

10. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике: [учеб. пособ. для вузов] / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 304 с.
11. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / Карлин С. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
12. Моисеев Н.Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования / Моисеев Н.Н. – М.: Знание, 1975. – 63 с.
13. Ляшенко И.Н. Макромодели экономического роста / Ляшенко И.Н. – К.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
14. Петров А.А. Опыт математического моделирования экономики / Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
15. Петров А.А. Экономические механизмы и задача агрегирования модели межотраслевого баланса / А.А. Петров, А.А. Шананин // Математическое моделирование. – 1993. – Т.5, №9. – С. 18-42.
16. Мудров В.И. Метод наименьших модулей / В.И. Мудров, В.Л. Кушко – М.: Знание, 1971. – 64 с.

УДК 517.929.7

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ТА СПІКАННЯ ПОРОШКОВИХ МАТЕРІАЛІВ

Ляшенко В.П., к. ф.-м. н., доцент, Григорова Т.А., аспірант

*Кременчуцький державний політехнічний університет ім. Михайла Остроградського*

Побудова математичної моделі спікання циліндричних заготовок із порошків металів, розв'язок її різними методами та порівняння отриманих результатів.

*Ключові слова: математична модель, алгоритм, кінцево-різницева схема.*

Ляшенко В.П., Григорова Т.А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРЕСОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ / Кременчугский государственный политехнический университет им. Михаила Остроградского, Украина

Построение математической модели спекания заготовок цилиндрических заготовок из порошков металлов, решение её различными методами и сравнение полученных результатов.

*Ключевые слова: математическая модель, алгоритм, конечно-разностная схема.*

Lyashenko V., Grygorova T. MODELING OF PRESSING AND FRITTING PROCESSES OF POWDER MATERIALS / Kremenchuk state polytechnic university named after M. Ostrogradskiy, Ukraine

Construction of mathematical model of fritting of cylinder form billets from powders of metals, solution it by different methods and comparison of the got results.

*Key words: mathematical model, algorithm, finite-difference scheme.*

**ВСТУП.** Процеси пресування та спікання відносяться до основних технологічних операцій в порошковій металургії. Розрізняють тепле та холодне пресування. Під час теплового пресування металевих порошкових матеріалів під дією температури відбувається перетворення неміцного брикету на спечене тіло з властивостями, близькими до властивостей компактного матеріалу. В процесі пресування та спікання відбувається зміна фізичних та механічних властивостей, таких як щільність, об'єм, електропровідність та інших. Протікають складні процеси дифузії як газоподібних, так і твердих частинок. Особливістю цих процесів є усадка матеріалу. Це приводить до підвищення щільності та зменшення первинного об'єму матеріалу брикету. Важливе місце в формуванні фізико механічних властивостей спечених матеріалів належить температурному розподілу в контейнері під час пресування та спікання [1].

Температурне поле  $T = f(r, z, t)$  брикету циліндричної форми скінченної довжини  $L$ , що розігрівається внутрішніми джерелами тепла дією електричного струму силою  $I$ , в циліндричній системі координат  $(r, z, \varphi)$  можна описати за допомогою початково-крайової задачі для диференціального рівняння теплопровідності зі змінними теплофізичними характеристиками.

**МЕТА РОБОТИ.** Побудова математичної моделі температурного поля під час пресування та спікання заготовки циліндричної форми із електропровідних порошків, розробка алгоритму розв'язку за допомогою двох різних кінцево-різницевих схем та порівняння отриманих чисельних результатів.

*Фізико-математичні науки*

**РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ.** Визначення температурного розподілу заготовки під час процесу спікання приводить до розв'язання наступної задачі для рівняння теплопровідності в області  $\Omega : \{0 < r < r(t), 0 < z < L, 0 < t < \tau_0\}$

$$c \frac{\partial}{\partial t} (\rho_b(t)T) = \lambda \frac{1}{r(t)} \frac{\partial}{\partial r} (r(t) \frac{\partial T}{\partial r}) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{S^2}, \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r(t)} = -\alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad (3)$$

$$T(r, 0, t) = T(r, L, t) = T_1 \quad (4)$$

де  $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \kappa t}}$ ,  $\kappa = 3 \times 10^{-4}$  – температурний коефіцієнт ущільнення за радіусом,  $t$  – час спікання,

$\lambda, c, \rho_0, \rho_b, \beta$  – відповідно коефіцієнт теплопровідності, теплоємність, питомий електроопір, щільність, температурний коефіцієнт опору матеріалу,  $\alpha(T), \varepsilon, \sigma$  – відповідно коефіцієнт тепловіддачі, ступінь чорноти і постійна Стефана - Больцмана,  $T_c$  – температура навколишнього середовища,  $r_0 = r(0) = const$  – радіус заготовки на початку процесу спікання;  $S$  – площа поперечного перетину заготовки  $S = \pi \frac{r_0^2}{(1 + \kappa t)}$ .

Під час процесу спікання відбувається зміна об'єму заготовки, тому на основі закону збереження маси її щільність зростає згідно із законом  $\rho_b(t) = \rho_{0b}(1 + \gamma t)$ , де  $\rho_{0b}$  – початкова щільність спресованого порошку.

Після переходу до безрозмірних циліндричних координат і параметрів:  $x = \frac{z}{L}$ ,  $\tau = \frac{t}{\tau_0}$ ,

$\rho(\tau) = \frac{r(t)}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa \tau_0 \tau}}$ ,  $u(x, \rho, \tau) = \frac{T - T_0}{T_c}$ , та перетворень отримаємо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = B \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \psi K \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + B \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + AK \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, \tau), \quad (5)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$u(\rho, x, 0) = 0, \quad u(\rho, 0, \tau) = \tau_0, \quad u(\rho, 1, \tau) = \tau_1. \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -S(u, \tau), \quad (7)$$

де  $A = \frac{\lambda \tau_0}{L^2 c \rho_{0b}}$ ,  $B = \frac{\lambda \tau_0}{r_0^2 c \rho_{0b}}$ ,  $\psi = \frac{\gamma \tau_0}{2}$ ,  $K = \frac{1}{1 + \gamma \tau_0}$ ,

$$F(u, \tau) = \frac{J^2 \rho_0 (1 + \gamma \tau_0 \tau) \tau_0}{\pi^2 r_0^4 T_c c \rho_{0b}} + \frac{J^2 \rho_0 \beta \left(u + \frac{T_1}{T_c}\right) (1 + \gamma \tau_0 \tau) \tau_0}{\pi^2 r_0^4 c \rho_{0b}} - \frac{\left(u + \frac{T_1}{T_c}\right) \gamma \tau_0}{1 + \gamma \tau_0 \tau}, \quad (10)$$

$$S(u, \tau) = \frac{\alpha r_0}{\lambda \sqrt{1 + \kappa \tau_0 \tau}} \left( u + \frac{T_1 - T_c}{T_c} \right) + \frac{\varepsilon \sigma T_c^3 r_0}{\lambda \sqrt{1 + \kappa \tau_0 \tau}} \left( \left( u + \frac{T_1}{T_c} \right)^4 - 1 \right).$$

Отже, у результаті перетворень отримано рівняння (5), у якому в правій частині маємо функцію, що залежить від часу та температури. Отримати розв'язок такого рівняння одним з відомих аналітичних методів неможливо.

Розв'язок задачі (5) -(10) шукаємо чисельним методом у скінченновимірному сепарабельному просторі з нормою  $\|u(x, \rho, \tau)\|_U = \max_{x, \rho, \tau \in \bar{\Omega}} |u(x, \rho, \tau)|$ . Функції  $F(u, \tau)$  і  $S(u, \tau)$  – позитивно визначені.

Для порівняння результатів розрахунків, перевірки збіжності розв'язку задачі будемо дві кінцево - різницевої схеми. Перша – неявна кінцево-різницева схема з вагами, а друга - кінцево-різницева схема Кранка - Ніколсона [2,3].

У області  $\bar{\Omega} \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \tau > 0\}$  уводимо рівномірні сітки вдовж радіуса (координата  $\rho$ ) та довжини (координата  $x$ ):  $\bar{\omega}_{h_1, h_2} = \{\rho_n = nh_1, \quad n=0, 1, \dots, N, \quad x_m = mh_2, \quad m=0, 1, \dots, M\}$ ; сітку за часом (координата  $\tau$ )  $\bar{\omega}_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, \quad j=0, 1, \dots, j_0\}$  з кроком розбиття  $h_1 = 1/N, \quad h_2 = 1/M, \quad \Delta\tau = \Delta/j_0$  та сітку  $\bar{\omega}_{h_1, h_2, \Delta\tau} = \bar{\omega}_{h_1, h_2} \times \bar{\omega}_{\Delta\tau} = \{(nh_1, mh_2, \quad j\Delta\tau), \quad n=0, 1, \dots, N, \quad m=0, 1, \dots, M, \quad j=0, 1, \dots, j_0\}$   
Розв'язок задачі отримаємо у вигляді

$$\frac{y_{n,m}^{j+1} - y_{n,m}^j}{\Delta\tau} = \Lambda(\delta y^{j+1} + (1 - \delta)y^j) + F_{n,m}^{j+1} \quad (11)$$

де  $\Lambda$  – різницевий оператор, який у внутрішніх вузлах сітки для  $n=1, \dots, N-1, \quad m=1, \dots, M-1, \quad j=1, 2, \dots$ , має вигляд:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3, \\ \Lambda_1 y &= B \left( \frac{y_{n+1,m} - y_{n,m}}{h_1^2} \cdot \frac{2n+1}{2n} - \frac{2n-1}{2n} \frac{y_{n,m} - y_{n-1,m}}{h_1^2} \right) \\ \Lambda_2 y &= -K\psi \left( \frac{2n+1}{4} y_{n+1,m} - \frac{y_{n,m}}{2} - \frac{2n-1}{4} y_{n-1,m} \right) \\ \Lambda_3 y &= AK \frac{y_{n,m+1} - y_{n,m}}{h_2^2} - \frac{y_{n,m} - y_{n,m-1}}{h_2^2} = AK \frac{y_{n,m+1} - 2y_{n,m} + y_{n,m-1}}{h_2^2} \end{aligned}$$

а на межах області:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2B \frac{y_{1,m} - y_{0,m}}{h_1^2}, \quad \text{для } n=0, \\ \Lambda &= -(B + \frac{2B}{h_1})S(u, \tau) + \psi K(\tau)S(u, \tau) - 2B \frac{y_{N,m} - y_{N-1,m}}{h_1^2}, \quad \text{для } n=N, \\ y_{n,m}^0 &= 0, \quad y_{n,0}^j = \theta_1(\Delta\tau j) = 0, \quad y_{n,M}^j = \theta_2(\Delta\tau j) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

У результаті перетворень виразів (11)-(12) приходимо до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень  $y_{n,m}^{j+1}$  сіткової функції на кожному часовому шарі.

Кінцево-різницева схема Кранка - Ніколсона [3] для багатовимірного рівняння теплопровідності має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j}{\Delta\tau} &= \left( \frac{B}{\rho} - \psi K \rho \right) \frac{u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1} + u_{n+1,m}^j - u_{n,m}^j}{2h_1} + \\ &B \frac{u_{n-1,m}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n+1,m}^{j+1} + u_{n-1,m}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n+1,m}^j}{2h_1^2} + \\ &+ AK \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1} + u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{2h_2^2} + F_{n,m}^{j+1} \end{aligned} \quad (13)$$

на межах області:

$$\frac{u_{1,m}^{j+1} - u_{0,m}^{j+1} + u_{1,m}^{j+1} - u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для } n = 0,$$

$$\frac{u_{N,m}^{j+1} - u_{N-1,m}^{j+1} + u_{N,m}^j - u_{N-1,m}^j}{2h_1} = S(u, \tau), \quad \text{для } n = N,$$

$$u_{n,m}^0 = 0, \quad u_{n,0}^j = \theta_1(\Delta \tau j) = 0, \quad u_{n,M}^j = \theta_2(\Delta \tau j) = 0. \quad (14)$$

Після перетворень виразів (13)-(14) приходимо до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень  $u_{n,m}^{j+1}$  сіткової функції на кожному часовому шарі. Отриману систему розв'язуємо ітераційним методом.

Для різницьких схем складено алгоритми (рис. 1), на основі яких написано програми в системі Matlab.

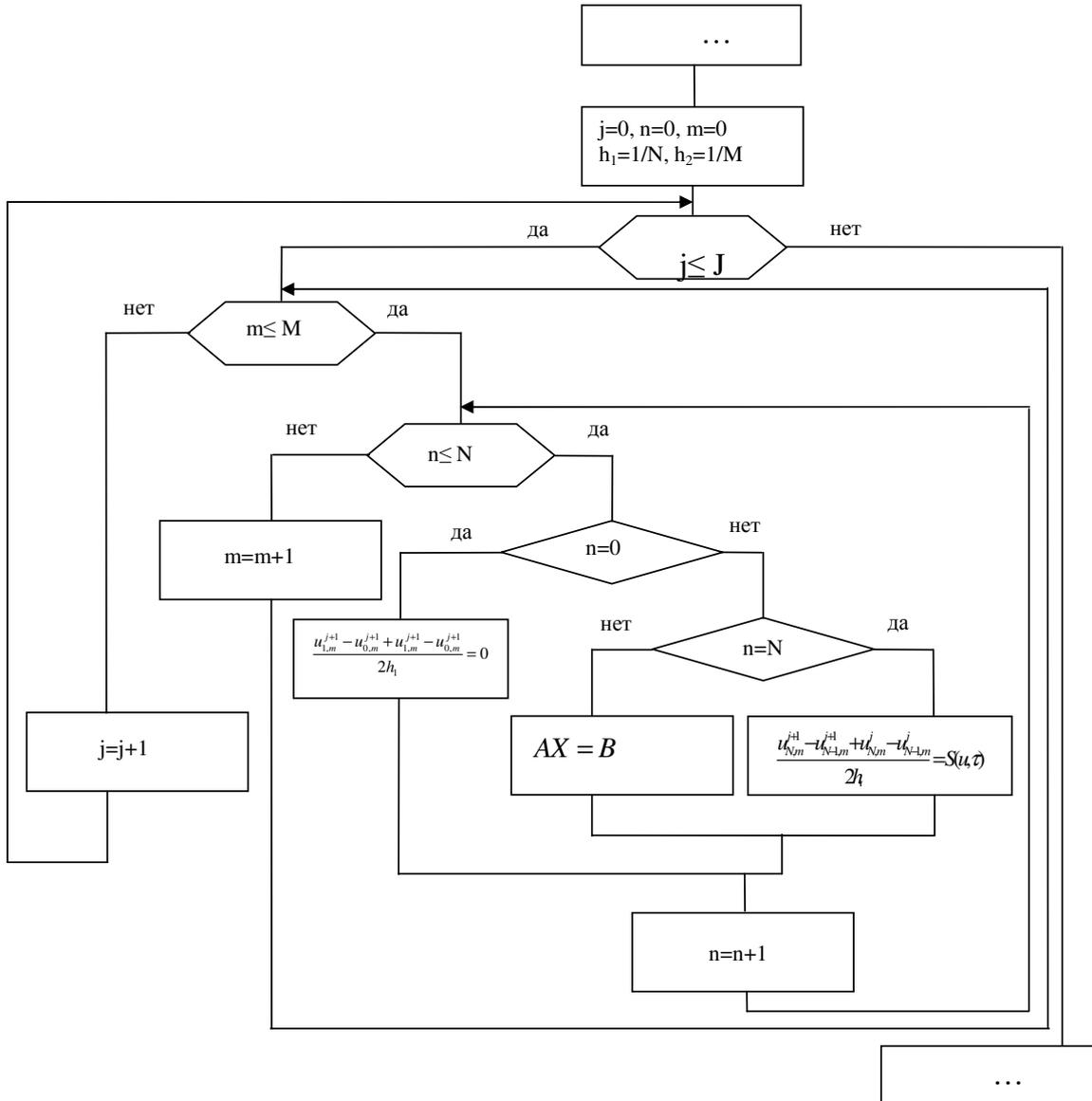


Рис.1. Алгоритм розв'язку задачі за схемою Кранка - Ніколсона

Чисельні експерименти по запропонованим алгоритмам проводилися за наступних умов: початкова температура, температура  $T_1$  на кінцях циліндра та температура  $T_c$  навколишнього середовища збігаються ( $T_0 = T_1 = T_c = 300^0 K$ ); початкова щільність спресованого порошку заліза  $\rho_{0b} = 7,1 \times 10^3 \frac{K\mathcal{Z}}{M^3}$ ; температурний коефіцієнт ущільнення  $\gamma = 0,033$ . Сила струму нагріву заготовки  $I = 670 A$  постійна у всіх розрахунках. Решта теплофізичних характеристик відповідає довідковим даним.

Графіки (рис.2 – рис.4), які були отримані в результаті розрахунків згідно з програмами першого та другого алгоритмів дуже схожі тому візуально їх важко розрізнити. Нижче наведені графіки, на яких у динаміці можна спостерігати зміну температури в процесі спікання заготовок циліндричної форми, яка залежить від радіусу та довжини заготовки.

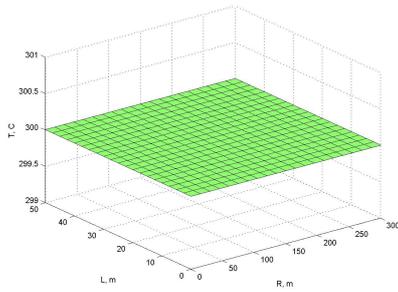


Рис.2. Початок процесу

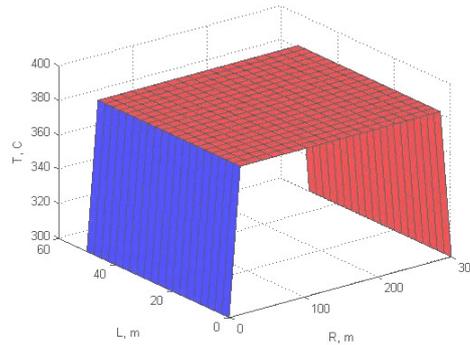


Рис.3. Середина процесу

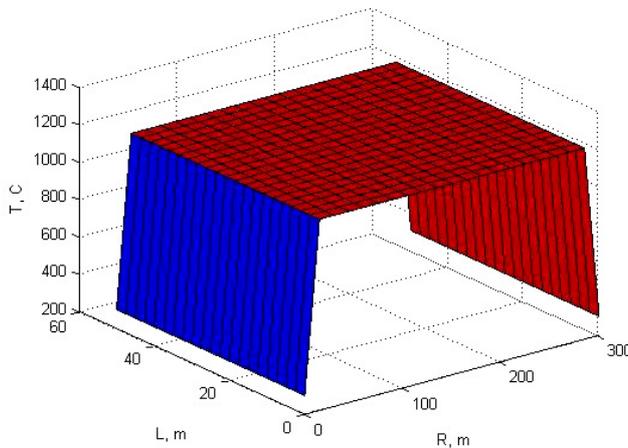


Рис.4. Кінець процесу

Порівняльний аналіз обчислень значень температури на останньому кроці ітерацій наведений у таблиці 1.

Чисельні розрахунки по з'ясуванню впливу втрат тепла з поверхні на розподіл температури зразка показали, що значення коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha$  суттєво впливає на температурний розподіл. Коефіцієнт тепловіддачі змінювали в межах від  $\alpha=1 \text{ Вт/ (м}\cdot\text{К)}$  до  $\alpha=100 \text{ Вт/ (м}\cdot\text{К)}$ . Зміна температури фіксувалася на останньому кроці ітерації. Отримані температурні розподіли зображені на графіках (рис.5, рис.6).



## ЛІТЕРАТУРА

1. Кипарисов С.С. Порошковая металлургия / С.С. Кипарисов Г.А. Либенсон.– М.: Металлургия, 1972. –527с.
2. Самарський А.А. Введение в численные методы / Самарський А.А. – М.: Наука, 1987. – 271с.
3. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.; [В 2-х т. Т. 1; Пер. с англ.]. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

УДК 517.929.7

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ РУХОМОГО ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Ляшенко В.П., к. ф.-м. н., доцент, Кобильська О.Б., аспірант

*Кременчуцький державний політехнічний університет імені Михайла Остроградського*

Розглядається задача визначення температурного розподілу в рухомому, зі швидкістю  $v(t)$ , осесиметричному ізотропному середовищі, яке розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Замість однієї з крайових умов розглядається нелокальна інтегральна умова. Залучення цієї умови дозволяє розглянути обернену задачу для рівняння теплопровідності та визначити один з параметрів керування температурним полем під час перехідного процесу, коли швидкість залежить від часу.

*Ключові слова: нелінійна крайова задача, перехідний процес, нелокальна інтегральна умова.*

Ляшенко В.П., Кобильская Е.Б. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ / Кременчугский государственный политехнический университет им. Михаила Остроградского, Украина

Рассматривается задача определения температурного поля движущейся со скоростью  $v(t)$  осесимметричной среды, разогреваемой внутренними источниками тепла. Вместо одного из краевых условий вводится нелокальное интегральное условие. Привлечение этого условия позволяет решить обратную задачу для уравнения теплопроводности и определить один из параметров управления температурным полем.

*Ключевые слова: нелинейная краевая задача, переходной процес, нелокальное интегральное условие.*

Lyashenko V., Kobilskaya E. MATHEMATICAL MODEL OF TEMPERATURE FIELD OF OXY-SYMMETRIC ENVIRONMENT MOVING / Kremenchuk State Polytechnic University named after M. Ostrogradskiy, Ukraine

The task of determination of the temperature field of oxy-symmetric environment moving with the speed  $v(t)$  warmed up the internal sources of heat is examined. An unload integral condition is entered instead of one of regional terms. Taking in of this condition allows deciding a reverse task for equation of heat conductivity and defining one of parameters of management the temperature field.

*Key words: nonlocal integrated condition, heat equation.*

## ВСТУП

Під час виробництва тугоплавкого та важко деформованого дроту відбувається його попередній розігрів перед пластичною деформацією. Визначення основних параметрів керування нагрівом дроту перед пластичною деформацією є однією з проблем, що виникає під час створення сучасних систем автоматичного керування технологічним процесом. Ці параметри можуть бути отримані як експериментально, так і на основі розв'язку математичних моделей, що враховують умови взаємодії поверхні дроту з навколишнім середовищем. Якщо дріт розігрівається електричним струмом силою  $I$ , то актуальною, з технологічної точки зору, є задача визначення температурного розподілу в зоні розігріву дроту.

Із фізичної точки зору дріт можна розглядати як осесиметричне ізотропне середовище з діючими внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою  $I$  в зоні нагрівання. Під дією електричного струму зростає температура, змінюються теплофізичні параметри середовища, в

*Фізико-математичні науки*