національного університету: Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2006. – №1. – С. 124 -133.
2. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
3. Толок А.В. Синтез компьютерных образов геометрических характеристик для оценки рельефа поверхности функции двух переменных / А.В. Толок // Збірник доповідей НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. – 2004. – №4. – С. 63-69.
4. Гоменюк С.И., Толок А.В., Толок В.А. Инструментальная система анализа задач математической физики методами конечных элементов / С.И. Гоменюк, А.В. Толок, В.А. Толок // Труды XXIII

международной конференции и дискуссионного научного клуба "Новые информационные технологии в науке и бизнесе", Украина, Крым, Ялта-Гурзуф, 15-24 мая, 1996г. – 1996. – С. 251.

5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для ВУЗов, х2-е изд. / Ф.А. Новиков – СПб: Питер, 2007. – 364 с.

6. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика: под ред. Д.А. Поспедова / А.В. Зенкин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 192 с.

7. Толок А.В., Морозов Д.Н., Мыльцев А.М. Когнитивность М-образов в системе РАНОК / А.В. Толок, Д.Н. Морозов, А.М. Мыльцев // Техническая эстетика и дизайн. Научно-технический сборник. – 2008. – №5. – С. 140-144.

8. Толок А.В., Мыльцев А.М., Корогод В.Л. Алгоритм пространственного движения по градиенту на основе М-образов / А.В. Толок, А.М. Мыльцев, В.Л. Корогод // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К: КНУСА, 2007. – Вып. 77. – С. 85-90.

9. Монахов В.М. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: пособие для учителей / В.М. Монахов. – М.: Просвещение, 1978. – 175 с.

УДК 519.6

ГЕОМЕТРІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ШАБЛОНІВ МЕТОДУ БАРИЦЕНТРИЧНОГО УСЕРЕДНЕННЯ

Тулученко Г.Я., к.т.н., доцент

Херсонський національний технічний університет

У статті запропоновано модифікацію методу барицентричного усереднення, яка дозволяє формалізувати процедури вибору положення окремих обчислювальних шаблонів та обмеження їх кількості.

Ключові слова: метод барицентричного усереднення, задача Діріхле для рівняння Лапласа.

Тулученко Г.Я. ГЕОМЕТРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ШАБЛОНОВ МЕТОДА БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ / Херсонский национальный технический университет, Украина.

В статье предложена модификация метода барицентрического усреднения, которая позволяет формализовать процедуры выбора положения отдельных вычислительных шаблонов и ограничения их количества.

Ключевые слова: метод барицентрического усреднения, задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Tuluchenko G.Ya. GEOMETRY OF COMPUTING PATTERNS OF A METHOD BARYCENTRICAL AVERAGING / Kherson national technical university, Ukraine.

The updating of a method barycentrical averaging which allows to formalize procedures of a choice of position of separate computing patterns and restriction of their quantity is offered in the article.

Key words: a method barycentrical averaging, Dirichlet problem for Laplace equation.

Постановка проблеми. У технічних застосуваннях нерідко виникає задача відновлення значення гармонічної функції в одній (або кількох) точках досліджуваної області. Застосування класичних аналітичних та дискретних методів у цьому випадку видається надлишковим, оскільки за ними відновлюються аналітичний вираз шуканої функції або її значення в усіх вузлах сітки, якою покривають область гармонічності. Модифікації методу Монте-Карло, орієнтовані на розв’язання названих задач, вимагають проведення великої кількості статистичних випробувань. При відновленні окремого значення гармонічної функції доцільним є використання більш економічних розрахункових методів.

Аналіз попередніх публікацій. Метод барицентричного усереднення для відновлення значень гармонічних функцій бере свій початок у роботах професора А.Н. Хомченка [1]. Ефективність застосування методу та його модифікацій доведена в роботах учнів його школи. Але до цього часу процедура вибору положень обчислювальних шаблонів на окремих "стоп-кадрах" та процедура обмеження кількості "стоп-кадрів" у відповідності до необхідної точності лишаються неформалізованими. При відсутності відомого розв’язку задачі спірним є питання оптимального вибору "стоп-кадрів".