УДК 517.927

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Поселюжна В.Б., к.ф.-м.н., доцент

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу

Розглядається один із підходів до дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь з малою нелінійністю. Обгрунтовується застосування до цієї задачі колокаційно-ітеративного методу. Побудовано алгоритм, встановлено достатні умови збіжності та оцінки похибок.

Ключові слова: крайова задача, інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод.

Поселюжная В.Б. ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ / Чертковский институт предпринимательства и бизнеса, Украина.

Рассматривается один из подходов к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений со слабой нелинейностью. Обосновано применение к этой задаче коллокационно-итеративного метода. Построен алгоритм, установлены достаточные условия сходимости и оценки погрешностей.

Ключевые слова: краевая задача, интегральные уравнения, коллокационно-итеративный метод.

Poseluzhna V.B. THE COLLOCATIONAL - PROJECTIVE METHOD USAGE TOWARDS THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH LITTLE UNLINEARSITV SOLUTION / Chortkiv Institute of Business, Ukraine

One of the approaches concerning the boundary-value problem for differential equations with little nonlinearity is considered. The collocational - projective method usage towards this problem is substantiated. The algorithm is built, the method's convergence sufficient conditions and error evaluation are set.

Key words: boundary-value problem, integral equation, collocational -projective method.

Математичними моделями багатьох задач фізики, хімії, механіки та інших областей сучасного природознавства і техніки є різні класи диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем. Точний розв'язок таких рівнянь, як правило, не вдається виразити через елементарні функції, тому великого значення набули методи наближеного розв'язування цих задач.

Найбільш поширеними аналітичними методами розв'язування таких класів рівнянь є ітераційні та проекційні методи. На основі синтезу цих методів виникли проекційно-ітеративні методи. Найбільш повно основні положення цих методів викладено в роботах [1-3]. До методів проекційно-ітеративного типу належить і колокаційно-ітеративний метод. У роботах [4-5] запропоновано і обгрунтовано алгоритм модифікованого колокаційно-ітеративного методу розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь з малою нелінійністю.

У даній роботі досліджується питання застосування колокаційно-ітеративного методу для розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь з малою нелінійністю.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо крайову задачу вигляду

$$\begin{aligned}(Lx)(t) &:= x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t) = \\ &= f(t) + c(t)\lambda + \varepsilon g(t, x(t), x'(t), \ldots x^{(m-1)}(t), \lambda), t \in (a,b)\end{aligned} \tag{1}$$

$$U_s(x) = \gamma_s, \quad \Phi_r(x) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1, l}, \tag{2}$$

де $U_s(x) = \sum_{j=0}^{m-1}(\alpha_{sj}x^{(j)}(a) + \beta_{sj}x^{(j)}(b)), \Phi_r(x), r = \overline{1,l}$ - лінійні неперервні функціонали на класі неперервних функцій, $\alpha_{sj}, \beta_{sj}, \lambda_s, \nu_r$ - задані числа, $f(t)$ - відома функція, $c(t) \cdot \lambda$ - скалярний добуток шуканого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l)$ і відомої вектор - функції $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots c_l(t))$, ε - малий додатний параметр.

Припустимо, що

1) $p_i \in C[a,b], i = \overline{1,m}, c_i \in C[a,b], i = \overline{1,l}$

2) $f \in C[a,b]$

3) $g(t, u_1, u_2, .. u_m, \lambda)$ - неперервна функція відносно своїх аргументів і задовольняє умові Ліпшиця.

Представимо задачу (1)-(2) у вигляді

$$(Ax)(t) + b(t)\lambda = f(t) + d(t)\lambda + (Bx)(t) + \varepsilon g(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m-1)}(t), \lambda), \tag{3}$$

$$U_s(x) = \gamma_s, \quad \Phi_r(x) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1, l}, \tag{4}$$

де

$$(Ax)(t) = x^{(m)}(t) + a_1(t) x^{(m-1)}(t) + ... + a_m(t) x(t),$$

$$(Bx)(t) = b_1(t) x^{(m-1)}(t) + ... + b_m(t) x(t),$$

$$d(t) = b(t) + c(t).$$

Застосуємо до задачі (3)-(4) колокаційно-ітеративний метод.

Нехай на відрізку $[a,b]$задано систему лінійно-незалежних, неперервних функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $i = \overline{o, n}$, зокрема система алгебраїчних або тригонометричних поліномів, і нехай на відрізку $[a,b]$ задані вузли колокації $\{t_i\}$, $i = \overline{o, n}$. Наближені розв'язки задачі (3)-(4) будемо визначати із задачі

$$\begin{aligned}(Ax_k)(t) + b(t)\lambda_k &= f(t) + d(t)\mu_k + (Bz_k)(t) + \\ &+ \varepsilon g(t, x_{k-1}(t), x'_{k-1}(t), ..., x_{k-1}{}^{(m-1)}(t), \lambda_{k-1}),\end{aligned} \tag{5}$$

$$U_s(x_k) = \gamma_s, \quad \Phi_r(x_k) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1, l}, \tag{6}$$

у якій

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \alpha_k(t), \tag{7}$$

$$\mu_k = \lambda_{k-1} + \theta_k, \tag{8}$$

$$\alpha_k(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^k \eta_j(t), \qquad \theta_k = \sum_{j=0}^{n} a_j^k \nu_j. \tag{9}$$

Невідомі параметри a_j^k знаходимо з умови

$$\begin{aligned}&(Lz_k)(t_i) - f(t_i) + c(t_i)\mu_k - \\ &- \varepsilon g(t, x_{k-1}(t_i), x'_{k-1}(t_i), ..., x_{k-1}{}^{(m-1)}(t_i), \lambda_{k-1}) = 0,\end{aligned} \tag{10}$$

де $\{t_i\}$,- вузли колокації., $i = \overline{o, n}$.

Нульове наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_0)(t) + b(t)\lambda_0 = u_0(t), \tag{11}$$

$$U_s(x_0) = \gamma_s, \quad \Phi_r(x_0) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1, l}. \tag{12}$$

Задана система лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $j = \overline{o, n}$ і система функцій $\{\eta_i(t)\}$, $j = \overline{o, n}$ та система векторів $\{\nu_i(t)\}$, $j = \overline{o, n}$ пов'язані співвідношенням

$$(A\eta_j)(t) + b(t)\nu_j = \varphi_j(t), \tag{13}$$

$$U_s(\eta_j) = 0, \quad \Phi_r(\eta_j) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1, l}, \tag{14}$$

Із формул (7), (9),(10) випливає, що для знаходження невідомих параметрів a_j^k у кожній ітерації отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i = \overline{o,n}, \tag{15}$$

в якій

$$\beta_{ij} = (L\eta_j)(t_i) - c(t_i)\nu_j, \quad i,j = \overline{o,n}, \tag{16}$$

$$b_i^k = \varepsilon_k(t_i), \quad i = \overline{o,n}, \tag{17}$$

$$\varepsilon_k(t) = f(t) + c(t)\lambda_{k-1} - (Lx_{k-1})(t) + \varepsilon g(t, x_{k-1}(t), x'_{k-1}(t), ..., x_{k-1}^{(m-1)}, \lambda_{k-1}). \tag{18}$$

Зауваження 1. Враховуючи, що матриця $\beta = (\beta_{ij})$ не змінюється протягом усієї обчислювальної схеми, легко знаходимо її обернену матрицю

($B = \beta^{-1}, B = (B_{ij}, i, j = \overline{0,n})$), розв'язок даної системи можна представити у вигляді

$$a_j^k = \sum_{i=0}^{n} B_{ij} b_i^k, \quad i = \overline{o,n} \tag{19}$$

Крайова задача (3)-(4) легко зводиться до рівносильного їй інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$\begin{aligned} u(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)ds + \\ \varepsilon g(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u(s)ds, ... h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u(s)ds, \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u(s)ds) \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$l(t) = f(t) + d(t)\sigma + (Bh)(t), \tag{21}$$

$$K(t,s) = d(t)\Gamma(s) + B[G(t,s)], \tag{22}$$

$h(t), \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l)$ - функція і вектор, які задовольняють рівнянню

$$(Ah)(t) + b(t)\sigma = 0$$

і неоднорідним умовам (4).

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ. Алгоритм (5)-(12) за допомогою заміни

$$(Ax_k)(t) + b(t)\lambda_k = u_k(t), \tag{23}$$

і співвідношення

$$(Az_k)(t) + b(t)\mu_k = u_{k-1}(t) + \omega_k(t), \tag{24}$$

$$U_s(z_k) = \gamma_s, \quad \Phi_r(z_k) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1,l}, \tag{25}$$

$$\omega_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(t), \tag{26}$$

яке безпосередньо випливає із формул (7), (8), (13), (14) з урахуванням (19) зводиться до колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння (20)

$$u_k(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)(u_{k-1}(s) + \omega_k(s))ds +$$
$$\varepsilon g(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-1}(s)ds, ..., h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-1}(s)ds, \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-1}(s)ds). \quad (27)$$

$$u_k(t_i) - u_{k-1}(t_i) - \omega_k(t_i) = 0, i = \overline{0,n}. \quad (28)$$

Таким чином, питання збіжності методу (5)-(12) розв'язування крайової задачі (1)-(2) зводиться до дослідження збіжності колокаційно-ітеративного методу (27)-(28) для інтегрального рівняння з малою нелінійністю (20), якому присвячені роботи [4-5].

Припустимо, не обмежуючи загальності, що $\{\varphi_i(x)\}$ фундаментальна система функцій на відрізку $[a,b]$, тобто $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера. Встановимо достатні умови збіжності запропонованого методу.

Виконавши нескладні перетворення на основі формул (26), (28) і враховуючи попереднє припущення, поправку $\omega_k(t)$ можна подати у вигляді

$$\omega_k(t) = \int S_n(t,s)\Delta_k(s)ds, \quad (29)$$

де

$$\Delta_k(t) = u_k(t) - u_{k-1}(t), \quad (30)$$

$$S_n(t,s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t)\delta(s - t_j), \quad (31)$$

$\delta(s - t_j)$ - функція Дірка.

Для визначення функції $\omega_k(t)$ на основі формул (27), (29)-(31) отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$\omega_k(t) = g_k(t) + \int_a^b H_n(t,s)\omega_k(s)ds, \quad (32)$$

де

$$g_k(t) = \int_a^b S_n(t,s)\overline{\varepsilon}_k(s)ds, \quad (33)$$

$$H_n(t,s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t)K(t_j, s), \quad (34)$$

$$\overline{\varepsilon}_k(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)u_{k-1}(s)ds - u_{k-1}(t) +$$
$$+ \varepsilon g(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-1}(s)ds, ..., h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-1}(s)ds, \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-1}(s)ds). \quad (35)$$

Інтегральне рівняння (32) рівносильне системі рівнянь

$$\sum a_j^k \left(\varphi_j(t_i) - \int K(t_i,s)\varphi_j(s)ds \right) = \overline{\varepsilon}_k(t_i), i = \overline{0,n}, \quad (36)$$

Алгоритм (27)-(28) рівносильний таким співвідношенням:

$$\Delta_k(t) = \int_a^b M_n(t,s)v_{k-1}(s)ds + \varepsilon\int_a^b E_n(t,s)\Delta g_{k-1}(s)ds\,, \tag{37}$$

$$v_k(t) = \int L_n(t,s)v_{k-1}(s)ds + \varepsilon\int D_n(t,s)\Delta g_{k-1}(s)ds\,, \tag{38}$$

де $v_k(t) = \Delta_k(t) - \omega_k(t)\,,$ (39)

$$\Delta g_{k-1}(t) = g(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-1}(s)ds, ...h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-1}(s)ds, \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-1}(s)ds) -$$

$$- g(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-2}(s)ds, ..., h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-2}(s)ds, \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-2}(s)ds).$$

а ядра операторів переходу обчислюються за формулами

$$M_n(t,s) = K(t,s) + \int_a^b K(t,\tau)R_n(\tau,s)d\tau\,, \tag{40}$$

$$L_n(t,s) = M_n(t,s) - \int_a^b S_n(t,\tau)M_n(\tau,s)d\tau\,, \tag{41}$$

$$E_n(t,s) = \delta(t-s) + \int_a^b M_n(t,\tau)Q_n(\tau,s)d\tau\,, \tag{42}$$

$$D_n(t,s) = E_n(t,s) - \int_a^b S_n(t,\tau)E_n(\tau,s)d\tau\,. \tag{43}$$

Тут $R_n(t,s)$ - резольвента ядра $H_n(t,s)$, що задовольняє рівняння

$$R_n(t,s) = H_n(t,s) + \int_a^b H_n(t,\tau)R_n(\tau,s)d\tau\,, \tag{44}$$

$$R_n(t,s) = H_n(t,s) + \int_a^b H_n(t,\tau)R_n(\tau,s)d\tau\,, \tag{45}$$

$$Q_n(t,s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t)\delta(s-t_j)\,. \tag{46}$$

Розглянемо функцію

$$E(t,s) = \delta(t-s) + \int_a^b R(t,\tau)\delta(\tau-s)d\tau\,, \tag{47}$$

де Тут $R(t,s)$ - резольвента ядра $K(t,s)$.

Припустимо, що для будь-якої функції $v \in L_2[a,b]$ виконуються нерівності

$$\int_a^b \left\{\int_a^b M_n(t,s)v(s)ds\right\}^2 dt \le p_n^2\int_a^b v^2(s)ds\,, \tag{48}$$

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b L_n(t,s)v(s)ds \right\}^2 dt \le q_n^2 \int_a^b v^2(s)ds\,, \tag{49}$$

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b E_n(t,s)v(s)ds \right\}^2 dt \le \gamma_n^2 \int_a^b v^2(s)ds\,, \tag{50}$$

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b D_n(t,s)v(s)ds \right\}^2 dt \le \eta_n^2 \int_a^b v^2(s)ds\,, \tag{51}$$

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b E(t,s)v(s)ds \right\}^2 dt \le \gamma^{*2} \int_a^b v^2(s)ds\,, \tag{52}$$

і введемо такі позначення

$$r_n = \varepsilon\mu\gamma_n, \qquad l_n = \varepsilon\mu\eta_n, \tag{53}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} r_n & p_n \\ l_n & q_n \end{pmatrix}, \tag{54}$$

у яких μ - деяка додатна константа умови Ліпшиця.

Тоді з урахуванням результатів робіт [4-5], справедливе наступне твердження, яке виражає достатню умову збіжності.

Теорема 1. Якщо виконується умова Ліпшиця, система рівнянь (36) однозначно розв'язна і спектральний радіус матриці A_n $\rho(A_n) < 1$, то задача (1)-(2) має єдиний розв'язок $x^*(t), \lambda^*$ і послідовності $\{x_k(t)\}$, $\{\lambda_k\}$, побудовані згідно з методом (5)-(12) збігаються до цього ж розв'язку.

Існування такого значення *n*, при якому система (36) однозначно розв'язна, випливає із теореми.

Теорема 2. Нехай одиниця – регулярне значення лінійного інтегрального рівняння (20), система функцій $\{\varphi_i(x)\}_{j=0}^n$ та вузли колокації підібрані таким чином, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \left| K(t,s) - H_n(t,s) \right|^2 dtds = 0\,, \tag{55}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \left| \delta(t-s) - Q_n(t,s) \right|^2 dtds = 0\,, \tag{56}$$

і $r_n = \varepsilon\mu\gamma^* < 1$. Тоді існує такий номер n_0, що при всіх $n \ge n_0$ система (36) однозначно розв'язна і послідовність $\{u_k(t)\}$, побудована згідно з методом (27)-(28), збігається до єдиного розв'язку рівняння (20).

ОЦІНКИ ПОХИБОК МЕТОДУ. Для встановлення оцінок похибок методу (5)-(12) розв'язування крайової задачі введемо такі позначення

$$a_k = \begin{pmatrix} \|u^* - u_k\| \\ \|u^* - u_k - \beta_k\| \end{pmatrix}, \qquad s_k = \begin{pmatrix} \|\Delta_k\| \\ \|v_k\| \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$d_k = \begin{pmatrix} \|x^* - x_k\| \\ \|\lambda^* - \lambda_k\|_0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} \|\omega\| \\ \|\sigma\| \end{pmatrix}, \tag{58}$$

де $\beta_k(t)$ - інтерполяційний поліном функції $u^*(t) - u_k(t)$, ω, σ - додатні константи, що фігурують у нерівностях

$$\left\| \int_a^b G(t,s)v(s)ds \right\| \le \omega \|v\| \ , \ \left\| \int_a^b \Gamma(s)v(s)ds \right\|_0 \le \sigma \|v\|, \ \forall v \in L_2([a,b]) \ ,$$

$\| \ \|_0$ - норма вектора в просторі R^l.

Теорема 3. Якщо виконується умова $\rho(A_n) < 1$, то справедливі такі оцінки

$$d_k \le \overline{B} A_n^k a_0 \ , \tag{59}$$

яка характеризує швидкість збіжності методу, та апостеріорні оцінки

$$d_k \le \overline{B}(1 - A_n)^{-1} A_n s_k \ , \tag{60}$$

$$d_k \le \overline{B}(1 - A_n)^{-1} A^{k-1} s_1 \ . \tag{61}$$

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ. Обчислення за алгоритмом (5)-(12) доцільно організувати по запропонованій схемі.

Задаємо або визначаємо із задачі (13)-(14) систему функцій $\{\eta_i(t)\}, \ j = \overline{o,n}$ і систему векторів $\{\nu_i(t)\}, \ j = \overline{o,n}$, і будуємо функції

$$\xi_j(t) = d(t)\nu_j + (B\eta_j)(t), \ j = \overline{o,n} \ . \tag{62}$$

Формуємо матрицю Λ, елементами якої є величини β_{ij}, які обчислюємо на основі співвідношення(16).

Після цього приступаємо до реалізації основної обчислювальної схеми.

Задаємо функцію $u_0(t)$ та із задачі (11)-(12) визначаємо нульове наближення $x_0(t)$, λ_0.

Нехай наближення $x_{k-1}(t)$, λ_{k-1} уже побудовані, тоді виконуємо першу ітерацію

$$\vartheta_k(t) = f(t) + d(t)\lambda_{k-1} + (Bx_{k-1})(t) + \varepsilon g(t, x_{k-1}(t), x'_{k-1}(t), ..., x_{k-1}^{(m-1)}, \lambda_{k-1}) \ , \tag{63}$$

знаходимо нев'язку

$$\varepsilon_k(t) = \vartheta_k(t) - u_{k-1}(t) \ . \tag{64}$$

Обчислюємо компоненти вектора $b_k = (b_0^k, b_1^k, ..., b_n^k)$

$$b_i^k = \varepsilon_k(t_i), \ i = \overline{o,n} \ . \tag{65}$$

Далі складаємо систему рівнянь

$$\Lambda a_k = b_k \ , \tag{66}$$

і знаходимо її розв'язок

$$a_k = \Lambda^{-1} b_k = (a_0^k, a_1^k, ..., a_n^k) \ . \tag{67}$$

Для знаходження $x_k(t)$, λ_k потрібно побудувати функцію

$$u_k(t) = \vartheta_k(t) + \sum_{j=0}^{n} a_j^k \xi_j(t) \ , \tag{68}$$

і розв'язати задачу

$$(Ax_k)(t) + b(t)\lambda_k = u_k(t) \ , \tag{69}$$

$$U_s(x_k) = \gamma_s, \quad \Phi_r(x_k) = \nu_r, \quad s = \overline{0, m-1}, r = \overline{1,l} \ . \tag{70}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1968. - 244 с.
2. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. - 262 с.

3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. - 288 с.

4. Поселюжна В.Б. Достатні умови збіжності модифікованого колокаційно-ітеративного методу для рівнянь з малою нелінійністю //Вісник Запорізького державного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. - 2000.-№2.-С.115-119.

5. Поселюжна В.Б. Про достатні мови збіжності модифікованого колокаційно-ітеративного методу для нелінійних рівнянь //Нелінійні коливання. - 2002.-**5**, № 1.-С.66-76.

УДК 539.3

СТАТИЧНА ЗАДАЧА НЕЗВ'ЯЗНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО СТРИЖНЯ

Ткаченко І.Г., старший викладач

Запорізький національний університет

У статті розв'язується задача про визначення температури, напружень та переміщень точок складеного стрижня. Методика розв'язання ґрунтується на аналозі методу функцій податливості у випадку одновимірної термопружності. Побудовано графіки функцій температури та переміщень для двоскладеного стрижня.

Ключові слова: складений стрижень, температура, напруження, константа податливості.

Ткаченко И.Г. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье решается задача об определении температуры, напряжений и перемещений точек составного стержня. Методика решения базируется на аналоге метода функций податливости в случае одномерной термоупругости. Построены графики функций температуры и перемещений для двусоставного стержня.

Ключевые слова: составной стержень, температура, напряжения, константа податливости.

Tkachenko I.G. THE STATIC PROBLEM OF THE STATIONARY THERMOELASTICITY FOR THE COMPOSITE ROD / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The problem, connected with the finding of the temperature, the stresses and the shifts of the points of the composite rod, is solved in this article. The analog of the compliance function technique in the case of one-dimensional thermoelasticity is used. The plots of the temperature function and the function of the shifts for the case of the double part rod are built.

Key words: composite rod, temperature, stresses, constant of compliance.

ВСТУП

Останнім часом теорія термопружності отримала істотній розвиток у зв'язку з потребами виробництва (розробка нових конструкцій парових турбін, ракетних двигунів; експлуатація об'єктів при високих температурах). Тому при розрахунках різного роду конструкцій потрібно враховувати вплив температур. Найбільш простий математичний апарат використовується при розв'язанні задач про визначення термо-напружено-деформівного стану тонких стрижнів або пластин. Вісесиметрична термопружна задача про напруження в тонкому стрижні скінченної довжини розглядається в роботі [1]. Вивчається випадок круглого циліндричного стрижня при постійній температурі. Також досліджено випадок довільно заданого температурного поля та стрижень змінного перерізу. Аналіз квазістатичної деформації тонкого однорідного стрижня при нагріванні з теплопередачею через границю контакту провадиться в статті [2]. Для розв'язання застосовується метод скінченних елементів. У монографії [3] за допомогою комплексного аналізу описуються методи аналітичного розв'язку двовимірних задач плоскої деформацій та плоского напруженого стану при довільних об'ємних силах, температурах поля й термопружних напружень, напруженого стану в складених середовищах, поперечного згину плит, скруту й поперечного згину призматичних ізотропних та ортотропних стрижнів. Робота [4] присвячена одновимірній нестаціонарній задачі термопружності для напівнескінченного стрижня у випадку, коли на його границі задано тепловий потік або температура у вигляді дельта-функцій Дірака. Розв'язок задачі представляється степеневими рядами за малим параметром. Огляд наукових праць з розробки класичних і уточнених моделей термомеханічної поведінки тонкостінних одно- і багатошарових елементів із в'язкопружних матеріалів із урахуванням температурної залежності властивостей, фізичної та геометричної нелінійностей наведено в [5]. Викладено методи розв'язання нелінійних зв'язаних задач