

ЛІТЕРАТУРА

1. Кипарисов С.С. Порошковая металлургия / С.С. Кипарисов Г.А. Либенсон.– М.: Металлургия, 1972. –527с.
2. Самарський А.А. Введение в численные методы / Самарський А.А. – М.: Наука, 1987. – 271с.
3. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.; [В 2-х т. Т. 1; Пер. с англ.]. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

УДК 517.929.7

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ РУХОМОГО ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Ляшенко В.П., к. ф.-м. н., доцент, Кобильська О.Б., аспірант

Кременчуцький державний політехнічний університет імені Михайла Остроградського

Розглядається задача визначення температурного розподілу в рухомому, зі швидкістю $v(t)$, осесиметричному ізотропному середовищі, яке розігрівається внутрішніми джерелами тепла. Замість однієї з крайових умов розглядається нелокальна інтегральна умова. Залучення цієї умови дозволяє розглянути обернену задачу для рівняння теплопровідності та визначити один з параметрів керування температурним полем під час перехідного процесу, коли швидкість залежить від часу.

Ключові слова: нелінійна крайова задача, перехідний процес, нелокальна інтегральна умова.

Ляшенко В.П., Кобильская Е.Б. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ / Кременчугский государственный политехнический университет им. Михаила Остроградского, Украина

Рассматривается задача определения температурного поля движущейся со скоростью $v(t)$ осесимметричной среды, разогреваемой внутренними источниками тепла. Вместо одного из краевых условий вводится нелокальное интегральное условие. Привлечение этого условия позволяет решить обратную задачу для уравнения теплопроводности и определить один из параметров управления температурным полем.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, переходной процес, нелокальное интегральное условие.

Lyashenko V., Kobilskaia E. MATHEMATICAL MODEL OF TEMPERATURE FIELD OF OXY-SYMMETRIC ENVIRONMENT MOVING / Kremenchuk State Polytechnic University named after M. Ostrogradskiy, Ukraine

The task of determination of the temperature field of oxy-symmetric environment moving with the speed $v(t)$ warmed up the internal sources of heat is examined. An unload integral condition is entered instead of one of regional terms. Taking in of this condition allows deciding a reverse task for equation of heat conductivity and defining one of parameters of management the temperature field.

Key words: nonlocal integrated condition, heat equation.

ВСТУП

Під час виробництва тугоплавкого та важко деформованого дроту відбувається його попередній розігрів перед пластичною деформацією. Визначення основних параметрів керування нагрівом дроту перед пластичною деформацією є однією з проблем, що виникає під час створення сучасних систем автоматичного керування технологічним процесом. Ці параметри можуть бути отримані як експериментально, так і на основі розв'язку математичних моделей, що враховують умови взаємодії поверхні дроту з навколишнім середовищем. Якщо дріт розігрівається електричним струмом силою I , то актуальною, з технологічної точки зору, є задача визначення температурного розподілу в зоні розігріву дроту.

Із фізичної точки зору дріт можна розглядати як осесиметричне ізотропне середовище з діючими внутрішніми джерелами тепла, що породжуються дією електричного струму силою I в зоні нагрівання. Під дією електричного струму зростає температура, змінюються теплофізичні параметри середовища, в

Фізико-математичні науки

тому числі і його питомий опір. Температурне поле в зоні нагріву може бути визначено за допомогою розв'язку початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності. Процес пластичної деформації протікає в два етапи. Перший етап можна розглядати як нестационарний перехідний процес, коли під дією електродвигуна, розташованого у волочильному стані дріт починає рухатися. Під час перехідного процесу, що протікає за проміжок часу $0 \leq t < t_0$ швидкість руху дроту $v(t)$ змінюється в межах $0 \leq v(t) < v = const$. Починаючи з деякого проміжку часу, $t \geq t_0$ процес стає стаціонарним. Він протікає з постійною швидкістю v при встановленій температурі в зоні електроконтактного розігріву. Вибір параметрів нагріву дозволяє підтримувати необхідну, для пластичної деформації, температуру.

Порушення температурного розподілу в зоні нагріву, під час перехідного процесу, приводить до обриву дроту [1]. У роботі, на основі розв'язків рівняння теплопровідності з відповідною початковою та крайовими умовами, досліджується температурне поле рухомого вісесиметричного середовища, у якому джерело тепла із щільністю $w(T)$ в зоні нагрівання довжиною l .

МЕТА РОБОТИ

Визначення температурного розподілу всередині зони нагрівання рухомого середовища під час перехідного процесу з врахуванням перерозподілу температури за рахунок теплопровідності та втрат тепла з поверхні. Визначення параметрів керування температурним полем під час перехідного процесу та на початку стаціонарного процесу деформації $\lim_{t \rightarrow t_0-0} T(r, z, t) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} T(r, z, t)$ з метою вирівнювання температури в кінці зони нагріву після закінчення перехідного процесу.

МАТЕРІАЛИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Визначення температури під час перехідного процесу призводить до розв'язання наступної задачі для рівняння теплопровідності в циліндричній області $\Omega : \{0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T), \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad T(r, z, t_0) = T(z), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha (T - T_c), \quad (3)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad T(r, l, t) = T_l. \quad (4)$$

де

$$w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}, \quad (5)$$

ρ_0 – питомий опір; $\lambda, c, \rho_n, \beta$ відповідно коефіцієнти теплопровідності, теплоємність, щільність, температурний коефіцієнт опору рухомого середовища.

Якщо довжина зони нагрівання значно більша перетину дроту і температурний розподіл вздовж нього не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні дроту з навколишнім середовищем [1].

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr. \quad (6)$$

Після усереднення рівняння (1), з урахуванням (6) та граничних умов (3), набуде вигляду

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} \right) u = -\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < t_0, \quad (7)$$

$$u(z, 0) = u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l. \quad (8)$$

Розглянемо частинні випадки задачі (7)-(8).

Стационарний процес при $v(t) = v = \text{const}$ для $t > t_0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

1.1 Найпростіший температурний розподіл має місце коли ми знехтуємо перерозподілом температури всередині зони нагріву за рахунок теплопровідності поклавши $\lambda = 0$ в рівнянні (7). Це призводить до розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{du}{dz} - \left(\frac{2}{r_0 v c \rho_n} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4 v c \rho_n} \right) u = \frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4 v c \rho_n} - \frac{2}{r_0 v c \rho_n} \alpha T_c, \quad 0 < z < l, \quad (9)$$

$$u(0) = T_0.$$

Її розв'язок можна записати у вигляді

$$u(z) = \frac{\chi}{\theta} + \left(T_0 - \frac{\chi}{\theta} \right) e^{\frac{\theta z}{v c \rho_n}}, \quad (10)$$

де

$$\chi = \frac{-I^2 \rho_0 + 2\alpha T_c (\pi^2 r_0^3)}{\pi^2 r_0^4}, \quad \theta = \frac{\beta \rho_0 I^2 + 2\alpha \pi^2 r_0^3}{\pi^2 r_0^4}.$$

1.2 Якщо $\lambda \neq 0$, $v(t) = v = \text{const}$, $t > t_0$ маємо задачу

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} \right) u = -\frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < t_0, \quad (11)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l. \quad (12)$$

Її розв'язок шукаємо кінцево-різницевим методом.

Введемо рівномірну сітку $\omega_{hz} = \{z_i = ih, i = 0, \dots, N; t_j = \tau \cdot j, j = 0, \dots, N\}$ в області $D = \{0 \leq z \leq l, t > t_0\}$ і побудуємо кінцево-різницеву апроксимацію рівняння (11) початкової та крайових умов (12) [2].

$$\lambda \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} - v c \rho_n \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} + \left(\frac{2}{r_0} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} \right) u_{i,j+1} - \frac{2}{r_0} \alpha T_c + \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} - c \rho_n \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = 0,$$

$$A_i = \frac{\lambda \tau}{h^2 c \rho_n}, \quad C_i = \left(\frac{-v \tau}{h} + \frac{2\lambda \tau}{h^2 c \rho_n} + 1 - \frac{\tau}{c \rho_n} \theta \right), \quad B_i = \left(\frac{\lambda \tau}{h^2 c \rho_n} - \frac{v \tau}{h} \right), \quad F_i = \left(-\chi \frac{\tau}{c \rho_n} + u_{i,j} \right).$$

Отримаємо систему різницевих рівнянь

$$A_i u_{i-1,j+1} - C_i u_{i,j+1} + B_i u_{i+1,j+1} = -F_i, \quad u_{0,j+1} = T_0, \quad u_{N,j+1} = T_l, \quad u_{0,j} = T_0.$$

У результаті розв'язку цієї системи будуємо графік температури в координатах (z, t) (рис.1). Він описує температурний розподіл в зоні нагрівання залежно від часу t і координати z при $v(t) = v = \text{const}$. Чисельні розрахунки проведені для вольфраму.

1 Перехідний процес $0 < t < t_0$ $v = v(t)$.

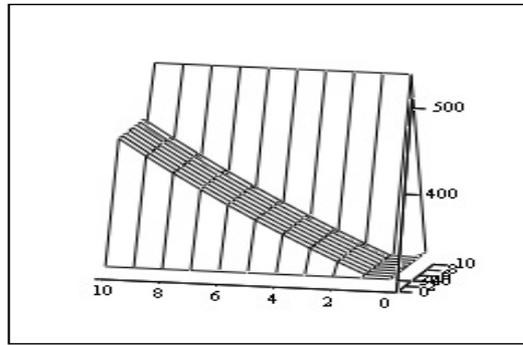
2.1 Покладемо в (7) $\lambda = 0$. Маємо задачу Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку[2]

$$v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha \right) u = -\frac{2}{r_0} \alpha T_c + \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4}, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < t_0, \quad (13)$$

$$u(z,0) = \frac{\chi}{\theta} + \left(T_0 - \frac{\chi}{\theta}\right) e^{\frac{\theta z}{vc\rho_n}}, u(0,0) = T_0, \quad (14)$$

де

$$\chi = \frac{-I^2 \rho_0 + 2\alpha T_c (\pi^2 r_0^3)}{\pi^2 r_0^4}, \theta = \frac{\beta \rho_0 I^2 + 2\alpha \pi^2 r_0^3}{\pi^2 r_0^4}.$$



u

Рис. 1. Температурний розподіл для $t > t_0$, $v(t) = v = const$, $\lambda \neq 0$, $T_0 = 300K$, $T_c = 300K$,
 $\beta = 48 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 70 \frac{Bm}{m^2 K}$, $\rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{Kz}{m^3}$, $c = 137 \frac{Дж}{Kz \cdot K}$, $r_0 = 10^{-3} m$, $I = 70A$, $t_0 = 0.1c$,
 $\rho_0 = 5,6 \cdot 10^{-8} \frac{Kz}{m^3}$, $\lambda = 129 \frac{Bm}{m \cdot K}$, $v = 0.8 \frac{m}{c}$.

v(t) := 10

Розв'язок цієї задачі знаходимо методом характеристик [3]. Тут перша з умов (14) взята із розв'язку задачі (9). Вона визначає криву на шуканій інтегральній поверхні $u(z,t)$.

$$\frac{dt}{c\rho_n} = \frac{dz}{v(t)c\rho_n} = \frac{du}{f(u)}, \quad (15)$$

$$u(z,0) = \frac{\chi}{\theta} + \left(T_0 - \frac{\chi}{\theta}\right) e^{\frac{\theta z}{vc\rho_n}}, u(0,0) = T_0, \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} u(z,t) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} u(z,t) = \frac{\chi}{\theta} + C e^{\frac{\theta z}{vc\rho_n}}, \quad (17)$$

де $f(u) = -\chi + \theta u$, $v(t) = kt$, $k = const$.

Умова (17) є умовою регулярності. Вона впливає із неперервності температурних розподілів при переході від нестационарного до стаціонарного температурного розподілів $t \rightarrow t_0 \pm 0$.

Розв'язавши систему (15)-(16), отримаємо температурний розподіл $u(z,t)$ у вигляді

$$u(z,t) = \frac{\chi}{\theta} + \left(T_0 - \frac{\chi}{\theta}\right) e^{\frac{\theta \left(\frac{kt_0^2}{2} + z - \frac{kt^2}{2} - t_0 v + tv\right)}{vc\rho_n}}. \quad (18)$$

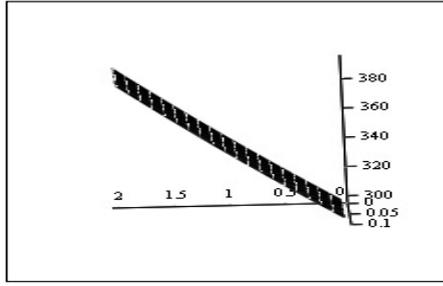


Рис. 2. Температурне поле під час перехідного процесу $0 < t < t_0$ при умові $v = v(t)$, $\lambda = 0$, $T_0 = 300 K$, $T_c = 300 K$, $\beta = 48 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 70 \frac{Bm}{m^2 K}$, $\rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{\kappa\epsilon}{m^3}$, $c = 137 \frac{Дж}{\kappa\epsilon \cdot K}$, $r_0 = 10^{-3} m$, $I = 70 A$, $t_0 = 0.1c$, $\rho_0 = 5,6 \cdot 10^{-8} \frac{\kappa\epsilon}{m^3}$, $\lambda = 129 \frac{Bm}{m \cdot K}$.

2.2 Якщо $\lambda \neq 0$, $0 < t < t_0$, $v = v(t)$. Маємо задачу

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha \right) u - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2}{r_0} \alpha T_c, \quad 0 < z < l, 0 < t < t_0, \quad (7)$$

$$u(z, 0) = u(0, t) = T_0, \quad u(l, t) = T_l. \quad (8)$$

Застосовуємо ту саму схему, що і для розв'язання задачі (11), (12).

У результаті розв'язку цієї задачі будемо графік розподілу температури в координатах (z, t) (рис. 3). Він описує температурний розподіл в зоні нагрівання, що залежить від часу t і координати z . Чисельні розрахунки проведені для вольфраму.

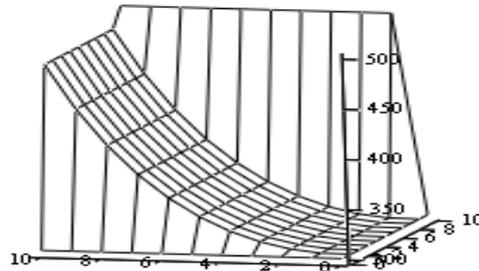


Рис. 3. Температурний розподіл при умові $0 < t < t_0$, $v = v(t)$, $\lambda \neq 0$, $T_0 = 300 K$, $T_c = 300 K$,

$$\beta = 48 \cdot 10^{-4}, T_l = 500 K, \alpha = 70 \frac{Bm}{m^2 K}, \rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{\kappa\epsilon}{m^3}, c = 137 \frac{Дж}{\kappa\epsilon \cdot K}, r_0 = 10^{-3} m,$$

$$I = 70 A, t_0 = 0.1c, \rho_0 = 5,6 \cdot 10^{-8} \frac{\kappa\epsilon}{m^3}, \lambda = 129 \frac{Bm}{m \cdot K}.$$

У реальних технологічних процесах температура в кінці зони нагріву, як правило, невідома. Тому в математичній моделі такого процесу друга крайова умова $T(r, l, t) = T_l$ не завжди адекватно описує температурний розподіл. Замість неї доцільно ввести нелокальну інтегральну умову, що визначає баланс енергії зони нагрівання

$$\int_0^{t_0} \int_0^l \frac{I^2 \rho_0 + \beta I^2 \rho_0 u(z, t)}{r_0^4 \pi^2} dz dt = c \rho_n \int_0^{t_0} \int_0^l (u(z, t) - T_0) dz dt + r_0 \alpha l \int_0^{t_0} \int_0^l \frac{u(z, t) - T_c}{v(t)} dz dt,$$

Фізико-математичні науки

$v(t) := 10$

$h := \frac{1}{N}$

$$u(0, t) = T_0, u(z, 0) = T_0. \quad (19)$$

При застосуванні цієї умови вважаємо, що температурний розподіл $u(z, t)$ відомий, тому, підставивши його, ми можемо визначити будь-який параметр для керування температурним полем. Зокрема, підставивши (19) замість другої з умов (12) будемо мати задачу для визначення довжини зони відпалу для підтримки необхідного температурного розподілу.

Температурний розподіл, що використовується в інтегральній умові, знайдений із розв'язку задачі (11), (12), поклавши в ній $v(t) = v = const$.

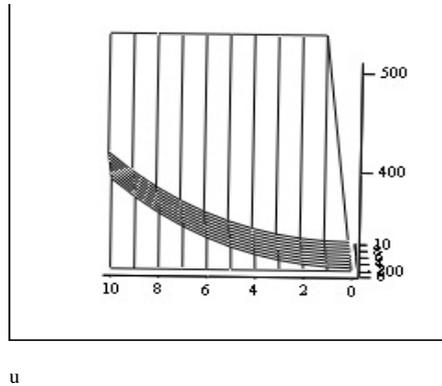


Рис. 4. Температурний розподіл з залученням нелокальної інтегральної умови при $T_0 = 300 K$,

$$T_c = 300 K, \beta = 48 \cdot 10^{-4}, \alpha = 70 \frac{Bm}{m^2 K}, \rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{Kz}{m^3}, c = 137 \frac{Дж}{Kz \cdot K}, r_0 = 10^{-3} m,$$

$$I = 70 A, t_0 = 0.1 c, \rho_0 = 5.6 \cdot 10^{-8} \frac{Kz}{m^3}, \lambda = 129 \frac{Bm}{m \cdot K}, T_l = 505 K.$$

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок математичної моделі, що описує температурний розподіл всередині зони нагрівання дроту, під час перехідного процесу. Ця модель дозволяє враховувати перерозподіл температури за рахунок теплопровідності та втрат тепла з поверхні дроту (рис.1, 2). Її розв'язок дозволяє визначати параметри керування температурним полем під час перехідного процесу та на початку стаціонарного процесу деформації $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} T(r, z, t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} T(r, z, t)$. Замість однієї з крайових умов розглянута задача з нелокальною інтегральною умовою. Чисельні розрахунки показують, що розв'язок задачі з інтегральною умовою більш точно описує температурний розподіл зони нагрівання. Застосування нелокальної інтегральної умови розширює можливість моделювання процесів з урахуванням законів збереження.

Розв'язки можуть бути використані для проектування системи автоматичного контролю температури дроту під час запуску волоочильного стану. Усі розрахунки і графіки виконані в середовищі Mathcad.

ЛІТЕРАТУРА

1. Березовский А.А. Температурное поле проволоки, движущейся с переменной скоростью / А.А. Березовский, В.П. Ляшенко // Математические методы исследования физических полей: Сб. науч. тр. – К.: Ин-т мат-ки АН УССР. – 1980. – С. 188.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т. 2 / В. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 656 с.
3. Тихонов А. П. Уравнения математической физики. / А. Тихонов, А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.