

5. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / А.А. Шишканова // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102.
6. Дьяченко Н. Н. Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости / Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. - 2006. – №1. – С. 25-33.
7. Дьяченко Н. М. Відносно розв'язку однієї задачі контакту з лінійним законом деформування шорсткості / Н. М. Д'яченко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 1999. – № 3. – С. 99-103.
8. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – М.: Наука, 1984. – 752с.

УДК 539.3

ЗАДАЧА О СКОЛЬЖЕНИИ С ТРЕНИЕМ ПАРАБОЛОИДНОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ШЕРОХОВАТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Дьяченко Н.Н., к.ф.-м.н., доцент, Шашкова Е.В., ассистент

Запорожский национальный университет

Рассмотрена квазистатическая задача о скольжении параболоидного штампа с трением по границе упругого шероховатого полупространства при линейном законе деформирования шероховатости. К ее решению применяются метод последовательных приближений и метод механических квадратур. Определено влияние коэффициентов шероховатости, трения и высоты приложения касательной силы на контактные характеристики, угол наклона штампа и форму площадки контакта. Установлена связь решения данной задачи с решением задачи о вдавливании параболоидного штампа смещенной силой в упругое шероховатое полупространство.

Ключевые слова: контактная задача, штамп, шероховатость, закон деформирования шероховатости, трение

Д'яченко Н.М., Шашкова Є.В. ЗАДАЧА ПРО КОВЗАННЯ З ТЕРТЯМ ПАРАБОЛОЇДНОГО ШТАМПА ПО МЕЖІ ШОРСТКОГО ПІВПРОСТОРУ / Запорізький національний університет, Україна.

Розглянуто квазистатичну задачу про ковзання параболоїдного штампа з тертям по межі пружного шорсткого півпростору при лінійному законі деформування шорсткості. До її розв'язання застосовуються метод послідовних наближень і метод механічних квадратур. Визначено вплив коефіцієнтів шорсткості, тертя і висоти прикладення дотичної сили на контактні характеристики, кут нахилу штампа і форму площадки контакту. Встановлено зв'язок між розв'язком даної задачі і розв'язком задачі про вдавлювання параболоїдного штампа зсуненою силою в пружний шорсткий півпростір.

Ключові слова: контактна задача, штамп, шорсткість, закон деформування шорсткості, тертя.

Dyachenko N.N., Shashkova Ye.V. THE DECISION OF THE PROBLEM ABOUT SLIDING OF A PARABOLOIDAL PUNCH WITH FRICTION ON BORDER ROUGH HALF-SPACE / Zaporizhzhya National University, Ukraine.

The quasistatic problem about sliding of a paraboloidal punch with friction on border of elastic rough half-space by the linear law of deformation of a roughness is considered. To her decision the iteration method and a method of mechanical quadratures is applied. Influence of factors of a roughness, friction and heights of the appendix of a tangent of force on contact characteristics, a inclination of a stamp and a form of a platform of contact. A connection of the decision of the given problem with the decision of a problem about pressure of a punch vertical displaced force on elastic rough half-space is established.

Key words: a contact task, a punch, roughness, the law of roughness deformation, a friction.

Рассмотрим квазистатическую пространственную контактную задачу о скольжении по границе шероховатого упругого полупространства жесткого параболоидного, эллиптического в плане штампа, который под воздействием касательной силы получает определенный наклон. Контактom шероховатых тел занимается наука трибология. Среди задач, которые решает эта наука, такие: исследование характеристик шероховатых поверхностей, влияние шероховатости на трение и износ. Эти проблемы поставлены инженерной практикой.

Фізико-математичні науки

Впервые И.Я. Штаерманом [1] была выдвинута гипотеза о том, что при постановке контактных задач для тел с поверхностной микроструктурой необходимо дополнительно учитывать смятие микронеровностей. В данной работе будем предполагать, что зависимость смятия микронеровностей шероховатости от давления является линейной. Решение задач о контакте шероховатых тел без учета трения различными методическими подходами получено в [1-4]. Плоская задача о скольжении с трением как плоского, так и неплоского штампа по гладкому полупространству, изучена в монографии [2]. Там же приведено интегральное уравнение и предложен метод малого параметра решения пространственной контактной задачи о скольжении с трением штампа без учета его наклона, однако числовые результаты не приводятся. Случай скольжения с трением квадратного штампа по границе шероховатого полупространства при линейном законе деформирования шероховатости рассмотрен в [4, 5]. Пространственная задача о скольжении с трением неплоского штампа с учетом его наклона и шероховатости полупространства ранее не решалась.

Найдем решение данной задачи с целью определения влияния коэффициентов шероховатости, трения и высоты приложения касательной силы на контактные характеристики, угол наклона штампа и форму площадки контакта. Также установим связь решения данной задачи с решением задачи о вдавливании параболоидного штампа смещенной силой в упругое шероховатое полупространство [6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Систему координат расположим так, как показано на рис. 1. Предположим, что штамп является эллиптическим параболоидом с уравнением поверхности $z = f(x, y)$, где

$$f(x, y) = -A \left(x^2 + \frac{y^2}{1 - e_0^2} \right),$$

$A = 1 \frac{1}{\text{см}}$, e_0 - эксцентриситет эллипса в сечении параболоида плоскостью, параллельной плоскости Oxy . На штамп действуют внешние силы: нормальная Q , и касательная T , приложенная на высоте d от поверхности полупространства. Эти силы обеспечивают штампу состояние предельного равновесия или равномерного

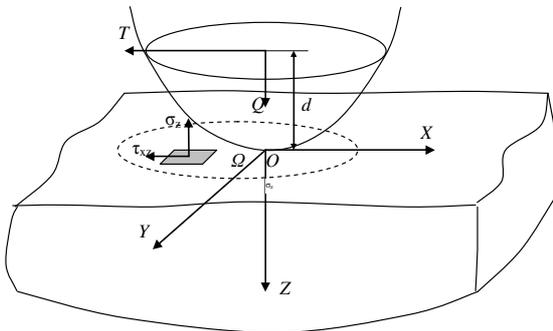


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия.

движения. Считаем задачу квазистатической, что накладывает определенные ограничения на скорость перемещения штампа. Результатом воздействия нормальной силы является поступательное перемещение штампа параллельно оси Oz на глубину δ , а касательной – поворот вокруг некоторой оси в плоскости Oxy : γ_x, γ_y - проекции вектора малого поворота. Первоначально рассмотрим *частный случай*, когда $\gamma_x = 0, \gamma_y = \gamma$, а затем сделаем выводы относительно общего случая.

В результате действия внешних сил на границе упругого полупространства $z = 0$ возникают нормальное и касательное напряжения σ_z, τ_{xz} . Предположим, что на всей площадке контакта имеет место закон трения

$$\tau_{xz} = \mu \sigma_z,$$

где μ - коэффициент трения.

На плоскости Oxy рассмотрим область Ω (площадку контакта), содержащую точки, располагающиеся после деформации на смещенной поверхности основания штампа. Граничные условия имеют вид

$$w = \delta - \gamma x + f(x, y), \quad \tau_{xz} = \mu \sigma_z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega.$$

Штамп в точках области Ω оказывает на полупространство нормальное давление $p(x, y) = -\sigma_z(x, y, 0) \geq 0$. Согласно граничным условиям вне области Ω , а также на ее границе Γ давление равно нулю:

$$p(x, y) = 0, \quad \text{если } (x, y) \notin \Omega;$$

$$p(x, y) = 0, \quad \text{если } (x, y) \in \Gamma.$$

С учетом сказанного выше и из [2, 7] получим, что зависимость нормальных перемещений точек области Ω от давления выражается интегральным уравнением

$$Bp(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{x-x'}{r^2} \right) dx' dy' = \delta - \gamma x - A \left(x^2 + \frac{y^2}{1-(e_0)^2} \right), \quad (1)$$

где B - коэффициент шероховатости, E - модуль упругости, а ν - коэффициент Пуассона материала полупространства, $r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, δ - углубление (осадка) штампа в упругое шероховатое полупространство.

Условия равновесия нормальных и касательных сил имеют соответственно вид:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy', \quad (2)$$

$$T = \iint_{\Omega} \tau_{xz}(x', y') dx' dy' = -\mu \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy' = -\mu Q.$$

Вследствие воздействия на штамп касательной силы давление под ним будет распределено неравномерно, что приводит к возникновению дополнительного момента M_y относительно оси Oy :

$M_y = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'$. Условие равновесия моментов относительно начала координат имеет вид:

$M_y + |T|d = 0$. Из последних трех соотношений получим

$$\iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy' + d\mu Q = 0. \quad (3)$$

Если бы на штамп воздействовала сила Q , параллельная оси Oz , а точка пересечения линии действия этой силы с плоскостью Oxy имела бы координаты $(x_0, 0)$, то условие равновесия моментов относительно начала координат имело бы вид: $x_0 Q = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'$. В таком случае, как показано в

[6], площадка контакта представляла бы собой эллипс с центром в точке $(x_0, 0)$. Поэтому, сравнивая приведенное условие равновесия моментов с (3), вводим обозначение

$$x_0 = -d\mu.$$

Будем предполагать, что уравнения кривых, составляющих Γ , имеют вид $x = b_1(y) + x_0$ и $x = b_2(y) + x_0$, тогда граничное условие примет вид

$$p(b_i(y) + x_0; y) = 0, \quad \text{где } i=1,2. \quad (4)$$

Исходя из физического смысла задачи, функции $b_i(y)$, $i=1,2$ должны быть симметричны относительно оси Ox и заданы на отрезке $[-b^*, b^*]$. Точки $(x_0; \pm b^*)$ лежат на границе Γ области Ω , поэтому удовлетворяют граничному условию, то есть

$$p(x_0; \pm b^*) = 0. \quad (5)$$

Если подставить (4) в (1), то получим уравнение

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r_0} + \mu\lambda \frac{b_i(y) + x_0 - x'}{r_0^2} \right) dx' dy' = \delta - \gamma(b_i(y) + x_0) - A \left((b_i(y) + x_0)^2 + \frac{y^2}{1-(e_0)^2} \right) \quad (i=1,2), \quad (6)$$

где $r_0 = r(b_i(y) + x_0, x', y, y')$, а если подставить (5) в (1), то – уравнение

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r_1} + \mu\lambda \frac{x_0 - x'}{r_1^2} \right) dx' dy' = \delta - \gamma x_0 - A \left(x_0^2 + \frac{(b^*)^2}{1-(e_0)^2} \right), \quad (7)$$

где $r_1 = r(x_0, x', b^*, y')$.

Итак, в задаче заданы нормальная сила Q , коэффициент шероховатости B , упругие постоянные, коэффициент трения μ , упругие постоянные, расстояние d приложения касательной силы T и значение e_0 ; необходимо решить уравнения (1) – (3), (6) и (7), чтобы найти функцию распределения нормальных давлений под штампом $p(x, y)$, осадку штампа δ , значение характеристики наклона штампа γ , функции $b_i(y)$ ($i=1,2$) и значение b^* , характеризующие границу Γ площадки контакта.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Обозначим $\beta = 1$ см. Введем безразмерные величины: функцию нормального давления $p_1(x, y) = cp(x, y)$, где $c = (1 - \nu^2)/(\pi E)$; коэффициент шероховатости $B_1 = B/(c\beta)$ и осадку штампа $\delta_1 = \delta/\beta$. Основное уравнение (1) перепишем в операторном виде

$$\frac{B_1}{2\pi} p_1(x, y) + (Lp_1)(x, y) = \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} \left(x^2 + \frac{y^2}{1 - (e_0)^2} \right), \quad (8)$$

где $(Lp_1)(x, y) = \frac{1}{2\pi\beta} \iint_{\Omega} p_1(x', y') \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{x-x'}{r^2} \right) dx' dy'$ - оператор, отображающий пространство непрерывных на Ω функций $C(\Omega)$ с нормой $\|p_1\| = \max_{(x,y) \in \Omega} |p_1(x, y)|$ в себя.

О возможности применения метода последовательных приближений. Оценим норму оператора L . Через a^* обозначим наибольшее расстояние от точки $(x_0, 0)$ до границы Γ области Ω , а через $U_{2a^*}[(x, y)]$ - замкнутый круг радиуса $2a^*$, с центром в точке (x, y) области Ω , содержащий в себе Ω . Имеем:

$$\|Lp_1\| \leq \frac{1}{2\pi\beta} \max_{(x,y) \in \Omega} \iint_{\Omega} |p_1(x', y')| \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{|x-x'|}{r^2} \right) dx' dy' \leq \frac{\|p_1\|}{2\pi\beta} \max_{(x,y) \in \Omega} \iint_{U_{2a^*}[(x,y)]} \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{|x-x'|}{r^2} \right) dx' dy'.$$

Введем замену $x - x' = \rho \cos \varphi$, $y - y' = \rho \sin \varphi$, после чего получим

$$\|Lp_1\| \leq \frac{\|p_1\|}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2a^*} (1 + \mu\lambda |\cos \varphi|) \rho d\rho = \frac{\|p_1\|}{2\pi\beta} (4\pi a^* + 8\mu\lambda a^*) = \frac{2a^*}{\beta} (1 + 2\mu\lambda) \|p_1\|.$$

откуда приходим к выводу, что $\|L\| \leq u$, где

$$u = \frac{2a^*}{\beta} (1 + 2\mu\lambda).$$

Введем малый параметр $\alpha = 1 - B_1/(2\pi)$ и рассмотрим оператор $\alpha I - L$ на пространстве непрерывных на Ω функций. Он будет сжимающим, если

$$0 < B_1 < 2\pi \quad \wedge \quad u < 1. \quad (9)$$

Если на штамп действует сила $Q_1 = Qc = 8,625 \cdot 10^{-3}$ см², вдавливающая его в упругое шероховатое полупространство, высота микровыступов которого незначительна и соответствует коэффициентам шероховатости $0 < B_1 < 2\pi$, то, как показывают проводимые ниже расчеты, имеет место неравенство $\beta > 2a^* (1 + 2\mu\lambda)$, которое равносильно неравенству $u < 1$. Поэтому, если переписать уравнение (8) в виде

$$p_1(x, y) = \alpha p_1(x, y) - (Lp_1)(x, y) + \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} \left(x^2 + \frac{y^2}{1 - (e_0)^2} \right), \quad (10)$$

то уравнение (10) имеет единственное решение при выполнении ограничений (9), которое можно найти методом последовательных приближений [8].

Численное интегрирование. Предположим, что квадрат $K = [-\beta, \beta] \times [-\beta, \beta]$ содержит в себе область Ω . При решении уравнения (10) интеграл будем вычислять численно. Такой подход к решению подобных уравнений был обоснован в [9]. Разобьем квадрат K на $n \times n$ равных частей-квадратов $K_{q,j}$:

$$-\beta = x_0 < x_1 < \dots < x_q < \dots < x_n = \beta; \quad -\beta = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_n = \beta;$$

$$K_{q,j} = [x_{q-1}; x_q] \times [y_{j-1}; y_j], \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \bigcup_{q,j=1}^n K_{q,j} = K.$$

Интеграл $(Lf)(x, y)$ приближенно заменим его интегральной суммой

$$[\bar{L}f](x, y) = \frac{1}{2\beta\pi\alpha} \sum_{\substack{m,l:(x,y) \in K_{m,l}; \\ (\xi_m, \eta_l) \in \Omega}} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2}} + \mu\lambda \frac{x - \xi_m}{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2} \right) f(\xi_m, \eta_l) \mu K_{m,l},$$

где $\mu K_{m,l} = \Delta = 4\beta^2/n^2$, (ξ_m, η_l) – центр квадрата $K_{m,l}$, то есть $\xi_m = (x_m + x_{m-1})/2$, $\eta_l = (y_l + y_{l-1})/2$, $m = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$. Введем следующие обозначения. Определим $\theta(x, y)$, равным 1, если $(x, y) \in \Omega$, и равным 0 – в противном случае;

$$p_2(x, y) = p_1(x, y)\theta(x, y); \quad A = [a_{q,j,m,l}]_{q,j,m,l},$$

где $a_{q,j,m,l} = \frac{\Delta}{2\beta\pi\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_m - \xi_q)^2 + (\eta_l - \eta_j)^2}} + \mu\lambda \frac{\xi_q - \xi_m}{(\xi_m - \xi_q)^2 + (\eta_l - \eta_j)^2} \right)$, если $m \neq q; l \neq j$, $a_{q,j,m,l} = 0$ –

в противном случае. Черточкой сверху будем обозначать приближенные значения соответствующих величин. В результате неизвестная функция будет представлена матрицей $X = [p_2(\xi_q, \eta_j)]_{q,j}$, значение оператора – матрицей $A \cdot X$, и, если обозначить

$$Y = \left\{ \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{\gamma}{2\pi\beta} [\xi_q]_{q,j} - \frac{A}{2\pi\beta} \left[(\xi_q)^2 + \frac{(\eta_j)^2}{1 - (e_0)^2} \right]_{q,j} \right\} \cdot [\theta(\xi_q, \eta_j)]_{q,j},$$

то с учетом (10) получим приближенное уравнение относительно неизвестной матрицы X :

$$X = \alpha X + A \cdot X + Y. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$S = \iint_{\Omega} dx'dy', \quad S_1 = \iint_{\Omega} x'dx'dy', \quad S_2 = \iint_{\Omega} (x')^2 dx'dy', \\ S_3 = \iint_{\Omega} \left[(x')^2 + \frac{(y')^2}{1 - (e_0)^2} \right] dx'dy', \quad S_3 = \iint_{\Omega} \left[(x')^2 + \frac{(y')^2}{1 - (e_0)^2} \right] x'dx'dy'; \\ t = \sum_{m,l:(\xi_m, \eta_l) \in \Omega} \{ \alpha p_2(\xi_m, \eta_l) - (\bar{L}p_2)(\xi_m, \eta_l) \} \Delta, \quad t_1 = \sum_{m,l:(\xi_m, \eta_l) \in \Omega} \xi_m \cdot \{ \alpha p_2(\xi_m, \eta_l) - (\bar{L}p_2)(\xi_m, \eta_l) \} \Delta.$$

Из (2) и (3) получим соотношения, с помощью которых будем искать значения γ и δ_1 :

$$\gamma = \frac{1}{S_2} [2\pi\beta(t_1 - x_0 Q_1) + \delta_1 \beta \bar{S}_1 - A \bar{S}_4], \quad (12)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{S} \left[2\pi\beta(Q_1 - t) + \frac{\gamma}{\beta} \bar{S}_1 + \frac{A}{\beta} \bar{S}_3 \right]. \quad (13)$$

Искомые функции $b_i(y)$, $i = 1, 2$, принимающие ненулевые значения при $y \in [-b^*, b^*]$, приближенно заменяем векторами $[b_i(\eta_j)]$, $i = 1, 2$. С учетом (6) находим уравнение для нахождения координат этих векторов:

$$b_i(\eta_j) = \frac{-h + (-1)^{i-1} \sqrt{D}}{2u^*} \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

$$h = 2Ax_0 + \gamma, \quad D = u^{*2} - 4hv, \quad u^* = A, \quad v = 2\pi\beta(\bar{L}p_2)(b_i(\eta_j), \eta_j) - \delta_1\beta + \gamma x_0 + A(x_0)^2 + A(\eta_j)^2 / (1 - (e_0)^2),$$

а с учетом (7) – уравнение для отыскания значения b^* :

$$b^* = \sqrt{\frac{1-e^2}{A}(\delta_1\beta - A(x_0)^2 - \gamma x_0 - 2\pi\beta(\bar{L}p_2)(x_0, b^*))}. \quad (15)$$

Таким образом, численное решение поставленной задачи ищем методом последовательных приближений, решая уравнения (11) - (15). При этом все искомые величины находятся в итерационном процессе, поэтому вместе с функциями $b_i(y)$ ($i=1,2$) пошагово изменяется и область Ω .

Погрешность вычислений включает в себя: во-первых, погрешность от «выбрасывания» интеграла по квадрату разбиения, содержащему особую точку, эта погрешность прямо пропорциональна площади такого квадрата; во-вторых, погрешность замены интеграла интегральной суммой, которая пропорциональна максимальному колебанию функции на квадратах разбиения; в-третьих, погрешность, обусловленная криволинейностью границы Γ области Ω , такая погрешность пропорциональна сумме площадей квадратов разбиения, покрывающих границу Γ ; в-четвертых, погрешность метода последовательных приближений. Суммарная погрешность оценивается аналогично [9], и при $n = 79$, например, для $B_1 = 1$ составляет 4%.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Имеют место **общие закономерности**, которые были получены с точностью до 1%:

- 1) числовые значения функции нормального давления и размеров площадки контакта не зависят от значения расстояния d от линии приложения касательной силы до поверхности полупространства и от коэффициента трения μ ;
- 2) значение характеристики наклона штампа γ не зависит от B_1 ;
- 3) имеет место зависимость: $\gamma = 2A\mu d = -2Ax_0$, которая совпадает с классическим случаем [7];
- 4) изменение углубления можно описать зависимостью $\delta = \delta^* - A(\mu d)^2 = \delta^* - A(x_0)^2$, где δ^* - углубление штампа при $d = 0$ см;
- 5) график функции давления является симметричным относительно оси с уравнением $\begin{cases} x = x^* \\ y = 0 \end{cases}$, а область Ω симметрична относительно точки $(x^*, 0)$, где $x^* = -(\mu d + x^{**}) = x_0 - x^{**}$, при этом $x^{**} > 0$;
- 6) значение характеристики сдвига площадки контакта x^{**} зависит от B_1 и μ , а от d и e_0 не зависит, а именно: увеличение B_1 при фиксированном значении μ приводит к уменьшению x^{**} , а увеличение μ при фиксированном значении B_1 приводит к увеличению x^{**} ;
- 7) при фиксированных B_1 , μ и e_0 значения нормальных давлений совпадают при различных d' и d'' в точках $(x + \mu d' + x^{**}, y)$ и $(x + \mu d'' + x^{**}, y)$;
- 8) значения давлений в задаче о скольжении штампа с трением и в задаче о вдавливании штампа сдвинутой силой совпадают в точках $(x + \mu d + x^{**}, y)$ и $(x - x_0, y)$ соответственно;
- 9) все геометрические характеристики площадки контакта в задаче о скольжении штампа с трением и в задаче о вдавливании штампа сдвинутой силой совпадают с точностью до сдвига на x^{**} в отрицательном направлении оси абсцисс;
- 10) уменьшение коэффициента шероховатости приводит к уменьшению углубления, уменьшению размеров площадки контакта, увеличению наибольшего давления в центре площадки контакта (см. рис.2 и табл. 1).

Имеют место также специфические закономерности, соответствующие случаю кругового и эллиптического в плане штампа. Расчеты проводились для $Q_1 = Qc = 8,625 \cdot 10^{-3}$ см², $v = 0,3$, $\mu = 0,2$.

Данный параболоид, у которого эксцентриситет сечения плоскостью, параллельной плоскости Oxy , равен e_0 , имеет значения радиусов главных кривизн $R_1 = \frac{1}{2A}$, $R_2 = \frac{1 - (e_0)^2}{2A}$. Площадкой контакта такого штампа с гладким полупространством (классический случай), является эллипс; в [7] приведены формулы и таблицы для определения его эксцентриситета e .

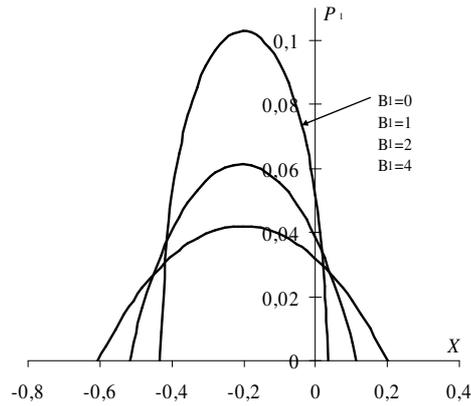


Рис. 2. Функции нормального давления эллиптического в плане штампа для различных коэффициентов шероховатости при $e_0 = 0,6$, $d = 1$ см в сечении плоскостью $y = 0$.

Как видно из результатов, приведенных в табл. 1, независимо от значения коэффициента шероховатости B_1 , от значения d и от исходного значения e_0 с точностью до 1% можно утверждать, что область контакта является эллипс с центром в точке $(x^*, 0)$, со значениями большой полуоси a и малой b , не зависящими от d . Для примера на рис. 3 изображены площадки контакта для различных значений e_0 при $B_1 = 3$, $d = 1$ см. С ростом коэффициента шероховатости B_1 линейные размеры площадки контакта увеличиваются, что следует из результатов, приведенных в табл. 1.

Таблица – 1. Значения контактных характеристик при различных исходных данных

d	B_1	e_0	R_2/R_1	δ	a	b	e	$S = \pi ab$	$\max_{\Omega} p_1(x, y)$
0	3	0,6	0,64	0,1857	0,4002	0,3163	0,61266	0,3977	0,04208
0,5				0,1757	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04208
1				0,1457	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04208
1,5				0,0957	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04208
2				0,0257	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04208
3				-0,1743	0,4001	0,3163	0,61239	0,3976	0,04207
1	3	0	1	0,1285	0,3776	0,3776	0,00000	0,4479	0,03733
		0,1	0,99	0,1288	0,3781	0,3761	0,10272	0,4467	0,03743
		0,4	0,84	0,1350	0,3862	0,3524	0,40912	0,4276	0,03911
		0,6	0,64	0,1457	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04208
		0,8	0,36	0,1704	0,4308	0,2522	0,81073	0,3413	0,04916
	1	0,6	0,64	0,0956	0,3223	0,2517	0,62459	0,3346	0,06133
				0,1231	0,3678	0,2896	0,61646	0,3346	0,04949
				0,1457	0,4002	0,3163	0,61265	0,3977	0,04072
				0,1653	0,4259	0,3373	0,61056	0,4513	0,03729

Из рис. 4 и рис. 5 видна симметричность графика функции нормального давления, отмеченная в общих закономерностях. Из табл. 1, рис. 3-5 следует, что при фиксированном значении коэффициента шероховатости большим значениям e_0 соответствуют меньший размер площадки контакта, а поэтому и большее углубление при большем максимальном давлении в центре площадки контакта.

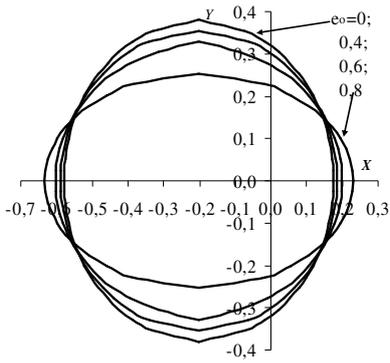


Рис. 3. Площадки контакта для различных значений e_0 при $B_1 = 3$, $d = 1$ см.

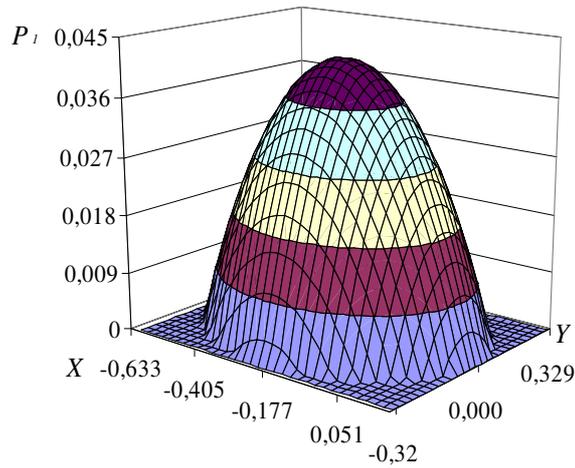


Рис. 4. Функция нормального давления под эллиптическим в плане параболическим штампом при $e_0 = 0,6$, $B_1 = 3$, $d = 1$ см.

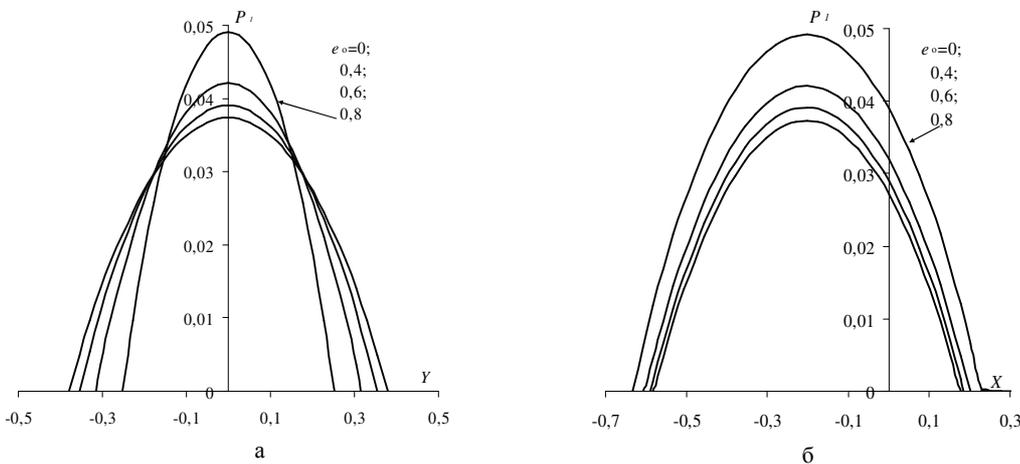


Рис.5. Графики функций нормального давления под эллиптическим в плане параболическим штампом при $B_1 = 3$, $d = 1$ см для различных значений e_0 в сечении плоскостью а) $x = 0$, б) $y = 0$.

Теперь сделаем **выводы относительно общего случая**, когда линия приложения касательной силы расположена на расстоянии d до поверхности полупространства, и ее проекция на плоскость Oxy образует угол α с положительным направлением оси абсцисс. Уравнение в операторном виде в общем случае имеет вид [2, 7]:

$$B_1 p_1(x, y) + 2\pi [Lp_1](x, y) = \delta_1 - \frac{\gamma_y}{\beta} x + \frac{\gamma_x}{\beta} y - \frac{A}{\beta} \left(x^2 + \frac{y^2}{1 - (e_0)^2} \right). \quad (20)$$

Аналогично частному случаю доказывается существование и единственность решения этого уравнения при ограничениях (9).

В частном случае геометрические характеристики области контакта не зависят от d , и областью контакта является эллипс с центром в точке $(x^*, 0)$, где $x^* = -(\mu d + x^{**}) = x_0 - x^{**}$. К аналогичным выводам можно прийти и в общем случае: областью Ω будет эллипс с центром в точке (x^*, y^*) , где $x^* = -(\mu d + x^{**}) \cdot \cos \alpha = x_0 - x^{**} \cos \alpha$, а $y^* = -x^{**} \cdot \operatorname{tg} \alpha = (\mu d + x^{**}) \cdot \sin \alpha = y_0 + x^{**} \sin \alpha$. Также аналогично

частному случаю приходим к выводу о том, что характеристики наклона штампа вычисляются по формулам

$$\gamma_y = 2A \cdot \mu \cdot d \cdot \cos \alpha, \quad \gamma_x = \frac{2A \cdot \mu \cdot d \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 - (e_0)^2}}. \quad (21)$$

Вводим замены

$$\begin{aligned} x_0 &= -\mu d \cos \alpha, \quad y_0 = \mu d \sin \alpha \\ \hat{x} &= x - x_0, \quad \hat{y} = y - y_0, \quad \hat{x}' = x' - x_0, \quad \hat{y}' = y' - y_0, \\ \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= p_1(x + x_0, y + y_0), \quad \hat{\Omega} - \text{эллипс} \frac{[\hat{x} + x^{**} \cdot \cos \alpha]^2}{a^2} + \frac{[\hat{y} - x^{**} \cdot \sin \alpha]^2}{a^2(1 - e^2)} \leq 1, \\ \hat{\delta}_1 &= \delta_1 + \frac{A}{\beta} (x_0)^2 + \frac{A}{\beta} \cdot \frac{(y_0)^2}{1 - (e_0)^2}, \end{aligned}$$

которые с учетом (21) сводят уравнение (20) к уравнению вида:

$$B_1 \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) + 2\pi [L \hat{p}_1] \hat{x}, \hat{y} = \hat{\delta}_1 - \frac{A}{\beta} \left([\hat{x}]^2 + \frac{[\hat{y}]^2}{1 - (e_0)^2} \right),$$

соответствующему случаю задачи с эллиптическим в плане параболоидом, скользящим с трением по границе упругого шероховатого полупространства под воздействием нормальной и касательной сил, последняя из которых приложена на нулевом расстоянии от поверхности полупространства под нулевым углом, то есть $d = 0$ см, $\alpha = 0$. Поскольку этот случай рассматривался выше, то, кроме оговоренных выводов по форме площадки контакта и характеристик наклона штампа, можно записать закономерности общего случая.

Функция нормального давления и размеры площадки контакта не зависят от значений расстояния d от линии действия силы до поверхности полупространства и от значения угла α между проекцией этой линии на плоскость Oxy и положительным направлением оси абсцисс. График функции нормального

давления является симметричным относительно оси с уравнением $\begin{cases} x = x^* \\ y = y^* \end{cases}$. Функция давления достигает

наибольшего значения в точке (x^*, y^*) . При фиксированных B_1 , μ и e_0 значения нормальных давлений совпадают в точках $(x - x'_0, y - y'_0)$ и $(x - x''_0, y - y''_0)$, где $x'_0 = -(\mu d' + x^{**}) \cos \alpha$, $y'_0 = -x'_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha'$, $x''_0 = -(\mu d'' + x^{**}) \cos \alpha$, $y''_0 = -x''_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha''$ при различных значениях d' и d'' и равных α' и α'' , а также при различных значениях α' и α'' и равных d' и d'' .

Изменение углубления можно описать зависимостью $\delta = \bar{\delta} - A(\mu \cdot d \cdot \cos \alpha)^2 - A \cdot \frac{(\mu \cdot d \cdot \sin \alpha)^2}{1 - (e_0)^2}$, где $\bar{\delta}$ -

углубление штампа при $d = 0$ см. При фиксированном значении коэффициента шероховатости большим значениям эксцентриситета e_0 эллипса в сечении параболоидного штампа плоскостью, параллельной плоскости Oxy , соответствуют меньший размер площадки контакта, а поэтому и большее углубление при большем максимальном давлении в центре площадки контакта.

Уменьшение коэффициента шероховатости приводит к уменьшению углубления, уменьшению размеров площадки контакта, увеличению наибольшего давления в центре площадки контакта; при этом все контактные характеристики приближаются к соответствующим характеристикам, соответствующим гладкому полупространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. - М. - Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. - 270с.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. - М.: Наука, 2001. - 478 с.
3. Решение контактной задачи о штампе в плане, имеющем форму квадратного кольца / С. И. Гоменюк, Н. Н. Дьяченко, Е. В. Шашкова, К. В. Шашков // Теоретическая и прикладная механика. - 2005. - Вып. 40. - С.54-62.
4. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / А.А. Шишканова // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. - 2004. - Вип. 1. - С. 95-102.

5. Дьяченко Н. Н. Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости / Н. Н. Дьяченко, Е. В. Шашкова // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. - 2006. – №1. – С. 25-33.
6. Дьяченко Н. Н. Решение задачи о вдавлении смещенной силой параболического штампа в упругое шероховатое полупространство / Н. Н. Дьяченко // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. - 2006. – №1. – С. 16-25.
7. Лурье Л. И. Пространственные задачи теории упругости / Л. И. Лурье. – М.: Наука, 1955.–492 с.
8. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. - М.: Наука, 1962. – 254 с.
9. Шашкова Е. В. Решение задачи контакта кольцевого штампа с шероховатым полупространством при нелинейном законе деформирования шероховатости / Е. В. Шашкова, Н. Н. Дьяченко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: механіка. – Вип. 8, Т.1. – 2004. – №6. – С. 187-194.

УДК 539.3

МАТРИЧНИЙ ФОРМАЛІЗМ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ОСНОВ СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

Зіновєєв І. В., старший викладач

Запорізький національний університет

Запропоновано метод визначення функцій податливості для багатошарових основ складної структури. За допомогою теорії матриць отримані аналітичні формули для визначення напружено-деформованого стану багатошарової основи складної структури.

Ключові слова: багатошарова основа складної структури, функції податливості, ізотропність, зосереджені сили, шар, напруження, деформації, рекурентні формули, матриці, матричний формалізм.

Зіновєєв І.В. МАТРИЧНИЙ ФОРМАЛІЗМ МЕТОДА ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНИХ ОСНОВАНІЙ СЛОЖНОЇ СТРУКТУРИ / Запорізький національний університет, Україна

Предложен метод определения функций податливости для многослойных оснований сложной структуры. При помощи теории матриц получены аналитические формулы для определения напряженно-деформированного состояния многослойного основания сложной структуры.

Ключевые слова: многослойное основание сложной структуры, функции податливости, изотропность, сосредоточенная сила, слой, напряжение, деформации, рекуррентные формулы, матрицы, матричный формализм.

Zinoveyev I.V. MATRIX FORMALISM OF A METHOD OF FUNCTIONS OF A PLIABILITY FOR THE MULTILAYER BASES OF COMPLICATED STRUCTURE/ Zaporizhzhya national university, Ukraine

The method of definition of functions of a compliance for the multilayer bases of complicated structure is offered. By means of the theory of matrix analytical formulas for definition intense - deformed state of the multilayer bases of complicated structure are obtained.

Key words: The multilayer bases of complicated structure, function of a compliance, isotropy, point force, layer, stress, recurrence formulae, matrix, a matrix formalism.

Історія питання та постановка задачі. Під багатошаровою основою розуміється пакет із скінченного числа невагомих однорідних шарів, що лежить на півпросторі (жорсткому або пружному). Кожен шар – це частина простору, обмежена двома паралельними площинами. Сусідні шари в основі зчеплені. На внутрішній шар основи діє розподілене вздовж контура об'ємне навантаження, яке змодельоване системою зосереджених сил.

Ефективним методом точного (у квадратурах) розв'язку основних межових задач для багатошарових основ є метод функцій податливості [1-3]. Коротко зміст його полягає в такому: у просторі трансформант напружено – деформівний стан кожного шару визначається через допоміжні функції шару.

Допоміжні функції сусідніх шарів не є незалежними, а пов'язані між собою лінійними співвідношеннями. Коефіцієнти цих співвідношень є функції податливості багатошарової основи. Вони є функціями параметрів інтегрального перетворення і для кожного шару залежать від пружних характеристик самого шару та шарів, які лежать нижче. Якщо функції податливості відомі (а вони не залежать від навантаження основи), то для визначення трансформант переміщень і напружень у будь-