УДК 519.711.3:519.86

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ

Назаренко А. М., к. ф.-м. н., доцент; Васильев А. А., аспирант

Сумской государственный университет

В работе поставлена и решена задача идентификации неизвестных параметров динамической системы градиентного типа по данным реально наблюдавшейся динамики некоторых показателей в дискретные моменты времени на ограниченном промежутке. Для этого предложен итерационный алгоритм, который заменяет исходно нелинейную постановку задачи последовательностью линейных задач и использует принцип обратной связи. Апробация предложенного подхода в макроэкономическом моделировании показала высокие аппроксимационные и прогнозные свойства построенных моделей.

Ключевые слова: динамическая система, идентификация, обратная связь, модель градиентного типа.

Назаренко О.М., Васильєв А.О. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ У МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ ГРАДІЄНТНОГО ТИПУ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ / Сумський державний університет, Україна.

У роботі поставлена й розв'язана задача ідентифікації невідомих параметрів динамічної системи градієнтного типу за даними динаміки, що реально спостерігалася, деяких показників у дискретні моменти часу на обмеженому проміжку. Для цього запропонований ітераційний алгоритм, що заміняє вихідну нелінійну постановку задачі послідовністю лінійних задач і використовує принцип зворотного зв'язку. Апробація запропонованого підходу в макроекономічному моделюванні показала високі апроксимаційні й прогнозні властивості побудованих моделей.

Ключові слова: динамічна система, ідентифікація, зворотний зв'язок, модель градієнтного типу.

Nazarenko A.M., Vasil'ev A.A. PARAMETERIZATION OF DYNAMIC MODEL OF THE GRADIENT TYPE BY OBSERVATIONS / Sumy State University, Ukraine.

In this paper there has been studied a gradient-type model, which is nonlinear in parameters. For the purposes of solution of the problem of identification, based on data of actually observed dynamics of a set of parameters in discrete moments within some time span, there has been suggested an iteration algorithm, which replaces the definition of the problem as an initially nonlinear one with a sequence of linear problems and uses the principle of feedback. An approbation test of the offered approach on a real-world macroeconomic system has shown its high approximation and predictive properties.

Key words: dynamic system, identification, feedback, model of the gradient type.

В последнее время значительно возрос интерес к различным аспектам теории идентификации систем, который проявляется в увеличении количества публикаций и изучении ряда сопряженных вопросов во многих университетских курсах. Интерес к этой проблеме вызван, очевидно, широким кругом ее применения: от изучения технологических процессов [1], различных физических [2] и биологических [3] систем до необходимости повышения качества функционирования реальных систем [4].

Особенно широкое применение теория идентификации нашла в моделировании экономических процессов. Изучение последних обычно проводится в рамках эконометрических методов [5], которые позволяют использовать лишь линейные или трансцендентные одномерные модели. При этом основное внимание в них уделяется объяснению поведения результирующего показателя при влиянии на него выбранных факторов, через хорошо разработанный аппарат оценивания неизвестных параметров. Однако известно, что характер поведения реальных систем носит комплексный нелинейный характер, т.е. для повышения адекватности конструируемых моделей необходимо рассматривать не только более сложный вид зависимостей, но и постулировать, что взаимодействие происходит между всеми элементами данной системы.

Изучить внутрисистемные взаимодействия и характеристики позволяет теория систем и, в частности, теория автоматического управления. В случае точно определенных функциональных зависимостей между элементами некоторой системы, благодаря широким возможностям методов математического моделирования и современной вычислительной техники, анализ ее динамических и точностных характеристик значительно упрощается [6]. Однако во многих прикладных исследованиях имеется лишь статистическая информация о динамике составляющих изучаемой системы, т.е. неизвестны не только ее параметры, но и вид функциональных зависимостей. Задачи в такой постановке мало изучены и очевидна нехватка работ, посвященных построению адекватных моделей на базе апостериорной информации, которые бы позволили перенести аппарат теории систем на многие реальные процессы.

Таким образом, актуальной задачей является объединение известных подходов в теории математического моделирования с эконометрическими методами, что приведет к взаимообогащению этих наук и созданию общей теории систем, применимой к физическим и социальным объектам.

Цель настоящей работы заключается в исследовании динамических характеристик и разработке подхода к оцениванию неизвестных параметров в моделях градиентного типа по данным статистических наблюдений за изучаемым процессом.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

Широкий класс задач математического моделирования физических и экономических процессов может быть сведен к виду градиентных или гамильтоновых систем [4, 7]. Однако в указанных работах приводится лишь постановочная часть и исследуются некоторые характеристики динамических систем, что не позволяет применить их для моделирования реальных объектов.

В работе [8] рассматривается более широкий класс моделей – системы градиентного типа. Пусть V – открытое подмножество евклидового пространства R^n, $f(\mathbf{x})$ – гладкая функция, определенная на V и принимающая вещественные значения ($f(\mathbf{x})$ можно называть потенциальной функцией). Если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – декартова система координат в R^n, то положим

$$\mathbf{grad}\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)' .$$

Систему из дифференциальных уравнений и потенциальной функции будем называть системой градиентного типа, если она имеет вид

$$\begin{cases} y = f(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}} = U(t)\,\mathbf{grad}\; f(x), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор фазовых координат размерности m, $U(t) = \mathrm{diag}(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ – матричная функция, компоненты которой служат для преобразования параметров градиентной поверхности в пространство скоростей, а содержательная интерпретация зависит от конкретного изучаемого процесса. Система (1) относится к классу моделей «вход-выход», структурная схема которой представлена на рис. 1. Ее особенностью является универсальный вид записи функциональных соотношений внутрисистемных взаимодействий и модель (1) может быть применена для любой реальной системы, в которой присутствует четкая направленность (положительная или отрицательная) влияния компонент вектора $\mathbf{x}$ на выход y. Если рассматривать $f(\mathbf{x})$ как функцию цели, то модель (1) можно использовать для моделирования физических процессов и систем с наличием между их элементами антагонистического или кооперативного поведения в рамках математической теории позиционных дифференциальных игр.

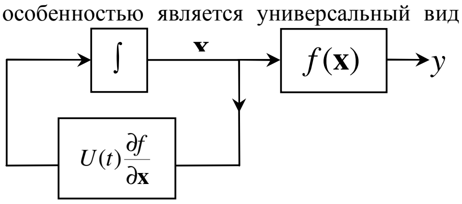

Рис. 1. Структурная схема системы градиентного типа

Если предположить, что выход изучаемого процесса достаточно гладкий, то в качестве функции $f(\mathbf{x})$ можно выбрать

$$f(\mathbf{x}) = g_0 + \mathbf{x}'\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}'P\,\mathbf{x}\,, \tag{2}$$

а дифференциальные связи системы (1) примут вид

$$\dot{\mathbf{x}} = U(t)\,(\mathbf{p}_0 + P\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{3}$$

Если все параметры в (2), (3) известны, то решение может быть получено аналитически. Используя аппарат функций от матриц и его применение к интегрированию систем однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, искомое решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{UP(t-t_0)}(\mathbf{x}_0 + P^{-1}\mathbf{p}_0) - P^{-1}\mathbf{p}_0, \\ y(t) &= g_0 + \mathbf{x}'\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{x}'P\,\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Найденное решение (4) значительно упрощает анализ исследуемых величин, однако и накладывает ограничения на исходные статистические данные. Для того чтобы (4) адекватно отражало динамику изучаемой системы, исходные данные должны быть достаточно гладкими и, желательно, в среднем монотонными. Макроэкономические показатели (вследствие своей высокой степени агрегирования и инертности), как правило, соответствуют указанным требованиям, что дает возможность использования модели (2), (3) для исследования макроэкономической динамики.

Известно, что построение математической модели реальных процессов и систем базируется на анализе статистической информации о функционировании ее элементов, на основе которого проводится спецификация модели. Однако задача идентификации параметров систем градиентного типа, даже в случае модели (2), (3) нетривиальна, поскольку, по постановке, они нелинейны по параметрам и применить аппарат обычного регрессионного анализа не представляется возможным.

В работе [8] делается попытка адаптации систем градиентного типа к моделированию процессов, фазовые переменные которых наблюдаются в дискретные моменты на конечном промежутке времени. Здесь идентификация неизвестных параметров осуществляется через решение нелинейной транспортной задачи, что приводит к ряду трудностей вычислительного характера и не позволяет завершить построение модели. В [9] предложены два подхода для нахождения оценок неизвестных коэффициентов нелинейной по параметрам функции выхода: метод Гаусса и градиентный метод. Однако в случае системы (2), (3) параметры, подлежащие оцениванию, нелинейно входят в уравнения дифференциальных связей, что не позволяет применить указанные подходы.

В [10] функция выхода $f(\mathbf{x})$ ищется в классе функций, сводящихся к линейным по параметрам, и идентифицируется независимо от дифференциальных связей. Последние в каждый момент времени настраиваются на заданный выход с помощью матрицы $U(t)$, компонентами которой являются полиномы. Вместе с тем, дифференциальные связи также должны влиять на выход и необходимо рассматривать (2), (3) совместно. Поэтому в данной работе предлагается установление обратной связи между уравнениями движения (3) и выходом (2). Тогда уравнения движения будут управлять выходом и, наоборот, выход будет корректировать последние.

Известно, что любая система с обратной связью должна иметь три основных элемента: регулятор, динамическую систему и собственно обратную связь. Естественно выбрать в качестве динамической системы уравнения (2), (3) и из них определять оценки неизвестных параметров g_0, $\mathbf{p}_0$ и P. Если рассматривать $U(t)$ как управляемый параметр, то в качестве регулятора разумно выбрать (3), откуда следует определять возможные значения неизвестного $U(t)$. Тогда связав регулятор и динамическую систему с помощью обратной связи, получим замкнутую систему, схема функционирования которой представлена на рис. 2.

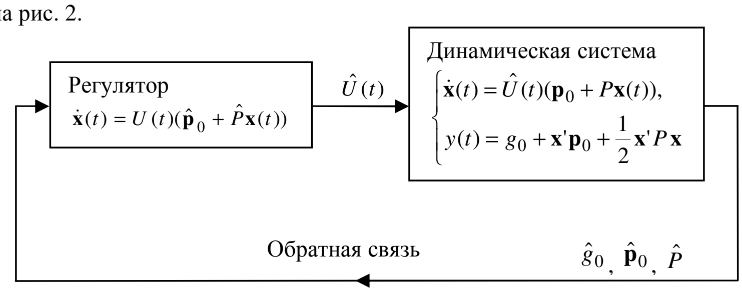

Рис. 2. Схема функционирования системы с обратной связью

Из рис. 2 видно, что установление описанной обратной связи между уравнением движения (3) и выходом (2) эквивалентно замене исходной нелинейной задачи идентификации последовательностью линейных задач. Преимущества такого подхода очевидны, так как в этом случае представляется возможным использование методов эконометрики [5].

2. ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Поставим и решим следующую задачу. На основании N+2 (t = 0, 1, 2, … , N+1) исходных статистических данных о динамике изменения m экономических показателей (вектор $\mathbf{x}(t)$ размерности m) и результирующего базового показателя (например, валового внутреннего продукта) необходимо идентифицировать неизвестные параметры модели (2), (3) и изучить ее дескриптивные и прогнозные свойства. В данной работе рассмотрен случай, когда матричная функция $U(t)$ кусочно-постоянна, причем разбиение исходного отрезка $t \in [0, N+1]$ на k отрезков $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, … , $[t_{k-1}, t_k]$, на которых компоненты матрицы $U(t)$ постоянны, задано заранее.

В указанной постановке известны лишь значения изучаемых величин в конкретные равноотстоящие моменты времени, причем их число сравнительно невелико, так как для проведения макроэкономических исследований, как правило, выбирается ежегодная статистическая информация. Для нахождения оценок неизвестных параметров предлагается использовать дискретный аналог (3), в котором расстояния между моментами измерений равно единице:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) + U(t)(\mathbf{p}_0 + P\mathbf{x}(t)), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \,. \tag{5}$$

С помощью аппарата разностных уравнений [11] для (5) получено точное решение, которое на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ постоянства матричной функции $U(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}_t = (E + UP)^{t-t_i}(\mathbf{x}_{t_i} + P^{-1}\mathbf{p}_0) - P^{-1}\mathbf{p}_0, \quad E = \mathrm{diag}(1,1,\dots,1) \,. \tag{6}$$

Равенство (6) позволяет легко проводить прогнозирование изучаемых показателей.

Учитывая принципы построения систем с обратной связью, описанные выше, в работе предлагается следующий итерационный алгоритм оценивания неизвестных параметров в (2), (3).

Шаг 1. Задаем начальные приближения для неизвестных элементов матрицы U.

Шаг 2. Идентификация параметров динамической системы. Оцениваем систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t = \Delta\mathbf{x}_t = U(\mathbf{p}_0 + P\mathbf{x}_t), \\ y_t = g_0 + \mathbf{x}_t'\mathbf{p}_0 + \dfrac{1}{2}\mathbf{x}_t' P\mathbf{x}_t, \quad t = 0, 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{7}$$

Для нахождения оценок константы g_0, вектора $\mathbf{p}_0$ и симметричной матрицы P в системе (7) используем метод, предложенный в [12], где (7) рассматривается как линейное регрессионное уравнение, матричная запись которого имеет вид

$$\mathbf{z} = W\mathbf{a}, \tag{8}$$

где $\mathbf{z} = (\Delta x_{10}, \ldots, \Delta x_{1N} \,|\, \Delta x_{20}, \ldots, \Delta x_{2N} \,|\ldots|\, \Delta x_{m0}, \ldots, \Delta x_{mN} \,|\, y_0, \ldots, y_N)'$ – вектор-столбец размерности $(N+1)(m+1)$, составленный из присоединенных векторов в левой части (7), $\mathbf{a} = (g_0, p_{01}, \ldots, p_{0m}, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{m\text{-}1m}, p_{mm})'$ – вектор-столбец размерности $(m+1)(m+2)/2$, составленный из записанных подряд неизвестных коэффициентов в (7), W – матрица размерности $((N+1)(m+1))\times((m+1)(m+2)/2)$, которая имеет вид

$$W = \begin{pmatrix}
0 & u_{10} & 0 & \cdots & 0 & u_{10}x_{10} & u_{10}x_{20} & \cdots & u_{10}x_{m0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & u_{11} & 0 & \cdots & 0 & u_{11}x_{11} & u_{11}x_{21} & \cdots & u_{11}x_{m1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & u_{1N} & 0 & \cdots & 0 & u_{1N}x_{1N} & u_{1N}x_{2N} & \cdots & u_{1N}x_{mN} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & u_{20} & \cdots & 0 & 0 & u_{20}x_{10} & \cdots & 0 & u_{20}x_{20} & u_{20}x_{30} & \cdots & u_{20}x_{m0} & \cdots & 0 \\
0 & 0 & u_{21} & \cdots & 0 & 0 & u_{21}x_{11} & \cdots & 0 & u_{21}x_{21} & u_{21}x_{31} & \cdots & u_{21}x_{m1} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & u_{2N} & \cdots & 0 & 0 & u_{2N}x_{1N} & \cdots & 0 & u_{2N}x_{2N} & u_{22}x_{3N} & \cdots & u_{2N}x_{mN} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & u_{m0} & 0 & 0 & \cdots & u_{m0}x_{10} & 0 & 0 & \cdots & u_{m0}x_{20} & \cdots & u_{m0}x_{m0} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & u_{m1} & 0 & 0 & \cdots & u_{m1}x_{11} & 0 & 0 & \cdots & u_{m1}x_{21} & \cdots & u_{m1}x_{m1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & u_{mN} & 0 & 0 & \cdots & u_{mN}x_{1N} & 0 & 0 & \cdots & u_{mN}x_{2N} & \cdots & u_{mN}x_{mN} \\
1 & x_{10} & x_{20} & \cdots & x_{m0} & 0.5x_{10}^2 & x_{10}x_{20} & \cdots & x_{10}x_{m0} & 0.5x_{20}^2 & x_{20}x_{30} & \cdots & x_{20}x_{m0} & \cdots & 0.5x_{m0}^2 \\
1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} & 0.5x_{11}^2 & x_{11}x_{21} & \cdots & x_{11}x_{m1} & 0.5x_{21}^2 & x_{21}x_{31} & \cdots & x_{21}x_{m1} & \cdots & 0.5x_{m1}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{mN} & 0.5x_{1N}^2 & x_{1N}x_{2N} & \cdots & x_{1N}x_{mN} & 0.5x_{2N}^2 & x_{2N}x_{3N} & \cdots & x_{2N}x_{mN} & \cdots & 0.5x_{mN}^2
\end{pmatrix},$$

где u_{ij} – значение компоненты $u_{ii}(t)$ матрицы $U(t)$ в j-й момент времени.

Легко убедиться, что перемножив W на $\mathbf{a}$ в (8), мы получим (7), в котором матрица P симметрична, что доказывает эквивалентность (7) и (8). Поэтому для нахождения оценок неизвестных параметров в системе (7) можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Имеем [5]:

$$\hat{\mathbf{a}} = (W'W)^{-1}W'\mathbf{z}. \tag{9}$$

Следовательно, в конце Шага 2 формируются МНК-оценки $\hat{g}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{P}$, которые наилучшим образом соответствуют системе (7) при данном U.

Шаг 3. *Оценивание регулирующих параметров*. Найденные $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{P}$ соответствуют системе (7). Однако начальное приближение $U(t)$ задавалось случайно и, очевидно, может быть найден другой набор компонент матрицы $U(t)$, который бы лучше аппроксимировал стационарное значение неизвестной матрицы из (2), (5). Для каждого отрезка постоянства $[t_i, t_{i+1}]$ были получены следующие формулы для определения МНК-оценок компонент матрицы $U(t)$:

$$\hat{u}_{jj}(t)=\frac{\sum_{i=t_i}^{t_{i+1}}\Delta x_{ji}\cdot\left(\hat{p}_{0j}+\sum_{l=1}^{m}\hat{p}_{jl}x_{li}\right)}{\sum_{i=t_i}^{t_{i+1}}\left(\hat{p}_{0j}+\sum_{l=1}^{m}\hat{p}_{jl}x_{li}\right)^2},\quad t=t_i,t_i+1,\ldots,t_{i+1}. \tag{10}$$

Сформировав новую матрицу U из оценок, найденных согласно (10), необходимо вернуться на Шаг 2 и продолжить итерации. Критерием остановки может быть равенство нулю нормы значений текущей U^n и предыдущей U^{n-1} матрицы с наперед заданной точностью $\left\|U^n-U^{n-1}\right\|<\varepsilon$, которое в случае евклидовой нормы примет вид $\sum_{i=1}^{m}(u_{ii}^{(n)}-u_{ii}^{(n-1)})^2<\varepsilon$.

Исследуем сходимость предложенного алгоритма. Введем в рассмотрение функцию ошибок для системы (2), (5):

$$s(U,g_0,\mathbf{p}_0,P)=\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{t=t_i}^{t_{i+1}}(\Delta\mathbf{x}_t-U(\mathbf{p}_0+P\mathbf{x}_t))^2+\sum_{t=1}^{N}(y_t-g_0-\mathbf{x}_t'\mathbf{p}_0-\frac{1}{2}\mathbf{x}_t'P\mathbf{x}_t)^2. \tag{11}$$

Вне зависимости от начального приближения U, на втором шаге вычисляется минимум функции ошибок (11) по параметрам g_0 и p_{ij}, которые входят в систему (11) линейно, и из (9) находятся их однозначные оценки. В свою очередь, на шаге 3 находятся МНК-оценки параметров u_{ij}, которые в силу линейности уравнений (5) по u_{ij} всегда существуют, определяются по формуле (10) и обеспечивают минимум функции ошибок (11) по группе переменных u_{ij}. По построению на каждом шаге функция (11) не возрастает, и при этом она ограничена снизу ее значением в точке минимума s^*. Следовательно, итерации сходятся к этому пределу.

Очевидно, что предложенный алгоритм эквивалентен минимизации функции (11) методом группового покоординатного спуска [13], который, в силу вида функции (11) обладает хорошей сходимостью на начальном этапе. Известно, что с приближением к точке минимума, сходимость метода покоординатного спуска ухудшается, и, вообще говоря, для нахождения искомых оценок может потребоваться большое число итераций. Поэтому имеет смысл улучшить предложенный алгоритм, например, введением в него шага 2΄, который основан на том, что при исследовании систем наибольший интерес представляет изучение выпуска, т. е. выхода изучаемой системы $y(t)$.

Шаг 2΄. Вследствие того, что начальное приближение U задавалась произвольно, значения выхода $\hat{y}$, вычисленные при найденных $\hat{g}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{P}$, будут отличаться от его значений при их стационарных параметрах в точке минимума функции (11). Следовательно, качество приближения выхода может быть улучшено, например, с помощью преобразования скаляризации и параллельного переноса:

$$y(t)=k_0+k_1(\hat{g}_0+\mathbf{x}'\hat{\mathbf{p}}_0+\frac{1}{2}\mathbf{x}'\hat{P}\mathbf{x})=k_0^*+k_1(\mathbf{x}'\hat{\mathbf{p}}_0+\frac{1}{2}\mathbf{x}'\hat{P}\mathbf{x}). \tag{12}$$

Сравнивая (12) с (2), видим, что чем меньше $\hat{k}_1$ будет отличаться от единицы, тем ближе будут находиться текущие и стационарные значения оцениваемых неизвестных параметров системы. Очевидно, в качестве новых $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{P}$ для шага 3 необходимо задать $\hat{\mathbf{p}}_0^{next}=\hat{k}_1\hat{\mathbf{p}}_0^{prev}$ и $\hat{P}^{next}=\hat{k}_1\hat{P}^{prev}$. При этом, критерием остановки может быть равенство единице коэффициента $\hat{k}_1$ с наперед заданной точностью $\left|\hat{k}_1-1\right|<\varepsilon$.

Как показал численный эксперимент, скорость сходимости алгоритма с использованием шага 2΄ значительно возрастает.

Рассмотрим стационарную точку ($u^*=(u_{11},u_{22},\ldots,u_{mm})$, $p^*=(g_0,p_{01},p_{02},\ldots,p_{mm})$) предложенного алгоритма. По построению в ней выполняются тождества $\left.\frac{\partial s(u,p^*)}{\partial u}\right|_{u=u^*}=0$ и $\left.\frac{\partial s(u^*,p)}{\partial p}\right|_{p=p^*}=0$, что эквивалентно выполнению необходимых условий существования точки экстремума в (11). Таким образом, (u^*, p^*) – точка, подозрительная на экстремум, для (11). Но так как u^* обеспечивает минимум (11) по u_{ij}, а p^* – минимум по g_0 и p_{ij}, и исходя из вида функции квадратов ошибок, можно заключить, что (u^*, p^*) – точка минимума (11).

Стоит отметить, что предложенный алгоритм позволяет идентифицировать неизвестные $U(t)$ на участках произвольной длины (1, 2, …), однако скорость его сходимости с увеличением количества разбиений значительно уменьшается.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проиллюстрируем результаты работы предложенного подхода на примере прикладного моделирования экономики Нидерландов. Для идентификации параметров и проверки точности прогноза используем данные за 1971-2004 гг и 2005-2006 гг соответственно [13]. Сопоставим каждому году относительное время $t = 0, 1, \ldots, 35$. Поскольку для большинства экономических исследований берутся относительные показатели, в качестве основных факторов выберем x_1 – фондовооруженность и x_2 – средняя заработная плата, а выход системы будем характеризовать переменной y – средним выпуском валового внутреннего продукта на одного работающего. В системе национальных счетов (СНС) не фиксируются значения для объема основных фондов, однако ведется статистика их введения (p51) и потребления (k1), и под фондовооруженностью можно понимать величину

$$x_{1t} = \frac{K_0 + \sum_{i=0}^{t} (\mathrm{p51}_i - \mathrm{k1}_i)}{\mathrm{emp}_t},$$

где emp_t – количество работающих в t-ом году, K_0 – величина основных фондов в нулевом году. Значение последней константы неизвестно, поэтому можно положить ее равной нулю, что не отобразится на изучении качественных характеристик и приведет лишь к изменению некоторых количественных показателей.

Для того чтобы изучить насколько пригодны для моделирования средних макроэкономических показателей модели градиентного типа, построим линейную факторную модель вида (2), (5), в которой матричная функция $U(t)$ постоянна на всем участке. В качестве начального приближения разумно выбрать U в виде единичной матрицы, поскольку из экономической теории известно, что все рассматриваемые факторы положительно влияют на выход и, при прочих равных условиях, с изменением одного из них выпуск должен расти. В результате реализации описанного выше алгоритма идентификации потребовалось 82 итерации, чтобы с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ получить следующие результаты:

$$\hat{g}_0 = -0.0450931,\ \hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.1566048 \\ 1.7647701 \end{pmatrix},\ \hat{P} = \begin{pmatrix} -0.0010115 & 0.0094373 \\ 0.0094373 & -0.0449096 \end{pmatrix},\ \hat{U} = \begin{pmatrix} 6.8487591 & 0 \\ 0 & 0.6175003 \end{pmatrix}.$$

Значения, которые будут принимать моделируемые показатели в конкретные моменты времени, можно вычислить согласно формуле (6). Найденное решение приближает исходные табличные данные по факторам с коэффициентами детерминации 98.611% и 97.770% для фондовооруженности и средней заработной платы, а уравнение (2) с найденными оценками неизвестных коэффициентов будет приближать наблюдавшиеся значения для выхода изучаемой системы с $R^2 = 98.807\%$. Видно, что исходные данные достаточно хорошо аппроксимируются даже в случае отсутствие переключений в функции $U(t)$. При этом относительные ошибки прогноза, по сравнению с реально наблюдавшимися значениями показателей, составили: на 2005 г. 2.36%, 1.45% и 1.09%, а на 2006г – 3.13%, 1.28% и 1.46% для x_1, x_2 и y соответственно. Очевидно, что прогнозные свойства данной модели достаточно высокие. Таким образом, можно заключить, что модель градиентного типа достаточно хорошо аппроксимирует реальные макроэкономические системы, и ее можно использовать в качестве базы для построения краткосрочных прогнозов.

Рассмотрим, как изменятся свойства модели (2), (5) если матричную функцию $U(t)$ выбрать кусочно-постоянной, например, на отрезках [0, 18], [19, 33]. В результате расчетов было найдено, что оценки неизвестных коэффициентов модели оказались равными:

$$\hat{g}_0 = 0.0034799,\ \hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.1615286 \\ 1.7688140 \end{pmatrix},\ \hat{P} = \begin{pmatrix} -0.0025966 & 0.0127872 \\ 0.0127872 & -0.0532266 \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 6.1750663 & 0 \\ 0 & 0.5694082 \end{pmatrix},\ \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 6.8073771 & 0 \\ 0 & 0.7622828 \end{pmatrix},$$

где $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$ – значения функции $U(t)$ на первом и втором участках разбиения соответственно. Видно, что результаты идентификации количественно практически не изменились. Рассмотрим качественные показатели аппроксимации и прогнозирования. Модельные значения изучаемых величин, найденные согласно формуле (6), приближают соответствующие табличные данные с коэффициентами детерминации 99.907% и 98.387%, а выход изучаемой системы приближается с качеством 99.220% (рис. 3). Как и предполагалось, дескриптивные свойства данной модели выше модели (2), (5) без переключений. Рассмотрим ее прогнозные свойства. Относительные ошибки прогноза значений исследуемых величин на 2005 год оказались равными 0.54%, 0.56% и 0.81%, а на 2006 год – 1.40%, 1.03% и 1.05% соответственно для фондовооруженности, средней заработной платы и среднего выпуска валового внутреннего продукта на одного работающего. Очевидно, что в результате введения переключения на рассматриваемом интервале времени прогнозные свойства модели также значительно возросли и при дальнейшем увеличении количества точек разбиения модельные качества системы (2), (5) будет только возрастать.

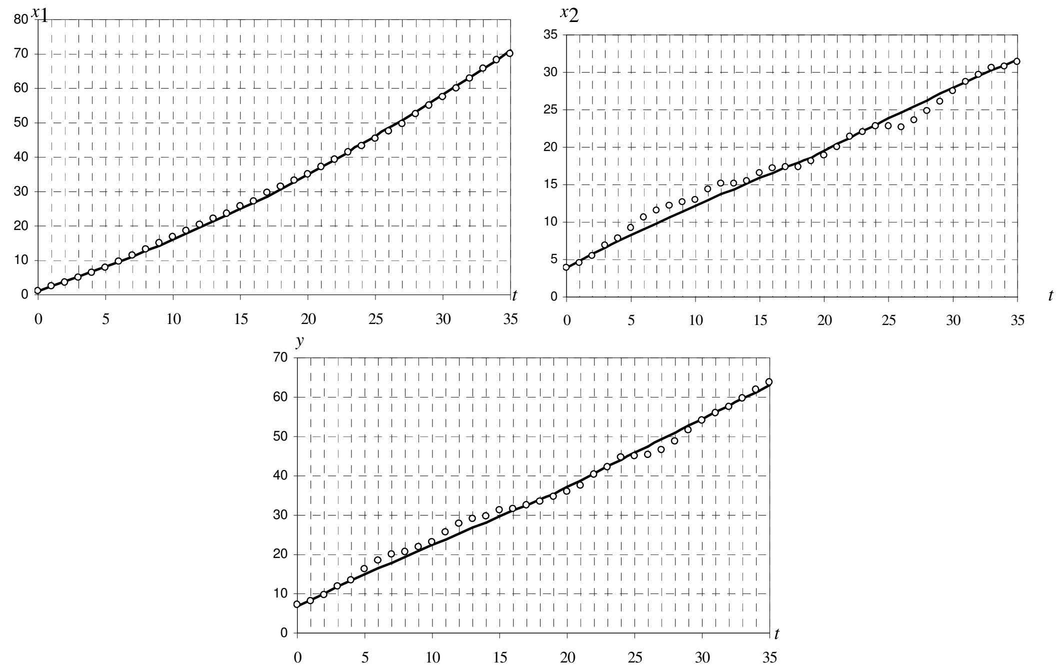

Рис. 3. Графики реально наблюдавшихся (обозначены точками) и вычисленных по модели значений

Выводы. В работе, на основании проведенного информационного обзора, поставлена задача оценивания параметров в нелинейной модели градиентного типа. Для решения задачи идентификации, по данным реально наблюдавшейся динамики совокупности показателей в дискретные моменты времени на некотором отрезке, предложен итерационный алгоритм, который заменяет исходно нелинейную постановку задачи последовательностью линейных задач и использует принцип обратной связи. Апробация предложенного подхода на реальной макроэкономической системе показала высокие аппроксимационные и прогнозные свойства оцененных моделей. Дальнейшие исследования могут быть посвящены обоснованию моментов переключения, например, с помощью критерия Чоу, и обобщению описанного подхода на случай когда матричная функция управления $U(t)$ непрерывна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nanahara T., Yamashita K., Inoue T. Identification of System Characteristics of a Power System with Time Series Data-Identification of Frequency Fluctuation Characteristics of a Small-Scale Isolated System // Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan. – 2004. – Vol.124. – № 1. – P. 23-31.

2. J.T. Katsikadelis System identification by the analog equation method // Boundary Elements XVII Transaction: Modelling and Simulation. – Wessex: Institute of Technology, 1995. – Vol. 10. – P. 512-524.

3. Kirsch, R.F.; Hunter, I.W.; Kearney, R.E. Performance Of Ensemble Time-varying System Identification Methods: Analog Simulations And Biological Applications // Engineering in Medicine and Biology Society. – 1992. – Vol.14. – P. 2754 – 2755.

4. Tu P. N. V. Dynamical systems. An introduction with applications in economics and biology. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 314 p.

5. Назаренко О. М. Основи економетрики: Підручник. – Вид. 2-ге, перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.

6. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.

7. Псиола З. Г., Розендорн Э. Р., Трофимов В. В. Нелинейная экономическая динамика // Фундаментальная и прикладная математика – Т. 3. – № 2. – М.:ЦНИТ, 1997. – С. 319–349.

8. Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – Т. 5. – 2002. – С. 54-86.

9. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 681 с.

10. Назаренко А. М., Васильев А. А. Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом // Физико-математическое моделирование и информационные технологии. – Вып. 4. – 2006. – С. 158-168.

11. Полянин А. Д., Ранжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: «Факториал», 1998. – 432 с.

12. Wooldridge J. Econometric Analisys of Cross Section and Panel Data. – London: MIT Press, 2000. – 735 p.

13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учебное пособие для вузов Изд. 3-е, доп., перераб. – М.: «Бином», 2004. – 632 с.

14. http://epp.eurostat.cec.eu.int.

УДК 519.862:330.43

МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ І РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ У КЛАСІ ГНУЧКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ФОРМ

Назаренко О.М., к.ф.-м.н., доцент, Карпуша М.В., студент

Сумський державний університет

Розглянуто клас гнучких функціональних форм, що застосовуються в економетричному моделюванні для дослідження ефектів другого порядку та апроксимації залежності показників від факторів зі значною варіацією. Особливу увагу приділено моделям транслогарифмічних регресій. Проведені регресійний аналіз побудованих моделей та порівняння з класичними регресіями (лінійною та логарифмічно-лінійною). Усі моделі та методи апробовані на крос-секційних даних і даних часових рядів реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: ефекти першого (другого) порядку, регресійний аналіз, гнучка функціональна форма, специфікація, ідентифікація, транс-логарифмічна регресія, RESET-тест, крос-секційна вибірка.

Назаренко А.М., Карпуша М.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В КЛАССЕ ГИБКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМ / Сумской государственный университет, Украина.

Рассмотрен класс гибких функциональных форм, которые используются в эконометрическом моделировании для исследования эффектов второго порядка и аппроксимации зависимости показателей от факторов, имеющих значительную вариацию. Особое внимание уделено моделям транс логарифмических регрессий. Проведены регрессионный анализ построенных моделей и их сравнение с классическими регрессиями (линейной и логарифмически линейной). Все модели и методы апробированы на кросс-секционных данных и данных временных рядов реальных макроэкономических систем.

Ключевые слова: эффекты первого (второго) порядка, регрессионный анализ, гибкая функциональная форма, спецификация, идентификация, транс логарифмическая регрессия, RESET-тест, кросс-секционная выборка.

Nazarenko O.M., Karpusha M.V. SECOND-ORDER EFFECTS MODELING AND REGRESSION ANALYSIS IN A CLASS OF FLEXIBLE FUNCTIONAL FORMS / Sumy State University, Ukraine.