$\Delta_{1,8} = 3;$

$\Delta_{2,8} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = -29;$

$\Delta_{3,8} = \Delta_{2,8} \cdot a_{3,3} - \Delta_{1,8} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} = -391;$

$\Delta_{4,8} = \Delta_{3,8} \cdot a_{4,4} - \Delta_{2,8} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,3} = -2359;$

$\Delta_{5,8} = \Delta_{4,8} \cdot a_{5,5} - \Delta_{3,8} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,4} = 10531;$

$\Delta_{6,8} = \Delta_{5,8} \cdot a_{6,6} - \Delta_{4,8} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,5} = 137579;$

$\Delta_{7,8} = \Delta_{6,8} \cdot a_{7,7} - \Delta_{5,8} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,6} = 901219;$

$\Delta_{8,8} = \Delta_{7,8} \cdot a_{8,8} - \Delta_{6,8} \cdot a_{7,8} \cdot a_{8,7} + \Delta_5 \cdot a_{6,8} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7} - \Delta_4 \cdot a_{5,8} \cdot a_{6,5} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7} + \Delta_3 \cdot a_{4,8} \cdot a_{5,4} \cdot a_{6,5} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7}$

$+\Delta_2 \cdot a_{3,8} \cdot a_{4,3} \cdot a_{5,4} \cdot a_{6,5} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7} - \Delta_1 \cdot a_{2,8} \cdot a_{3,2} \cdot a_{4,3} \cdot a_{5,4} \cdot a_{6,5} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7} + a_{1,8} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{4,3} \cdot a_{5,4} \cdot a_{6,5} \cdot a_{7,6} \cdot a_{8,7} = 87860333;$

$x_8 = \Delta_{8,8}/\Delta_8 = 87860333/7987303 = 11.$

Заключение. Получены рекуррентные соотношения для вычисления определителя трехдиагональной матрицы с заполненным *i*-столбцом. Произведена проверка на конкретных примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелевицкий И.В. Интерполяционные сплайны в задачах цифровой обработки сигналов //Exponenta Pro/Математика в приложениях.-2004.-вып.4.-с.42-53.
2. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985,.-208с.
3. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972. – 332 с.
4. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Советское радио, 1972. – 212 с.

УДК 539.371

ПРО ДЕЯКІ СПОСОБИ АПРОКСИМАЦІЇ КРУГЛИХ ПЛАСТИН РІЗНИХ ПРОФІЛІВ

Левчук С.А., к.ф.-м.н., доцент, Сисоєв Ю.О., к.т.н., доцент

Запорізький національний університет

Стаття присвячена моделюванню статичного деформування круглих пластин різних профілів шляхом апроксимації їх кільцевими пластинами дискретно-змінної товщини. Застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Ключові слова: кільцева пластина, крайова та складена задача, складена конструкція, матриця типу Гріна , матрична алгебра.

Левчук С.А., Сысоев Ю.А. О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ АППРОКСИМАЦИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН РАЗНЫХ ПРОФИЛЕЙ/ Запорожский национальный университет, Украина

Статья посвящена моделированию статического деформирования круглых пластин различных профилей путем аппроксимации их кольцевыми пластинами дискретно-переменной толщины. Применение аппарата функций Грина и матричной алгебры позволило построить компактный вычислительный алгоритм решения рассмотренной задачи при практически произвольном количестве секций в составном теле, которое применялось при моделировании.

Ключевые слова: кольцевая пластина, гранично-составная задача, составная конструкция, матрица типа Грина, матричная алгебра.

Levchuk S.A., Sisoev Y.A. ABOUT THE SOME METHODS APPROXIMATION CIRCULAR PLATES WITH DIFFERENT PROFILES/ Zaporizhzhya National University, Ukraine

The article devoted for modelling of static deformation of the circular plates with different profiles. These plates had been approximated the circular plates with discrete-variable thickness. The matrix of Green type and algebra of matrix had been used what allow had been constructed compact computing algorithm for solution of consider problem. Method of calculation, which propose, had been generalised on the case n section in the circular plate.

Key words: circular plate, boundary-compound problem, compound construction, matrix of Green type, algebra of matrix.

Дана стаття присвячена моделюванню статичного деформування круглих пластин різних профілів шляхом апроксимації їх кільцевими пластинами дискретно-змінної товщини. Такий підхід не є новим. Наприклад, він був викладений у [1], проте в даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Роботи [8 – 10] також були присвячені дослідженню деяких питань розрахунку деформування круглих пластин змінної товщини. У [8], наприклад, розглядався метод роз'язання задач деформування тонких пластин змінної товщини за допомогою функції комплексної змінної. За припущенням профіль пластинки симетричний відносно її серединної площини, і вона деформується силами, що діють у цій площині. Розглянуто задачу про однобічний розтяг нескінченної пружної пластини, що послаблена круговим отвором. У [9] запропоновано енергетичний підхід до розв'язання нелінійних задач вигину гнучких круглих пластин змінної товщини. Отримано вираз потенційної енергії мембранних напружень, що дозволило оцінити роль зусиль у загальній енергії пластинки. Показано вплив змінної товщини на напружено-деформований стан круглої пластинки. У [10] було викладено обчислювальну процедуру для розрахунку кільцевої пластини із неперервною зміною товщини вздовж радіуса під дією довільно розподіленого поперечного навантаження. Гладка діаграма жорсткості на згин апроксимується за допомогою дискретної східчастої функції. Використовується метод послідовної покрокової редукції.

Попередній вивід матриць типу Гріна, за допомогою яких записується остаточний розв'язок задачі про розрахунок напружено-деформованого стану круглої пластини дискретно-змінної товщини, осьовий переріз котрої зображено на рис. 1, було зроблено у [6]. При цьому, згаданий розв'язок задачі мав вигляд:

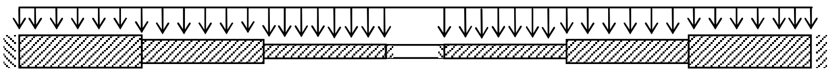

Рис.1. Осьовий переріз кільцевої складеної пластини

$$W_k(r)=\sum_{l=0}^{n}\int_{0}^{R_{l+1}}G_1(r,\xi)\overline{F}_1(\xi)d\xi, \tag{1}$$

де

$$G_l(r,\xi)=\begin{pmatrix}G_{l1}(r,\xi) & G_{l2}(r,\xi)\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\overline{F}_0(\xi)=F_1(\xi), \qquad \overline{F}_n(\xi)=F_n(\xi), \qquad \overline{F}_l(\xi)=(F_l(\xi)\quad F_{l+1}(\xi))^{\mathrm{T}},$$

$$l=1,2,\dots,n-1, \qquad k=1,2,\dots,n.$$

Тут W– вісесиметричний нормальний прогин серединної поверхні пластини, F – права частина, що враховує поверхневе нормальне навантаження та фізичні характеристики об'єкта, $G_l(r,\xi)$ – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі (більш докладно про матриці Гріна див. [6]), n – кількість секцій у складеному об'єкті.

Дана стаття є логічним продовженням роботи [6].

Слід зазначити, що при чисельному знаходженні оберненої матриці A^{-1}, елементи якої необхідні при побудові відповідних матриць типу Гріна, необхідно буде розв'язати $4n$ систем, кожна з яких складається з $4n$ алгебраїчних рівнянь з $4n$ невідомими, де n – кількість секцій у складеному об'єкті.

При розв'язуванні даних систем за допомогою одного з точних методів (наприклад, методу Гаусса з вибором головного елемента) часто зтикаємося з проблемами обчислювального характеру, оскільки при достатньо великому n похибка обчислень невідомих стає незадовільною. Застосування ж ітераційних методів розв'язку систем алгебраїчних рівнянь у випадках, які розглядаються, вкрай утруднено, оскільки потрібна попередня підготовка матриць коефіцієнтів при невідомих при великому розмірі даних матриць.

Тому слід звернути увагу на те, що одержані матриці мають так звану стрічкову структуру, тобто містять велику кількість нульових елементів (квазідіагональні матриці). Загальновідомо, що при розв'язуванні системи рівнянь із квазідіагональною матрицею число арифметичних операцій і об'єм задіяної пам'яті ЕОМ можуть бути суттєво зменшені, що призводить до підвищення точності обчислень.

Розрахункова схема для знаходження оберненої матриці A^{-1}, із застосуванням вказаного вище підходу, може виглядати таким чином.

Виходячи з відомої матричної рівності

$$A^{-1}A = E\,,$$

де $A^{-1} = \{\overline{a}_{ij}\}_{i,j=1}^{4n}$ – матриця, обернена до заданої матриці $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{4n}$, E – одинична матриця, бачимо, що для знаходження невідомих елементів оберненої матриці A^{-1} необхідно розв'язати $4n$ систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$(\overline{a}_{i1} \quad \overline{a}_{i2} \quad \ldots \quad \overline{a}_{i4n})A = (0 \quad 0 \quad 1_i \quad 0 \quad \ldots \quad 0)\,,$$

де i – номер рядка оберненої матриці $(i = 1,2,\ldots,4n)$, 1_i – означає, що одиниця є i-тою компонентою вектора вільних членів.

У випадку трьох секцій у складеному об'єкті $(n = 3)$ у матричному вигляді згадана система подається таким чином (для кожного i):

$$\begin{aligned} &A^{11}C^1 + A^{12}C^2 = F^1, \\ &A^{22}C^2 + A^{23}C^3 = F^2, \\ &A^{33}C^3 + A^{34}C^4 = F^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Більш докладно про системи вигляду (3) див. [7].

Далі з системою (3) для визначення векторів невідомих C^i $(i = 1,2,3,4)$ можна зробити наступне.

Із першого і другого рівнянь системи (3) знайдемо, використовуючи правила матричної алгебри, C^2 і C^3 відповідно:

$$\begin{aligned} &C^2 = \left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right), \\ &C^3 = \left(A^{23}\right)^{-1}\left(F^2 - A^{22}C^2\right), \\ &A^{33}C^3 + A^{34}C^4 = F^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Підставляючи далі вираз для C^2 із (4) у вираз для C^3 із цієї ж системи і одержані представлення для C^3 – в останнє рівняння системи (4), будемо мати:

$$\begin{aligned} &C^2 = \left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right), \\ &C^3 = \left(A^{23}\right)^{-1}\left\{F^2 - A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right)\right\}, \\ &A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}\left\{F^2 - A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right)\right\} + A^{34}C^4 = F^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Перетворивши останнє з рівнянь (5), одержимо:

$$\begin{aligned} A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}A^{11}C^1 + A^{34}C^4 = F^3 - A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}F^2 + \\ + A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}F^1. \end{aligned} \tag{6}$$

Останнє рівняння є, у розгорнутому вигляді, системою чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно такої ж кількості невідомих.

Підставляючи знайдене з (6) C^1 у (5), визначимо C^3 і C^2 і, тим самим, закінчимо розв'язок задачі.

У загальному вигляді, якщо розглядати складену кільцеву пластину, яка складається з n секцій, будемо мати.

Система для визначення елементів оберненої матриці також запишеться у вигляді, аналогічному (3):

$$\begin{aligned} &A^{11}C^1 + A^{12}C^2 = F^1 , \\ &A^{22}C^2 + A^{23}C^3 = F^2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A^{n-1n-1}C^{n-1} + A^{n-1n}C^n = F^{n-1} , \\ &A^{nn}C^n + A^{nn+1}C^{n+1} = F^n . \end{aligned} \tag{7}$$

Розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих компонентів векторів C^1, C^{n+1} запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1} A^{nn} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1} \ldots A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1} A^{11}C^1 + \\ &+ A^{nn+1}C^{n+1} = F^n - A^{nn} (A^{n-1n})^{-1} F^{n-1} + \\ &+ A^{nn} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1} F^{n-2} + \ldots + \\ &+ (-1)^{n+1} A^{nn} (A^{n-1n})^{-1} A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1} \ldots A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1} A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1} F^1 . \end{aligned} \tag{8}$$

Вектори C^2, C^3, …, C^n визначаються за рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &C^2 = \left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right), \\ &C^3 = \left(A^{23}\right)^{-1}\left(F^2 - A^{22}C^2\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C^{n-1} = \left(A^{n-2n-1}\right)^{-1}\left(F^{n-2} - A^{n-2n-2}C^{n-2}\right), \\ &C^n = \left(A^{n-1n}\right)^{-1}\left(F^{n-1} - A^{n-1n-1}C^{n-1}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Як бачимо, при розрахунках доводиться мати справу не з матрицями коефіцієнтів при невідомих розміром $4n \times 4n$, а з матрицями розміром 4×4. Це дозволяє уникнути багатьох обчислювальних складностей.

Із застосуванням вказаних вище підходів моделювалося статичне деформування деяких типів круглих пластин різних профілів з отворами (рис.2, 3). При цьому згадані пластини апроксимувалися пластинами дискретно-змінної товщини (див. рис. 1).

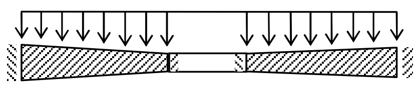

Рис. 2. Осьовий переріз круглої пластини першого типу з отвором

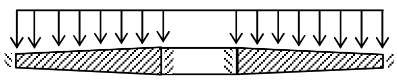

Рис. 3. Осьовий переріз круглої пластини другого типу з отвором

Деякі характеристики напружено-деформованого стану наведені на рис. 4 – 6 (цифрами на графіках позначені криві для пластини першого та другого типів відповідно). Розрахунок виконувався для наступних значень вхідних параметрів. Радіуси кільцевих секцій зростали від 5 см до 80 см з кроком 1 см при апроксимації обох типів кільцевих пластин (див. рис.2, 3). Товщини кільцевих секцій зростали від 1 см до 1,75 см з кроком 0,01 см при апроксимації кільцевої пластини першого типу (див. рис.2), та зменшувалися від 1,75 см до 1 см з кроком 0,01 см при апроксимації кільцевої пластини другого типу (див. рис.3). Кільцеві пластини обох типів були піддані дії зовнішнього нормального поверхневого навантаження інтенсивністю 1 $кг/см^2$, при цьому $E = 2 \cdot 10^6 кг/см^2$, $\nu = 0{,}25$.

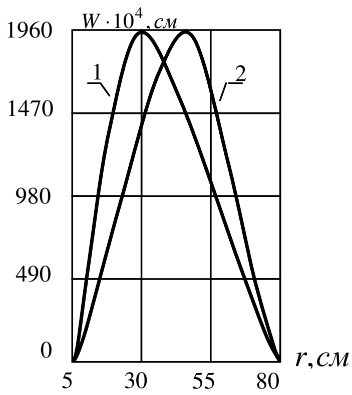

Рис. 4. Нормальні прогини

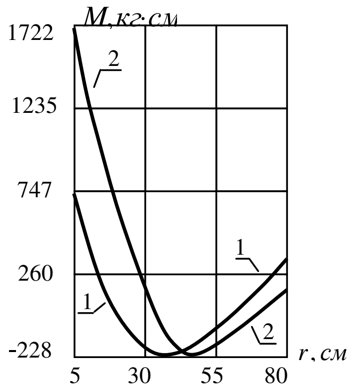

Рис. 5. Згинальні моменти

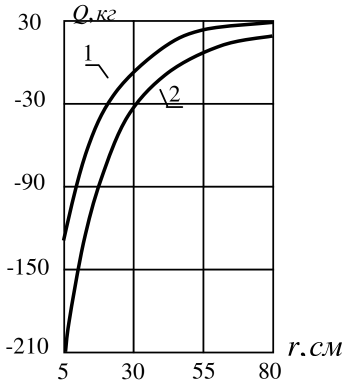

Рис. 6. Поперечні сили

ЛІТЕРАТУРА

1. Биргер М. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: В 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.
2. Гавеля С.П., Кульбашный П.Ф., Левчук С.А. Экспериментальная корректировка расчета подрессоренной кольцевой пластины// Запорож. ун-т. – Запорожье, 1992. – 6 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.10. 92, № 1668 – Ук92.
3. Гавеля С.П., Головко Д.Б., Кульбашный П.Ф., Левчук С.А. Использование экспериментальных возможностей при расчете контактирования упругих пластин// Запорож. ун-т. – Запорожье, 1992. –7 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.08.92, № 1285 – Ук92.
4. Гавеля С.П., Головко Д.Б., Кульбашный П.Ф., Левчук С.А. Исследование подрессоривания вулканизационной диафрагмы// Тезисы докл. Всесоюз. науч.- технич. конф. "Методы потенциала и конечных элементов в автоматизированных исследованиях инженерных конструкций". – К., 1991. – С. 21.
5. Гавеля С.П., Головко Д.Б., Кульбашный П.Ф., Левчук С.А. Экспериментальная корректировка расчета сложного напряженно-деформированного состояния составных тонкостенных конструкций// Тезисы докл. 4-го симпозиума "Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии". – К., 1992. – С. 19.
6. Левчук С.А. Матриця Гріна задачі про статичне деформування складеної кільцевої пластини //Вісник Запорізького державного університету – Сер. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗДУ, 2003. – № 1. – С. 55 – 60.
7. Левчук С.А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл// Дисерт. на здоб. наук. ступ. к.ф.-м.н. . – Запоріжжя: ЗДУ, 2002. – 150 с.
8. Шарафутдинов Г.З. Деформирование тонких пластинок переменной толщины// Соврем. пробл. мех. – М., 1999. С. 255 – 256.
9. Колмогоров Г.Л., Кулиев В.Р. Особенности поведения круглой пластины переменной толщины под нагрузкой// Вестн. ПГТУ. Динам. и проч. машин. – 2000. – №1. – С. 42 – 48.
10. Yeh Kai-yuan, Kue Jien-huo, Rimrott F.P.J. On the nonaxisymmetric loading of nonhomogeneous annular plates of variable thickness// Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – 64, № 2. – P. 307 – 312.