3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. - 288 с.
4. Поселюжна В.Б. Достатні умови збіжності модифікованого колокаційно-ітеративного методу для рівнянь з малою нелінійністю //Вісник Запорізького державного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. - 2000.-№2.-С.115-119.
5. Поселюжна В.Б. Про достатні мови збіжності модифікованого колокаційно-ітеративного методу для нелінійних рівнянь //Нелінійні коливання. - 2002.-**5**, № 1.-С.66-76.

УДК 539.3

СТАТИЧНА ЗАДАЧА НЕЗВ'ЯЗНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО СТРИЖНЯ

Ткаченко І.Г., старший викладач

Запорізький національний університет

У статті розв'язується задача про визначення температури, напружень та переміщень точок складеного стрижня. Методика розв'язання ґрунтується на аналозі методу функцій податливості у випадку одновимірної термопружності. Побудовано графіки функцій температури та переміщень для двоскладеного стрижня.

Ключові слова: складений стрижень, температура, напруження, константа податливості.

Ткаченко И.Г. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье решается задача об определении температуры, напряжений и перемещений точек составного стержня. Методика решения базируется на аналоге метода функций податливости в случае одномерной термоупругости. Построены графики функций температуры и перемещений для двусоставного стержня.

Ключевые слова: составной стержень, температура, напряжения, константа податливости.

Tkachenko I.G. THE STATIC PROBLEM OF THE STATIONARY THERMOELASTICITY FOR THE COMPOSITE ROD / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The problem, connected with the finding of the temperature, the stresses and the shifts of the points of the composite rod, is solved in this article. The analog of the compliance function technique in the case of one-dimensional thermoelasticity is used. The plots of the temperature function and the function of the shifts for the case of the double part rod are built.

Key words: composite rod, temperature, stresses, constant of compliance.

ВСТУП

Останнім часом теорія термопружності отримала істотній розвиток у зв'язку з потребами виробництва (розробка нових конструкцій парових турбін, ракетних двигунів; експлуатація об'єктів при високих температурах). Тому при розрахунках різного роду конструкцій потрібно враховувати вплив температур. Найбільш простий математичний апарат використовується при розв'язанні задач про визначення термо-напружено-деформівного стану тонких стрижнів або пластин. Вісесиметрична термопружна задача про напруження в тонкому стрижні скінченної довжини розглядається в роботі [1]. Вивчається випадок круглого циліндричного стрижня при постійній температурі. Також досліджено випадок довільно заданого температурного поля та стрижень змінного перерізу. Аналіз квазістатичної деформації тонкого однорідного стрижня при нагріванні з теплопередачею через границю контакту провадиться в статті [2]. Для розв'язання застосовується метод скінченних елементів. У монографії [3] за допомогою комплексного аналізу описуються методи аналітичного розв'язку двовимірних задач плоскої деформацій та плоского напруженого стану при довільних об'ємних силах, температурах поля й термопружних напружень, напруженого стану в складених середовищах, поперечного згину плит, скруту й поперечного згину призматичних ізотропних та ортотропних стрижнів. Робота [4] присвячена одновимірній нестаціонарній задачі термопружності для напівнескінченного стрижня у випадку, коли на його границі задано тепловий потік або температура у вигляді дельта-функцій Дірака. Розв'язок задачі представляється степеневими рядами за малим параметром. Огляд наукових праць з розробки класичних і уточнених моделей термомеханічної поведінки тонкостінних одно- і багатошарових елементів із в'язкопружних матеріалів із урахуванням температурної залежності властивостей, фізичної та геометричної нелінійностей наведено в [5]. Викладено методи розв'язання нелінійних зв'язаних задач термов'язкопружності про коливання і розігрів тонкостінних стрижнів, пластин і оболонок у квазістатичній та динамічній постановках.

Автором було запропоновано спосіб розв'язання дво- та тривимірних задач термопружності для багатошарових основ. Запропонована стаття присвячена дослідженню статичної задачі незв'язної термопружності для стрижня, яке не спирається на ці результати.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо систему, яка складається з n спаяних стрижнів із різних матеріалів, що мають однакові товщини. Нижня точка складеного стрижня зафіксована, як показано на рисунку 1. Стрижні є однорідними, ізотропними та невагомими. Кожен стрижень характеризується довжиною h, двома пружними константами λ, μ (коефіцієнтами Ламе), коефіцієнтами теплопровідності R та теплового розширення K. Далі цю систему будемо називати n-складеним (або просто складеним) стрижнем. У верхній точці складеного стрижня відомі напруження та температура. У нижній точці n-го стрижня підтримується нульова температура. Треба знайти напруження, переміщення й температуру для усіх точок складеного стрижня.

Нумерацію стрижнів будемо проводити, зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до стрижня з номером i, будемо позначати відповідним індексом. Якщо це не призводить до непорозумінь, індекс i будемо опускати. У кожному стрижні введемо локальну декартову систему координат із початком на верхній межі стрижня, так щоб усі осі $O_i z_i$ лежали на одній прямій.

Задача зводиться до розв'язання такої системи диференціальних рівнянь для кожного з стрижнів:

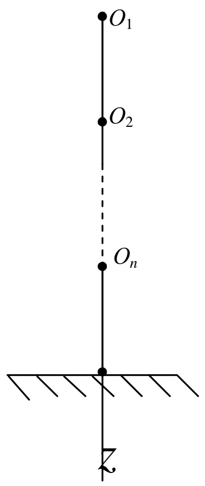

Рис. 1. Система стрижнів.

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = K \frac{dT}{dz}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0. \tag{2}$$

Тут $w(z)$ – функція вертикальних переміщень, $T(z)$ – температура.

Крім того, виконуються умови контакту стрижнів ($i = 1,2,...,n-1$)

$$w_i(h_i) = w_{i+1}(0),\ \sigma_{zi}(h_i) = \sigma_{z\,i+1}(0), \tag{3}$$

$$T_i(h_i) = T_{i+1}(0), \tag{4}$$

$$R_i \frac{dT_i}{dz}(h_i) = R_{i+1}\frac{dT_{i+1}}{dz}(0). \tag{5}$$

У нижній точці n-го стрижня

$$w_n(h) = 0, \tag{6}$$

$$T_n(h) = 0. \tag{7}$$

У верхній точці складеного стрижня нам відома температура

$$T_1(0) = t = \mathrm{const} \tag{8}$$

та напруження

$$\sigma_{z1}(0) = \sigma = \mathrm{const}. \tag{9}$$

СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки розглядається незв'язна задача термопружності, то спочатку ми визначимо температуру, а вже потім – переміщення та напруження точок складеного стрижня. Розв'язуючи рівняння (2), отримаємо

$$T_i(z_i) = C_{1i} z_i + C_{2i}.$$

Введемо в розгляд *допоміжні константи*, пов'язані з функцією температури у верхній точці i-го стрижня:

$$\eta_i = T_i(0), \varepsilon_i = \frac{dT_i}{dz}(0),$$

та виразимо через них температуру:

$$T_i(z) = \varepsilon_i z + \eta_i.$$

Задача визначення температури в i-му стрижні зведена до знаходження двох допоміжних констант цього стрижня. Таким чином, нам потрібно знайти $2n$ допоміжних констант.

Використовуючи умови спряженості стрижнів (4), (5), знайдемо рекурентні співвідношення між допоміжними константами сусідніх стрижнів:

$$\eta_{i+1} = \varepsilon_i h_i + \eta_i , \tag{10}$$

$$\varepsilon_{i+1} = \Delta_i \varepsilon_i , \tag{11}$$

де $\Delta_i = R_i / R_{i+1}$.

Таким чином, достатньо знайти тільки допоміжні константи першого стрижня, а потім за формулами (10), (11) можна знайти інші допоміжні константи. Із граничних умов можна знайти одну допоміжну константу першого стрижня η_1 . Покажемо, як можна визначити константу ε_1.

З умов (4) та (7) будемо мати, що $T_n(h_n) = 0 = \varepsilon_n h_n + \eta_n$. Таким чином, допоміжні константи нижнього стрижня не є незалежними, а зв'язані рівністю:

$$\eta_n = -h_n \varepsilon_n , \tag{12}$$

яку можна також записати у вигляді:

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{h_n} \eta_n .$$

Використовуючи рекурентні співвідношення (10), (11), для нижнього стрижня отримаємо, що $\eta_n = \varepsilon_{n-1} h_{n-1} + \eta_{n-1}$, $\varepsilon_n = \Delta_{n-1} \varepsilon_{n-1}$. Враховуючи (12), матимемо: $\varepsilon_{n-1} h_{n-1} + \eta_{n-1} = -h_n \varepsilon_n = -h_n \Delta_{n-1} \varepsilon_{n-1}$. Звідси випливає, що

$$\varepsilon_{n-1} = -\frac{1}{h_{n-1} + \Delta_{n-1} h_n} \eta_{n-1} .$$

Далі виразимо $\varepsilon_{n-1}, \eta_{n-1}$ послідовно через $\varepsilon_{n-2}, \eta_{n-2}$, і так далі до ε_i, η_i . Матимемо співвідношення, які пов'язують допоміжні константи i -го стрижня. Запишемо їх у вигляді:

$$\eta_i = -d_i \varepsilon_i ,$$

$$\varepsilon_i = -r_i \eta_i . \tag{13}$$

Величини r_i, d_i будемо називати *константами податливості* i *-го стрижня*. З останніх двох рівностей можна зробити висновок, що $r_i = 1/d_i$.

Знайдемо рекурентні співвідношення для констант податливості сусідніх стрижнів. Для цього спочатку з (10) знайдемо η_{i+1} , а потім скористаємось виразом (13):

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \varepsilon_i h_i = -d_i \varepsilon_i + \varepsilon_i h_i = \varepsilon_i (h_i - d_i) . \tag{14}$$

Тепер спочатку використаємо вираз (13), а потім (11):

$$\eta_{i+1} = -d_{i+1} \varepsilon_{i+1} = -d_{i+1} \Delta_i \varepsilon_i . \tag{15}$$

Порівнюючи праві частини (14), (15) та через довільність ε_i , отримуємо рекурентні співвідношення між константами податливості сусідніх шарів:

$$d_i = h_i + d_{i+1} \Delta_i . \tag{16}$$

Для константи r_i ці співвідношення мають вигляд $r_i = \dfrac{r_{i+1}}{h_i r_{i+1} + \Delta_i}$. Порівнюючи вирази (13) з (12), робимо висновок, що

$$r_n = 1/h_n , \; d_n = h_n .$$

Константу ε_1 можна знайти із співвідношення (13), попередньо обчисливши константи податливості за співвідношеннями (16), починаючи з $d_n = h_n$.

Таким чином, можна обчислити температуру, що виникає у стрижні, знаючи одну з допоміжних констант цього стрижня. Остаточно формула для визначення температури виглядає так

$$T_i(z_i) = \eta_i (1 - r_i z_i) \text{ або } T_i(z_i) = \varepsilon_i (z_i - d_i) . \tag{17}$$

Допоміжну константу першого стрижня η_1 можна визначити з граничної умови (8), а саме:

$$T_1(0) = \eta_1 = t .$$

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ТА ПЕРЕМІЩЕНЬ

Тепер знайдемо розв'язок рівняння (1), підставивши замість функції температури її вираз (17):

$$\frac{d^2 w_i}{dz_i^2} = K_i \frac{dT_i}{dz_i} = -K_i r_i \eta_i \text{ тобто } w_i(z_i) = -\frac{K_i r_i \eta_i}{2} z_i^2 + C_{1i} z_i + C_{2i} .$$

Введемо в розгляд такі *допоміжні константи*, які пов'язані з напруженнями та переміщеннями у верхній точці i -го стрижня:

$$\alpha_i = \sigma_{zi}(0), \beta_i = w_i(0). \tag{18}$$

Тоді

$$w_i(0) = C_{2i} = \beta_i .$$

Отже,

$$w_i(z_i) = -\frac{K_i r_i \eta_i}{2} z_i^2 + C_{1i} z_i + \beta_i .$$

Для знаходження іншої невідомої константи спочатку, використовуючи закон Дюамеля-Неймана, знайдемо функцію нормальних напружень, що виникають у складеному стрижні:

$$\sigma_{zi}(z) = (\lambda_i + 2\mu_i)\left(\frac{dw_i}{dz} - K_i T_i\right) = (\lambda_i + 2\mu_i)(C_{1i} - K_i \eta_i).$$

Використовуючи першу формулу виразу (18), будемо мати, що

$$C_{1i} = \frac{\alpha_i}{\lambda_i + 2\mu_i} + K_i \eta_i .$$

Отже, маємо вираз функції переміщень будь-якого стрижня через допоміжні константи цього стрижня:

$$w(z) = -\frac{Kr\eta}{2} z^2 + \left(\frac{\alpha}{\lambda + 2\mu} + K\eta\right) z + \beta .$$

Напруження, що виникають у i -му стрижні

$$\sigma_{zi}(z) = \alpha_i . \tag{19}$$

Із виразів (3), (4) знайдемо рекурентні співвідношення між допоміжними константами сусідніх стрижнів:

$$T_i(h_i) = T_{i+1}(0) \Rightarrow \eta_{i+1} = \eta_i(1 - r_i h_i). \tag{20}$$

$$w_i(h_i) = w_{i+1}(0) \Rightarrow \beta_{i+1} = L_i \alpha_i + \beta_i + V_i \eta_i . \tag{21}$$

$$\sigma_{zi}(h_i) = \sigma_{zi+1}(0) \Rightarrow \alpha_{i+1} = \alpha_i . \tag{22}$$

Тут і далі $L_i = \dfrac{h_i}{\lambda_i + 2\mu_i}, V_i = \dfrac{K_i h_i (2 - r_i h_i)}{2}$.

Із граничної умови (9) отримаємо, що для будь-якого $i = \overline{1; n}$

$$\alpha_1 = \alpha_i = \sigma ,$$

тобто ми можемо записати вирази функцій напружень та переміщень i -го стрижня через допоміжні константи цього стрижня:

$$\sigma_{zi}(z_i) = \sigma,\ w_i(z_i) = -\frac{K_i r_i \eta_i}{2} z_i^2 + \left(\frac{\sigma}{\lambda_i + 2\mu_i} + K_i \eta_i\right) z_i + \beta_i . \tag{23}$$

Із граничної умови (6) отримаємо, що допоміжні константи нижнього стрижня не є незалежними, а зв'язані між собою такими співвідношеннями:

$$w_{n+1} = \beta_{n+1} = L_n \alpha_n + \beta_n + V_n \eta_n = 0 ,$$

$$\beta_n = -L_n \alpha_n - V_n \eta_n . \tag{24}$$

Використовуючи формули (20), (21), (22), виразимо $\alpha_n, \beta_n, \eta_n$ через α_{n-1}, β_{n-1}, η_{n-1}, а їх у свою чергу через $\alpha_{n-2}, \beta_{n-2}, \eta_{n-2}$, і так далі до i -го стрижня. Отримані вирази для $\alpha_n, \beta_n, \eta_n$ підставимо в рівність (24), яка після цього зведеться до вигляду:

$$\beta_i = A_i \alpha_i + D_i \eta_i . \tag{25}$$

Константи A_i, D_i будемо називати *константами податливості* i *-го стрижня*. Порівнюючи (24), (25), можна зробити висновок, що

$$A_n = -L_n,\ D_n = -V_n . \tag{26}$$

Далі опишемо спосіб отримання рекурентних співвідношень між константами податливості. Із формули (25) запишемо вираз функції β_{i+1}, а для функцій α_{i+1}, η_{i+1} використаємо (20), (22):

$$\beta_{i+1} = A_{i+1}\alpha_i + D_{i+1}(1 - r_i h_i)\eta_i . \quad (27)$$

Тепер скористаємось формулою (21), а замість β_i підставимо вираз (19):

$$\beta_{i+1} = (L_i + A_i)\alpha_i + (D_i + V_i)\eta_i . \quad (28)$$

Порівнюючи праві частини рівностей (27), (28), отримаємо, що

$$A_i = A_{i+1} - L_i ,\ D_i = D_{i+1}(1 - r_i h_i) - V_i . \quad (29)$$

АЛГОРИТМ

Для розв'язання сформульованої в статті задачі необхідно додержуватися такого алгоритму:

1. Знаходимо константи податливості для нижнього стрижня за формулами (26);
2. Знаходимо константи податливості для інших стрижнів за формулами (29);
3. Використовуючи межові умови, знаходимо дві допоміжні константи α_1 та η_1 :

$$\alpha_1 = \sigma_{z1}(0) = \sigma ,\ \eta_1 = T_1(0) = t .$$

4. За рекурентними співвідношеннями (20), (22) знаходимо дві допоміжні константи стрижня, термо-напружено-деформівний стан якого досліджується. Знаходимо іншу допоміжну константу цього стрижня, використовуючи формулу (25);
5. Знаходимо функції напружень, переміщень та температури за формулами (17), (23).

ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Як приклад розглянемо складений стрижень, що складається з двох стрижнів з такими характеристиками: $h_1 = h_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2$, $K_1 = K_2$, $\Delta = R_1/R_2$. Граничні умови задачі: $T_1(0) = 1$, $\sigma_{z1}(0) = 1$. Нижче на рисунках 2 та 3 наведені графіки температури $T(z)/K_1\mu_1$ та $w(z)/K_1\mu_1$ відповідно для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності (*крива 1* – $\Delta = 1/100$, *крива 2* – $\Delta = 1/2$, *крива 3* – $\Delta = 1$, *крива 4* – $\Delta = 2$, *крива 5* – $\Delta = 100$):

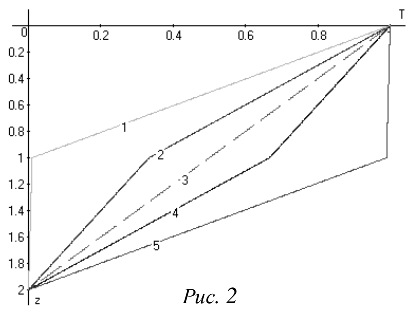

Рис. 2

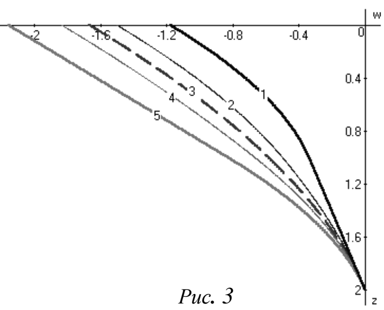

Рис. 3

Як видно з рисунків, отримані результати добре узгоджуються з фізичним сенсом. Зауважимо, що вигідно щоб у подібних конструкціях першим знаходився стрижень з меншим коефіцієнтом теплопровідності, оскільки це призведе до зменшення деформації всієї конструкції.

ВИСНОВКИ

У статті побудовано точний аналітичний розв'язок задачі про термопружну деформацію тонкого складеного стрижня. Вирази для функцій переміщень, напружень та температури представлено у квадратурах. Запропонований у статті спосіб визначення термо-напружено-деформівного стану стрижня можна застосовувати при інженерних розрахунках подібних конструкцій; для тестування ефективності чисельних методів. Стаття може використовуватися як вступ до вивчення методу функцій податливості. При застосуванні цього методу немає потреби розв'язувати системи, складність методу лінійно залежить від числа стрижнів, а тому його можна застосовувати до конструкцій з будь-якою скінченною кількістю стрижнів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Буксианидзе А.А. Определение термоупругого поля стержня // Пробл. прикл. мех.: Международный научный журнал. – 2003. – № 4. – С.108-115, 119, 124.
2. Copetti M.I.M. A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint // Math. and Comput. Simul. – 2002. – 59, № 4. – С.361-376.

3. Угодчиков А. Решение задач теории упругости методами функций комплексного переменного. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – 395 с.

4. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Связанная задача термоупругости для полубесконечного стержня // Матер. 4 Междунар. симп. «Динам. и технол. пробл. мех. конструкций и сплош. сред», Ярополец, 16-20 февр., 1998. – М., 1998. – С.95-100.

5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов (Обзор) // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 2. – С.39-63.

УДК 681.3:771.537.442

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА R-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ «РАНОК»

*Толок А.В., д.т.н., профессор, Мыльцев А.М., ассистент, Корогод В.Л., ассистент

Запорожский национальный университет
**Московский институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Предлагается способ формулировки задач линейного и нелинейного программирования на основе аппарата R-функций В.Л. Рвачёва для решения в системе аналитического проектирования РАНОК-МП. На примере задач математического программирования рассматривается принцип работы системы, его преимущества и недостатки.

Ключевые слова: оптимизация, R-функция, рекурсивный анализ, образ-модель, градиентный метод, математическое программирование, РАНОК-МП, глобальный экстремум.

*Толок О.В., Мильцев О.М., Корогод В.Л., ВИКОРИСТАННЯ АПАРАТУ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СИСТЕМІ «РАНОК» / Запорізький національний університет, Україна; *Московський інститут проблем управління В.О. Трапезнікова РАН, Росія

Пропонується спосіб формулювання задач лінійного та нелінійного програмування на базі апарату R-функцій В.Л. Рвачова для розв'язання в системі аналітичного програмування РАНОК-МП. На прикладі задач математичного програмування розглядається принцип роботи системи, його переваги та недоліки.

Ключові слова: оптимізація, R-функція, рекурсивний аналіз, образ-модель, градієнтний метод, математичне програмування, РАНОК-МП, глобальний екстремум.

*Tolok A.V., Myltsev A.M., Korogod V.L. APPLICATION OF R-FUNCTIONS FOR SOLVING MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN SYSTEM "RANOK" / Zaporizhzhya national university, Ukraine; *Moscow Institute of Control Sciences Russian Academy of Sciences, Russia

In this article we propose method of problems definition for linear and nonlinear programming which is based on R-functions of V.L.Rvachov for their solution in the analytical projection system RANOK-MP. Principle of system operation, its advantages and disadvantages are considered by means of example of mathematical programming problems.

Key words: optimization, R-function, recursive analysis, form-model, gradient method, mathematical programming, RANOK-MP, global extremum.

Задачи математического программирования базируются на оптимизационных постановках, формирующих группу методов математической оптимизации. Несмотря на обилие аналитических подходов к оптимизационным решениям, базирующихся на сложных алгебраических формулировках решения систем уравнений, наиболее часто применяемыми в решении задач такого класса оказались симплексный и градиентный методы. Простота понимания алгоритма предопределила их наибольшую потребность в инженерной среде. Такая тенденция говорит об актуальности развития подобных алгоритмов, наиболее подходящих к автоматизации процесса оптимизации на основе корректной аналитической постановки задачи. В работе рассматривается один из методов аналитического моделирования оптимизационной задачи с применением математического аппарата R-функций для её автоматизированного решения в системе РАНОК [1].

Система аналитического проектирования РАНОК-МП предусматривает возможность моделирования алгебры многообразий для пространств E^2 и E^3 с применением R-операций теории В.Л. Рвачёва [1, 2]. Система базируется на воксельном представлении модели графических данных, что позволяет