6. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.

7. Псиола З.Г., Розендорн Э.Р., Трофимов В.В. Нелинейная экономическая динамика // Фундаментальная и прикладная математика – Т. 3. – № 2. – М.:ЦНИТ, 1997. – С. 319–349.

8. Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – Т. 5. – 2002. – С. 54-86.

9. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 681 с.

10. Назаренко А. М., Васильев А. А. Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом // Физико-математическое моделирование и информационные технологии. – Вып. 4. – 2006. – С. 158-168.

11. Полянин А. Д., Ранжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: «Факториал», 1998. – 432 с.

12. Wooldridge J. Econometric Analisys of Cross Section and Panel Data. – London: MIT Press, 2000. – 735 p.

13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учебное пособие для вузов Изд. 3-е, доп., перераб. – М.: «Бином», 2004. – 632 с.

14. http://epp.eurostat.cec.eu.int.

УДК 519.862:330.43

МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ І РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ У КЛАСІ ГНУЧКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ФОРМ

Назаренко О.М., к.ф.-м.н., доцент, Карпуша М.В., студент

Сумський державний університет

Розглянуто клас гнучких функціональних форм, що застосовуються в економетричному моделюванні для дослідження ефектів другого порядку та апроксимації залежності показників від факторів зі значною варіацією. Особливу увагу приділено моделям транслогарифмічних регресій. Проведені регресійний аналіз побудованих моделей та порівняння з класичними регресіями (лінійною та логарифмічно-лінійною). Усі моделі та методи апробовані на крос-секційних даних і даних часових рядів реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: ефекти першого (другого) порядку, регресійний аналіз, гнучка функціональна форма, специфікація, ідентифікація, транс-логарифмічна регресія, RESET-тест, крос-секційна вибірка.

Назаренко А.М., Карпуша М.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В КЛАССЕ ГИБКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМ / Сумской государственный университет, Украина.

Рассмотрен класс гибких функциональных форм, которые используются в эконометрическом моделировании для исследования эффектов второго порядка и аппроксимации зависимости показателей от факторов, имеющих значительную вариацию. Особое внимание уделено моделям транс логарифмических регрессий. Проведены регрессионный анализ построенных моделей и их сравнение с классическими регрессиями (линейной и логарифмически линейной). Все модели и методы апробированы на кросс-секционных данных и данных временных рядов реальных макроэкономических систем.

Ключевые слова: эффекты первого (второго) порядка, регрессионный анализ, гибкая функциональная форма, спецификация, идентификация, транс логарифмическая регрессия, RESET-тест, кросс-секционная выборка.

Nazarenko O.M., Karpusha M.V. SECOND-ORDER EFFECTS MODELING AND REGRESSION ANALYSIS IN A CLASS OF FLEXIBLE FUNCTIONAL FORMS / Sumy State University, Ukraine.

We have been considered a class of flexible functional forms used in econometric modeling for second-order effects investigation and approximation of the explained variable over a substantial variation of the explanatory variables. A special attention has been devoted to trans-logarithmic regression models. The regression analysis has been performed and the obtained models have been compared with the classical regressions (linear and logarithmic linear). All models and methods have been approbated using cross-sectional and time-series dataset of real macroeconomic systems.

Key words: first- or second-order effects, regression analysis, flexible functional form, specification, identification, trans-logarithmic regression, RESET-test, cross-sectional sample.

Однією з ключових проблем математичного моделювання є раціональний вибір функціональних форм. Як правило, головними критеріями специфікації моделей є легкість і адекватність статистичної інференції (оцінювання параметрів, перевірки гіпотез тощо), високі імітаційні властивості та можливість використання для виявлення різного роду ефектів, притаманних досліджуваній системі [1-3]. Серед останніх зазвичай розрізняють ефекти першого і другого порядку в залежності від порядку похідних, присутніх у функціях, що їх описують [4]. Такі ефекти особливо широко застосовуються в економіко-математичному моделюванні [5]. Проте класичні функціональні форми (лінійна, логарифмічно-лінійна, напівлогарифмічна, Канторовича, Леонтьєва) дозволяють досліджувати лише ефекти першого порядку (факторна еластичність, еластичність масштабу тощо) і не застосовуються для моделювання ефектів другого порядку (еластичність заміщення, закон Госсена теорії споживання, закон Тюнена теорії виробництва тощо) [6, 7]. Так, наприклад, усі класичні функціональні форми відносяться до класу функцій з постійною еластичністю заміщення. Із цього також випливає, що чим більше виражені ефекти другого порядку в системі, тим гірша буде якість оціненої класичної моделі.

Розв'язання зазначених проблем започатковано в іноземній економетричній літературі [8, 9] і майже не зустрічається у вітчизняних джерелах. Тому метою даної роботи є узагальнення сучасного досвіду використання функціональних форм, що дозволяють моделювати ефекти другого порядку, дослідження сфери їх застосування та зв'язку із класичними формами. Згідно з традицією, започаткованою в іноземній літературі [4, 10, 11], функціональні форми даного класу називаються гнучкими (flexible), або VES-формами, тобто формами зі змінною еластичністю заміщення (variable elasticity of substitution).

Структура даної роботи є такою. У першій частині наведена математична постановка задачі. Друга частина присвячена використанню гнучких функціональних форм для моделювання ефектів другого порядку та проведенню регресійного аналізу для порівняння різних функціональних форм. Результати чисельного експерименту наводяться в третій частині. Показана ефективність гнучких функціональних форм у прикладних дослідженнях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Будь-яка класична функціональна форма $f(\mathbf{x})$, яка використовується на практиці і піддається лінеаризації за параметрами, може бути подана у вигляді

$$h(f(\mathbf{x})) = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)'$ – вектор-стовпець факторів, a_0 і $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)'$ – невідомі параметри, $h(\cdot)$ і $\mathbf{g}(\cdot)$ – деякі функції лінеаризації [2, 3]. Так, наприклад, для логарифмічно-лінійної форми $h(f(\mathbf{x})) = \ln(f(\mathbf{x}))$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ln(\mathbf{x})$, а для напівлогарифмічної – $h(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ln(\mathbf{x})$ або $h(f(\mathbf{x})) = \ln(f(\mathbf{x}))$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Найвідомішим ефектом, який дозволяють моделювати функції виду (1), є еластичність масштабу [6]

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}}{f(\mathbf{x})}, \tag{2}$$

що, як видно, є ефектом першого порядку.

Ефект другого порядку, такий, як еластичність заміщення [7]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}\left(x_i/x_j\right)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{x_i/x_j}, \quad i, j = 1, 2, ..., m \tag{3}$$

для функцій типу (1) є сталою величиною при будь-якому значенні аргументу ($\sigma_{ij} = \infty$ відповідає лінійній функціональній формі, $\sigma_{ij} = \pm 1$ – логарифмічно-лінійній).

Отже, задача полягає в специфікації функціональної форми $f(\mathbf{x})$ показника y так, щоб:

а) статистичну інференцію регресійної моделі $y = f(\mathbf{x}) + u$ можна було провести в рамках лінійного регресійного аналізу;

б) коефіцієнт детермінації R^2 оціненої моделі був статистично більший, ніж у моделях типу (1);

в) еластичність заміщення σ_{ij} була змінною величиною.

2. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

Для специфікації функціональної форми $f(\mathbf{x})$ регресійної моделі в роботі використовується поліноміальна апроксимація функції $f(\mathbf{x})$ або її аналога у вигляді ряду Тейлора в околі деякої точки. Ефекти другого порядку досліджуються на прикладі еластичності заміщення. Методами регресійного аналізу гнучкі функціональні форми порівнюються з класичними.

2.1. ГНУЧКІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ ФОРМИ. ЕФЕКТИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Будь-яка функція $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, неперервно диференційована задану кількість раз, може бути подана її поліноміальною апроксимацією за допомогою розкладання в ряд Тейлора в околі точки $\mathbf{x}_0$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_0'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' H\big|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + ..., \tag{4}$$

де $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_0'}$ – вектор-градієнт функції $f(\mathbf{x})$, $H\big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_0' \partial \mathbf{x}_0}$ – матриця Гессе функції $f(\mathbf{x})$, обчислена в точці $\mathbf{x}_0$.

Згрупувавши множники при $\mathbf{x}$ у формулі (4), отримаємо

$$f(\mathbf{x}) = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'A\mathbf{x} + ..., \tag{5}$$

$$a_0 = f(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_0}\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_0' H\big|_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}_0, \; \mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_0'} - H\big|_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}_0, \; A = (a_{ij})_{i,j=1,m} = H\big|_{\mathbf{x}_0}. \tag{6}$$

Якщо розглянути лише лінійний член розкладу (5), то отримаємо лінійну регресійну модель

$$y = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x} + u, \tag{7}$$

де u – випадкове збурення, яке, окрім іншого, також включає залишковий член розкладу (5). Функціональна частина такої моделі – окремий випадок класичної функціональної форми (1).

Тепер розглянемо рівняння регресії $\ln y = \ln f(\mathbf{x}) + u$. Якщо покласти $\ln f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ і $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\ln \mathbf{x}}$, то розкладання функції $h(\ln \mathbf{x})$ з точністю до лінійного члена призведе до іншої відомої регресійної моделі

$$\ln y = a_0 + \mathbf{a}'\ln \mathbf{x} + u, \tag{8}$$

функціональна форма якої називається логарифмічно-лінійною, або типу Кобба-Дугласа, яка також є окремим випадком класичної функціональної форми (1).

Звісно, лінійна апроксимація функціональної форми буде адекватною лише для регресій з незначною варіацією аргументу $\mathbf{x}$. Як показує практика, зі збільшенням варіації аргументу ефекти другого порядку в даній системі збільшуються. Для подолання цих проблем пропонується розглянути розкладання функції $f(\mathbf{x})$ або її аналога з точністю до квадратичного члена. Слід очікувати, що присутність матриці Гессе зробить $f(\mathbf{x})$ більш „гнучкою”, звідки й походить назва таких функціональних форм.

Враховуючи (5), (6), квадратична регресійна модель набуває вигляду:

$$y = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'A\mathbf{x} + u. \tag{9}$$

Використовуючи підхід, аналогічний тому, що був застосований для виводу функції типу Кобба-Дугласа, отримаємо таку регресійну модель:

$$\ln y = a_0 + \mathbf{a}'\ln\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\ln\mathbf{x})' A(\ln\mathbf{x}) + u\ . \tag{10}$$

Модель (10) називають транслогарифмічною (transcendental logarithmic), або коротко translog-моделлю [2, 4]. Очевидно, при $A = 0$ модель (10) стає логарифмічно-лінійною.

Нелінійним аналогом моделі (8) є мультиплікативна форма типу Кобба-Дугласа

$$y = e^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} e^u\ . \tag{11}$$

Експонуючи обидві частини виразу (10), можна отримати нелінійний аналог транслогарифмічної функціональної форми:

$$y = e^{a_0} x_1{}^{a_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}^{(1)}\ln\mathbf{x}}\, x_2{}^{a_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}^{(2)}\ln\mathbf{x}} \cdots x_m{}^{a_m + \frac{1}{2}\mathbf{a}^{(m)}\ln\mathbf{x}}\, e^u\ , \tag{12}$$

де $\mathbf{a}^{(j)}$ – j -й рядок матриці A .

Дослідимо деякі ефекти першого і другого порядку для квадратичної та транслогарифмічної функціональних форм.

Враховуючи формулу (2), для еластичності масштабу квадратичної регресії (9) отримуємо вираз

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{x} + \mathbf{x}'A\mathbf{x}}{a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'A\mathbf{x}}\,,$$

який, на відміну від еластичності масштабу лінійної регресії (7), при $a_0 = 0$ тотожно не дорівнює одиниці.

Розрахунок еластичності масштабу для транс-логарифмічної регресії (12) за формулою (2) ускладнюється труднощами, пов'язаними з обчисленням часткових похідних функції (12). Тому формулу (2) подамо у вигляді

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln \mathbf{x}}\mathbf{i}\,, \tag{13}$$

де $\mathbf{i} = (1, 1, ..., 1)'$ – вектор розмірності m. Тоді еластичність масштабу для транслогарифмічної регресії (12) дорівнює

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}A\ln\mathbf{x}\right)'\mathbf{i}\,,$$

яка, на відміну від еластичності масштабу для логарифмічно-лінійної регресії (8), не є сталою величиною.

Далі розглянемо один з найпоширеніших на практиці ефектів другого порядку – еластичність заміщення. Формула (3) розрахунку еластичності заміщення є скоріше теоретичною, адже виражає фізичний зміст цієї величини. Знайшовши повні диференціали по x_i і x_j у (3), вираз для еластичності заміщення можна записати в більш зручному для використання на практиці вигляді:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + x_j x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{x_i x_j} \frac{H^*_{i+1\, j+1}}{\det\left(H^*\right)}\,, \tag{14}$$

де H^* – блочна матриця, що дорівнює

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & x_i \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ x_i \dfrac{\partial f}{\partial x} & H \end{bmatrix},$$

$H^*_{i+1\, j+1}$ – алгебраїчне доповнення елемента $(i+1,\ j+1)$ матриці H^*. Формула (14) називається формулою часткової еластичності заміщення за Алленом [7] і є більш наочною для ефекту другого порядку через те, що в ній явно присутні другі похідні функції $f(\mathbf{x})$.

Оскільки $\det\left(H^*\right)$ стоїть у знаменнику виразу (14), дослідимо, у яких випадках він буде дорівнювати нулю. Відомо [12], що детермінант матриці H^* можна обчислити через білінійну форму приєднаної матриці, тобто транспонованої матриці алгебраїчних доповнень базової матриці [13]. У нашому випадку білінійна форма стає звичайною квадратичною формою

$$\det(H^*) = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} H^{\#} x_i \frac{\partial f}{\partial x'},$$

де $H^{\#}$ – приєднана матриця матриці Гессе H. Оскільки квадратична форма приєднаної матриці може дорівнювати нулю лише, коли $\det(H) = 0$ [12], то робимо висновок, що $\det\left(H^*\right) = 0$ лише для лінійної моделі (7). Функціональні форми (8)-(10) виключають таку ситуацію.

Розглянемо важливий випадок формули (14) для $m = 2$ і $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, де ε_j – еластичність функції $f(\mathbf{x})$ за j-м фактором ($j = 1, 2$). У такому випадку еластичність заміщення може бути виражена через факторні еластичності функції $f(\mathbf{x})$ за формулою

$$\sigma_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\det(E)}, \tag{15}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_1} = a_1 + a_{11} \ln x_1 + a_{12} \ln x_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_1} = a_2 + a_{12} \ln x_1 + a_{22} \ln x_2,$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & a_{11} + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 & a_{12} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & a_{12} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 & a_{22} + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

2.2. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ГНУЧКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ФОРМ

Квадратична модель (9) та транслогарифмічна у вигляді (10) є лінійними за параметрами. Це означає, що для статистичної інференції отриманих моделей можна використовувати класичний регресійний аналіз. Для оцінювання невідомих параметрів, зокрема, будемо використовувати метод найменших квадратів (МНК) для лінійних регресій. Сама процедура оцінювання відома і не викликає особливих труднощів.

Більш цікавим видається статистичне порівняння квадратичної (9) і транслогарифмічної регресії (10) з лінійною (7) і логарифмічно лінійною (8) відповідно. Для цього в роботі пропонується використовувати комплекс статистичних тестів: t-тест Стьюдента, F-тест Фішера і RESET-тест Рамсея.

За допомогою критерію Стьюдента [3] будемо перевіряти гіпотезу $H_0 : a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, ..., m$. Значущість окремих елементів матриці A буде означати значущість відповідних нелінійних доданків у квадратичній та транслогарифмічній формах.

Інший критерій, що часто використовується для перевірки значущості гнучких функціональних форм є тест Рамсея, який також називається RESET-тестом (regression specification error test) [2, 4]. Він полягає в аступному. Спочатку оцінюється класична модель (7) або (8) і знаходяться модельні значення $\hat{y}$ або $\ln\hat{y}$ показника. На другому етапі оцінюється одна з наступних допоміжних моделей:

$$y = a_0 + \mathbf{a}'\mathbf{x} + b_1 \hat{y}^2 + b_2 \hat{y}^3 + u \tag{16}$$

або

$$\ln y = a_0 + \mathbf{a}' \ln \mathbf{x} + b_1 (\ln \hat{y})^2 + b_2 (\ln \hat{y})^3 + u. \tag{17}$$

Коефіцієнт детермінації R^2 допоміжної моделі (16) або (17) буде вищим за коефіцієнт детермінації R^2 відповідної класичної моделі. Далі за F-тестом [3] перевіряється значущість цього підвищення. Якщо R^2 збільшився значуще, робиться висновок про помилку специфікації класичної моделі та необхідність включення нелінійних членів.

F-тест також може бути застосований самостійно. Для цього окремо оцінюються дві пари моделей: (7) і (9) та (8) і (10). Для кожної з класичних і гнучких регресій обчислюються коефіцієнти детермінації R^2_{clas} і R^2_{flex} відповідно. Далі для перевірки гіпотези $H_0 : R^2_{\text{flex}} > R^2_{\text{clas}}$ обчислюється F-значення критерію Фішера за формулою

$$F = \frac{R^2_{\text{flex}} - R^2_{\text{clas}}}{1 - R^2_{\text{flex}}} \frac{n-l}{l-m-1},$$

де l – число невідомих параметрів у гнучкій функціональній формі (9) або (10). Порівнюючи критичне значення $F_{\text{cr}}(l-m-1, n-l)$ критерію з отриманим F-значенням, робиться висновок про значущість підвищення коефіцієнта детермінації R^2_{flex} по відношенню до R^2_{clas}.

У наведених вище тестах можуть використовуватися як звичайні, так і скореговані коефіцієнти детермінації. Як показує практика [1, 11], зазвичай це не впливає на результат тесту. Для кожної з регресій за допомогою F-тесту також будемо перевіряти гіпотезу про значущість моделі в цілому [3].

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для порівняння гнучких функціональних форм (9), (10) з їх класичними аналогами (7), (8) та дослідження еластичності заміщення в даній роботі пропонується використовувати дані макроекономічного розвитку реальних систем. Як показник y обрано валовий внутрішній продукт країни (ВВП). Вектор **x** специфікований двома факторами: x_1 – чисельність працівників та x_2 – чистий експорт. Саме такий набір факторів, на наш погляд, є найбільш вдалим для демонстрації гнучких функціональних форм. Причина в тому, що саме ці фактори мають значну варіацію і при цьому статистично значуще впливають на ВВП. З цих же міркувань пропонується обробляти саме крос-секційну інформацію, а не часовий ряд [14].

У таблиці 1 наводяться результати МНК-оцінювання та регресійного аналізу моделей (8)-(10) для крос-секції об'єму $n = 32$. (Як об'єкти обрано 32 європейські країни у 2000 році.) Оскільки чистий експорт може набувати від'ємних значень, дані по x_2 коригуються на константу „зсуву" [1]. Також для зручності всі дані нормовані відносно найменшого значення відповідної змінної.

Усі статистичні критерії застосовуються при рівні значущості $\alpha = 0.05$. Як видно з таблиці 1, гнучкі функціональні форми (9), (10) у цілому кращі в порівнянні з класичними (7), (8). За F-тестом коефіцієнти детермінації всіх регресій виявляються статистично значущими, хоча при цьому всі коефіцієнти транслогарифмічної регресії (10) є статистично незначущими. F-тест також підтверджує значущість підвищення коефіцієнтів детермінації гнучких регресій у порівнянні з класичними.

Таблиця 1 - Результати регресійного аналізу для моделей (8)-(10)

Показники регресійних моделей		Лінійна	Логарифмічно-лінійна	Квадратична	Транс-логарифмічна
МНК-оцінка коефіцієнта та її стандартна помилка	a_0	-26.2934 (10.8829)	-0.0934 (0.2574)	-11.6751 (11.9059)	0.3645 (0.3205)
	a_1	1.3578 (0.1643)	0.5347 (0.1160)	0.4795 (0.4129)	0.3760 (0.2941)
	a_2	0.5959 (0.1848)	0.5139 (0.0951)	1.0731 (0.4330)	-0.0522 (0.2322)
	a_{11}	–	–	-0.0089 (0.0061)	0.0153 (0.1750)
	a_{12}	–	–	-0.0134 (0.0067)	0.1836 (0.1514)
	a_{22}	–	–	0.0094 (0.0041)	0.0466 (0.1314)
Коефіцієнт детермінації R^2		0.8783	0.8772	0.9186	0.9247
Скоригований коефіцієнт детермінації $\overline{R}^2$		0.8699	0.8687	0.9030	0.9102
F-значення для R^2		104.6887	103.5620	146.7998	159.6974
F-значення для ΔR^2		–	–	4.2937	5.4734
F-значення для RESET-тесту		7.4461	4.8096	–	–

RESET-тест підтвердив той факт, що специфікація моделі класичними функціональними формами (7), (8) є неадекватною і нелінійність за змінними в регресії є необхідною для апроксимації вихідних даних.

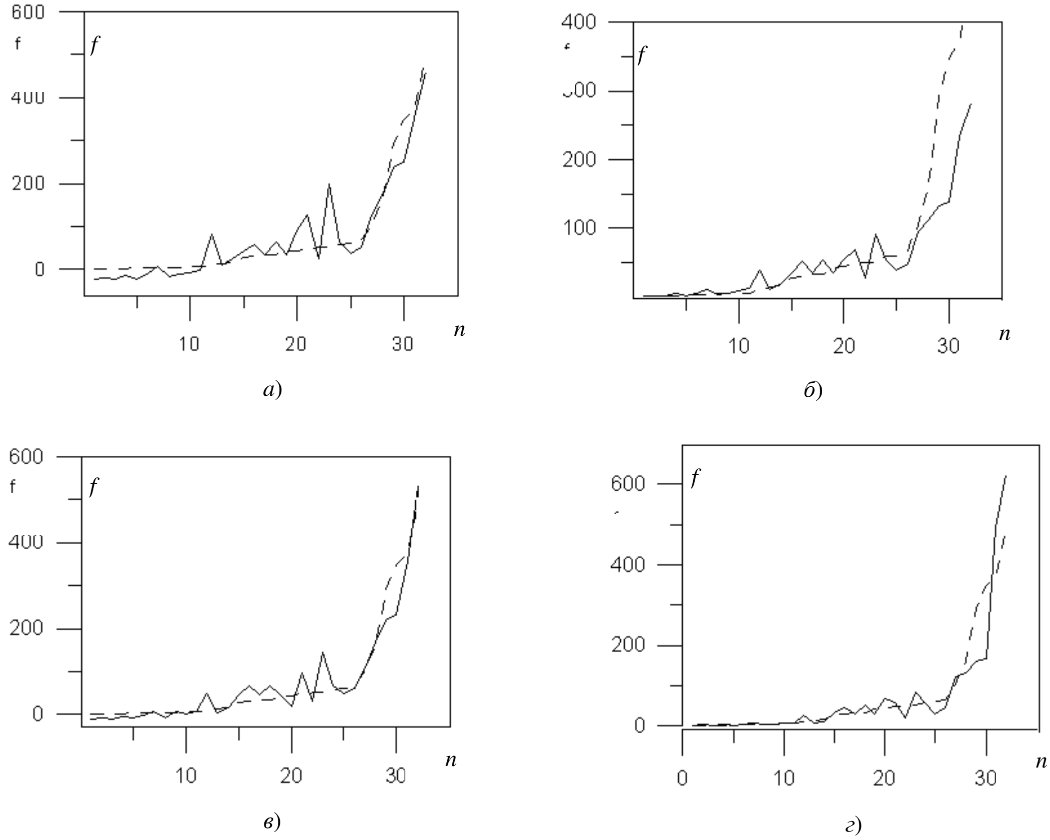

Рис. 1. Результати апроксимації показника за регресією:
а) лінійною; *б*) лінійно-логарифмічною; *в*) квадратичною; *г*) транс логарифмічною

Рис. 1 підтверджує той факт, що лінійна (*а*) та лінійно-логарифмічна (*б*) регресії є неадекватними для опису ВВП при крос-секційних даних. У подібних випадках найкращою є транслогарифмічна регресія (*г*); для неї варіації у вхідних даних мають найменший вплив на результат .

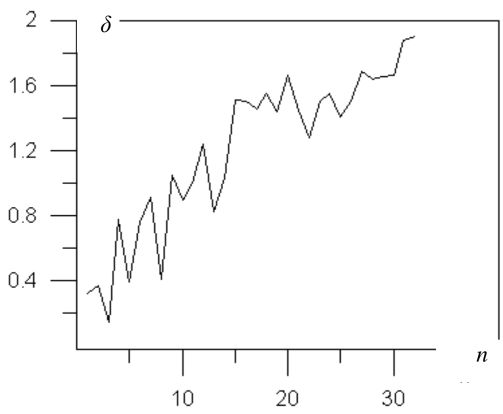

Рис. 2. Еластичність заміщення для крос-секційних даних

На рис.2 зображено графік, що характеризує еластичність заміщення факторів (x_1 –кількість працюючих, x_2 – чистий експорт). Як бачимо, ефект другого порядку не має сталого значення і змінюється від 0.2 до 1.9. Це означає, що для вибраних крос-секційних даних, де еластичність заміщення виявилася змінною, краще використовувати гнучкі форми.

4. ВИСНОВКИ

У роботі проведено аналіз гнучких функціональних форм у вигляді квадратичної та транслогарифмічної регресій та їх порівняння з класичними лінійною та лінійно-логарифмічною формами. Досліджено показник еластичності заміщення як ефект другого порядку. Виявилося, що гнучкі функціональні форми більш придатні для апроксимації показника зі значною варіацією аргументу. Саме такі результати були отримані на основі вивчення статистичних даних макроекономічного рівня крос-секційного характеру. За допомогою транслогарифмічної регресії моделюється еластичність заміщення для ряду макроекономічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х кн. Кн. 1/ Пер. с англ. – 2-е изд., пере раб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.
2. Guajarati. Basic Econometrics, Fourth Edition. – The McGraw-Hill Companies, 2004.
3. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.
4. Greene W. H. Econometric analysis, Fifth Editional. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003.
5. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005. – 295 с.
6. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
7. Chiang A.C. Fundamental Methods of Mathematical Economics, Third Edition. – New York: McGraw Hill, 1984. – 788 pp.
8. Christensen L.R., Jorgenson D.W., Lau L.J. Transcendental Logarithmic Production Frontiers. The Review of Economics and Statistics, no. 55-1, 1973. – pp. 28-45.
9. Berndt E.R., Christensen L.R. The Translog Function and the Substitution for Equipment, Structures, and Labour in U.S. Manufacturing 1929-68. // Journal of Econometrics, no. 1, 1973. – pp. 81-114.
10. Wooldridge J. Introductory Econometrics: A Modern Approach. — New York: Southwestern Publishers, 2000. — 805 p.
11. Wooldridge J. Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. – London: MIT Press, 2000, 735 p.
12. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. Пер. с англ./ Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
14. European Statistics Database: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/.

УДК 519.711.3:519.86

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ ПОБУДОВИ ДЕСКРИПТИВНИХ ТА ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Назаренко О.М., к.ф.-м.н., доцент, Фільченко Д.В., аспірант

Сумський державний університет

Запропоновано підходи до специфікації дескриптивних моделей динамічних систем з невідомими та відомими вхідними сигналами. Розроблено алгоритми ідентифікації з високими імітаційними та прогнозними властивостями. Представлено принцип переходу від дескриптивних до оптимізаційних моделей (динамічних та статичних). Усі підходи апробовані на реальних статистичних даних еволюції макроекономічної системи відкритого типу. Результати чисельного експерименту продемонстрували високу точність, адекватність та практичну цінність побудованих моделей.

Ключові слова: динамічна система, дескриптивна модель, оптимізаційна модель, специфікація, ідентифікація, регулятор, обернений зв‘язок.

Назаренко А.М., Фильченко Д.В. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕСКРИПТИВНЫХ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ / Сумской государственный университет, Украина.

Предложен подход к спецификации дескриптивных моделей динамических систем с неизвестными и известными входными сигналами. Разработаны алгоритмы идентификации с высокими