УДК 531.36

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОЗИТИВНЫХ СИСТЕМ БАЛАНСОВОГО ТИПА

Леонтьева В.В., ассистент

Запорожский национальный университет

В работе предлагается дискретная и непрерывная математические модели функционирования позитивных динамических систем балансового типа, описывающих поведение n-отраслевой экономической системы в заданный период времени. Полученное решение позволяет провести анализ и осуществить прогноз основных характеристик исследуемой системы с учетом различных видов задания функции непроизводственного потребления.

Ключевые слова: позитивная динамическая система балансового типа, дискретная динамическая модель, непрерывная динамическая модель, система разностных уравнений, система дифференциальных уравнений, валовой выпуск продукции, функция непроизводственного потребления

Леонтьєва В.В. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ФУНКЦІОНУВАННЯ ПОЗИТИВНИХ СИСТЕМ БАЛАНСОВОГО ТИПУ / Запорізький національний університет, Україна

У роботі пропонуються дискретна та неперервна математичні моделі функціонування позитивних динамічних систем балансового типу, що описують поведінку n-галузевої економічної системи в заданий період часу. Отриманий розв'язок дозволяє провести аналіз і здійснити прогноз основних характеристик досліджуваної системи з урахуванням різних видів завдання функції невиробничого споживання.

Ключові слова: позитивна динамічна система балансового типу, дискретна динамічна модель, неперервна динамічна модель, система різницевих рівнянь, система диференціальних рівнянь, валовий випуск продукції, функція невиробничого споживання

Leontyeva V.V. MATHEMATICAL DYNAMICS' MODEL OF THE BALANCED TYPE POSITIVE SYSTEMS' FUNCTIONING / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The discrete and continuous mathematical models of dynamics of the balanced type positive systems' functioning, circumscribing behavior of a n-branches economic system in the given phase of time are proposed. The obtained solution allows to lead the analysis and to realize the prediction of the basic performances of a investigated system in view of various kinds of function of non-productive consumption.

Key words: a positive dynamic system of the balance type, a discrete dynamic model, a continuous dynamic model, a system of the difference equations, a system of the differential equations, total output, function of non-productive consumption

В работе рассматривается класс динамических систем с ограничениями. Соответствующие матрицы коэффициентов в моделях, описывающих поведение сложных систем, являются неотрицательными и удовлетворяющими определенным условиям, обеспечивающим неотрицательность решений на бесконечном интервале времени. Такие системы входят в класс позитивных динамических систем [1]. Частным случаем этих систем являются динамические экономические системы балансового типа, включающие n производств (или отраслей), для эффективного функционирования которых актуальным с точки зрения прогнозирования изменения производства в условиях жесткой конкуренции на внутренних и международных рынках является создание адекватных экономико-математических моделей, позволяющих анализировать состояние производства во времени.

В известных работах по данной тематике [2-14] основное внимание уделяется учету в математических моделях либо динамики инвестиций, либо динамики производства, в то время как для повышения адекватности моделей реальному исследуемому процессу необходим совместный учет этих факторов, что приводит к необходимости построения динамической математической модели, объединяющей существующие подходы. В данной работе предлагается математическая модель динамики функционирования взаимозависимых производств. В общем случае количество производств, задается параметром n, определяющим количество производств, используемых в модели после применения теории агрегирования [12-15].

I. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОЗИТИВНОЙ СИСТЕМЫ БАЛАНСОВОГО ТИПА

Предлагаемая в работе дискретная динамическая математическая модель представляется в виде линейного неоднородного разностного уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами, то есть в виде

$$X_{t+1} = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + C_t$$

или

$$(I-B)X_{t+1}=(A-B)X_t+C_t\ , \tag{1}$$

где X_t, X_{t+1} – векторы размерности $n\times 1$ валовых выпусков продукции соответственно в моменты времени t и $t+1$; $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ – матрица материалоемкости размерности $n\times n$; коэффициенты α_{ij} $(i=\overline{1,n}\ ,\ j=\overline{1,n})$ определяют нормы затрат продукции i – й отрасли на воспроизводство единицы продукции j – й отрасли; $B=(\beta_{ij})_{n\times n}$ – матрица капиталоемкости размерности $n\times n$; коэффициенты β_{ij} $(i=\overline{1,n}\ ,\ j=\overline{1,n})$ определяют нормы затрат капитальных вложений i – й отрасли на прирост единицы валовой продукции j – й отрасли; C_t – вектор размерности $n\times 1$ непроизводственного потребления; I – единичная матрица размерности $n\times n$.

Модель (1) основывается на модели, описанной С. Карлиным в работе [11], учитывающей динамику производства и представляемой в виде

$$X_{t+1}=AX_t+C_t\ , \tag{2}$$

а также на динамической модели В.В. Леонтьева [2-10, 12-14]

$$X_t=AX_t+B(X_{t+1}-X_t)+C_t\ , \tag{3}$$

которая в свою очередь учитывает динамику инвестиций.

Таким образом, предлагаемая модель (1) объединяет указанные подходы С. Карлина (2) и В.В.Леонтьева (3) и учитывает динамику производства и инвестиций.

При этом в модели (1) действуют традиционные условия неотрицательности и продуктивности матрицы материалоемкости $A=\{\alpha_{ij}\}$, принятые В.В. Леонтьевым [2-6, 9, 10, 13]. Однако для предлагаемой модели (1), кроме перечисленных условий для матрицы A, вводятся дополнительные условия неотрицательности и продуктивности матриц коэффициентов B, $(A-B)$, $(I-B)^{-1}(A-B)$ и условия отрицательности матриц коэффициентов $(A-I)$, $(I-B)^{-1}(A-I)$. Если все перечисленные условия в модели (1) выполняются, то, следовательно, это означает, что система (1) является асимптотически устойчивой, а получаемый на выходе модели объем X_{t+1} валового выпуска продукции сходится при $t\to\infty$ к предельному (стационарному) значению X^*, определяемом при $\Delta X_t=X_{t+1}-X_t=0$ и $C_t=C^0-const$ в виде

$$X^*=(I-A)^{-1}C^0\ ,$$

причем состояние $X=X^*$ характеризует состояние равновесия экономической системы, то есть состояние, при котором в каждый момент времени t объем валового выпуска X_t является постоянным и равным X^*.

Решение системы разностных уравнений (1) представляется в виде

$$X_t=\left((I-B)^{-1}(A-B)\right)^t X_0+\sum_{i=1}^{t}\left((I-B)^{-1}(A-B)\right)^{t-i}(I-B)^{-1}C_{i-1}$$

или

$$X_t=\widetilde{A}^{\,t-1}\widetilde{B}\left((A-B)X_0+(I-A)X^*\right)+\widetilde{A}^{\,t-1}\sum_{i=1}^{t-1}\widetilde{A}^{\,-i}\widetilde{B}C_i\ ,$$

где X_0 – начальный объем валового выпуска продукции в начальный момент времени $t=t_0=0$; X^* – так называемый равновесный (установившийся) объем валового выпуска продукции; $\widetilde{A}=\widetilde{B}(A-B)$; $\widetilde{B}=(I-B)^{-1}$.

II. НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОЗИТИВНОЙ СИСТЕМЫ БАЛАНСОВОГО ТИПА

Построенная дискретная динамическая математическая модель, представляемая в виде разностного уравнения (1), имеет непрерывный аналог, сформулированный на базе системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и имеющий вид

$$(I-B)\dot{X}(t)=(A-I)X(t)+C(t), \tag{4}$$

где $X(t)=(X_1(t),X_2(t),\ldots,X_n(t))^T$ – вектор валового выпуска продукции; $C(t)=(C_1(t),C_2(t),\ldots,C_n(t))^T$ – вектор функций непроизводственного потребления, являющихся либо заданными, либо функционально установленными. Причем функции непроизводственного потребления $C_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ определяются в результате обработки экспериментальных данных объемов реализации конечной продукции методами регрессионного анализа данных, в частности методом наименьших квадратов или методом наименьших модулей [16]. В данной работе рассматриваются функции $C_i(t)$, заданные в линейном, квадратичном и гармоническом видах соответственно:

$$C_i(t)=C_i^0+C_it\,,\quad i=\overline{1,n}\,;$$

$$C_i(t)=C_i^0+C_it^2\,,\quad i=\overline{1,n}\,;$$

$$C_i(t)=C_i^0+C_i\sin\omega t\,,\quad i=\overline{1,n}\,,$$

где C_i^0, C_i – параметры регрессионной модели.

После приведения системы (4) к нормальной форме Коши имеем непрерывную модель в матричной форме в виде

$$\dot{X}(t)=(I-B)^{-1}((A-I)X(t)+C(t)). \tag{5}$$

При этом, в отличие от дискретной модели (1), для непрерывной модели (4) или (5) условия неотрицательности и продуктивности накладываются лишь на матрицы коэффициентов A и B. Условия отрицательности матриц коэффициентов $(A-I)$, $(I-B)^{-1}(A-I)$ в непрерывной модели сохраняются.

Решение системы дифференциальных уравнений (5) может быть представлено в виде

$$X(t)=e^{\widetilde{A}t}\left(X_0+\int_0^t e^{-\widetilde{A}\tau}\widetilde{B}C(\tau)d\tau\right), \tag{6}$$

где $\widetilde{A}=(I-B)^{-1}(A-I)$, $\widetilde{B}=(I-B)^{-1}$; $X_0=X(t_0)$ – начальное состояние системы, $\tau-$ параметр интегрирования, имеющий размерность времени.

III. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ НА МОДЕЛИ И ГРАФИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С целью определения объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ $(i=1,2)$ и выявления влияния на них различных видов функций $C_i(t)$ $(i=1,2)$, аппроксимирующих конечное потребление, проведен вычислительный эксперимент при следующих начальных условиях и исходных параметрах непрерывной двухпродуктовой модели:

$$X_1(t_0)=7\,,\quad X_2(t_0)=4\,,\quad A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25\\ 0{,}15 & 0{,}19\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}17 & 0{,}3\end{pmatrix},\quad t\in[0{,}1]. \tag{7}$$

Пусть коэффициенты функций непроизводственного потребления $C_i(t)$ $(i=1,2)$ имеют вид:

$$C_1^0=5{,}1\,;\ C_2^0=3{,}0\,;\qquad C_1=0{,}3\,;\ C_2=0{,}4\,. \tag{8}$$

Тогда с учетом (7), (8) непрерывная модель динамики функционирования взаимозависимых двух производств, описываемая системой дифференциальных уравнений (5), будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -0{,}8893 \cdot X_1(t) + 0{,}0218 \cdot X_2(t) + 1{,}1745 \cdot C_1(t) + 0{,}3356 \cdot C_2(t); \\ \frac{dX_2}{dt} = -0{,}0017 \cdot X_1(t) - 1{,}1518 \cdot X_2(t) + 0{,}2852 \cdot C_1(t) + 1{,}5101 \cdot C_2(t). \end{cases} \quad (9)$$

Изменения объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ $(i=1,2)$, полученные в результате решения вида (6) дифференциального уравнения (10), представлены в табл. 1 и на рис. 1-3.

Таблица 1 – Изменения объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ $(i=1,2)$ в зависимости от вида функций непроизводственного потребления $C_i(t)$ $(i=1,2)$

t		при $C_i(t)=C_i^0+C_it$		при $C_i(t)=C_i^0+C_it^2$		при $C_i(t)=C_i^0+C_i\sin\omega t$	
		$X_1(t)$	$X_2(t)$	$X_1(t)$	$X_2(t)$	$X_1(t)$	$X_2(t)$
t_0	0	7,00	4,00	7,00	4,00	7,00	4,00
t_1	0,08333	7,0707	4,1108	7,0692	4,1086	7,0847	4,1304
t_2	0,16667	7,1399	4,2161	7,1342	4,2081	7,1841	4,2776
t_3	0,25	7,2075	4,3163	7,1958	4,3000	7,2735	4,4069
t_4	0,33333	7,2738	4,4118	7,2547	4,3857	7,3320	4,4896
t_5	0,41667	7,3387	4,5032	7,3118	4,4667	7,3564	4,5226
t_6	0,5	7,4024	4,5908	7,3677	4,5440	7,3632	4,5304
t_7	0,58333	7,4649	4,6749	7,4230	4,6189	7,3784	4,5500
t_8	0,66667	7,5264	4,7559	7,4782	4,6922	7,4203	4,6067
t_9	0,75	7,5869	4,8340	7,5340	4,7648	7,4878	4,6981
t_{10}	0,83333	7,6465	4,9095	7,5908	4,8377	7,5611	4,7957
t_{11}	0,91667	7,7052	4,9827	7,6491	4,9115	7,6151	4,8643
t_{12}	1	7,7631	5,0537	7,7094	4,9870	7,6355	4,8849

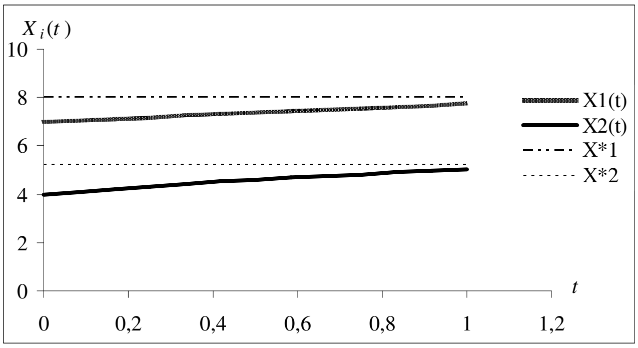

Рис. 1. Изменение объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ при линейном задании функции непроизводственного потребления, т.е. при $C_i(t)=C_i^0+C_it$, $i=1,2$

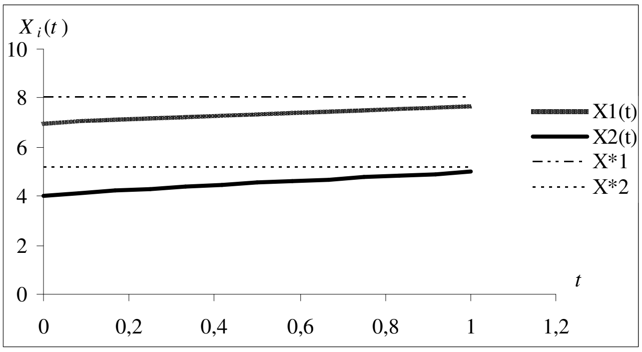

Рис. 2. Изменение объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ при квадратичном задании функции непроизводственного потребления, т.е. при $C_i(t)=C_i^0+C_it^2$, $i=1,2$

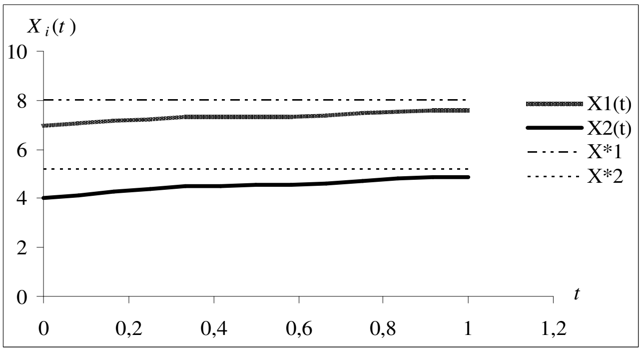

Рис. 3. Изменение объемов валовых выпусков продукции $X_i(t)$ при гармоническом задании функции непроизводственного потребления, т.е. при $C_i(t)=C_i^0+C_i\sin\omega t$, $i=1,2$

Исследование на устойчивость решения

$$\begin{cases} X_1=-0{,}08C_1e^{-1{,}15\,t}-156{,}42C_2e^{-0{,}89\,t}; \\ X_2=C_1e^{-1{,}15\,t}+C_2e^{-0{,}89\,t} \end{cases} \tag{10}$$

системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt}=-0{,}8893\cdot X_1(t)+0{,}0218\cdot X_2(t); \\ \dfrac{dX_2}{dt}=-0{,}0017\cdot X_1(t)-1{,}1518\cdot X_2(t) \end{cases} \tag{11}$$

с действительными и различными корнями $k_1=-0{,}89<0$ и $k_2=-1{,}15<0$ характеристического уравнения

$$k^2+2{,}0411\cdot k+1{,}0243=0$$

показало, что точка покоя $(0,0)$ (тривиальное решение $X_i(t)\equiv 0$ $(i=1,2)$) данной системы дифференциальных уравнений (11) является асимптотически устойчивой, так как из-за наличия множителей $e^{-1{,}15\,t}$ и $e^{-0{,}89\,t}$ в (10) все точки, находящиеся в начальный момент $t=t_0$ в любой $\delta-$окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой $\varepsilon-$окрестности начала координат, а при $t\to\infty$ стремятся к началу координат.

На рис. 4 изображено расположение траекторий около точки покоя $(0,0)$, представляющей собой устойчивый узел, причем стрелками указано направление движения по траекториям при возрастании t.

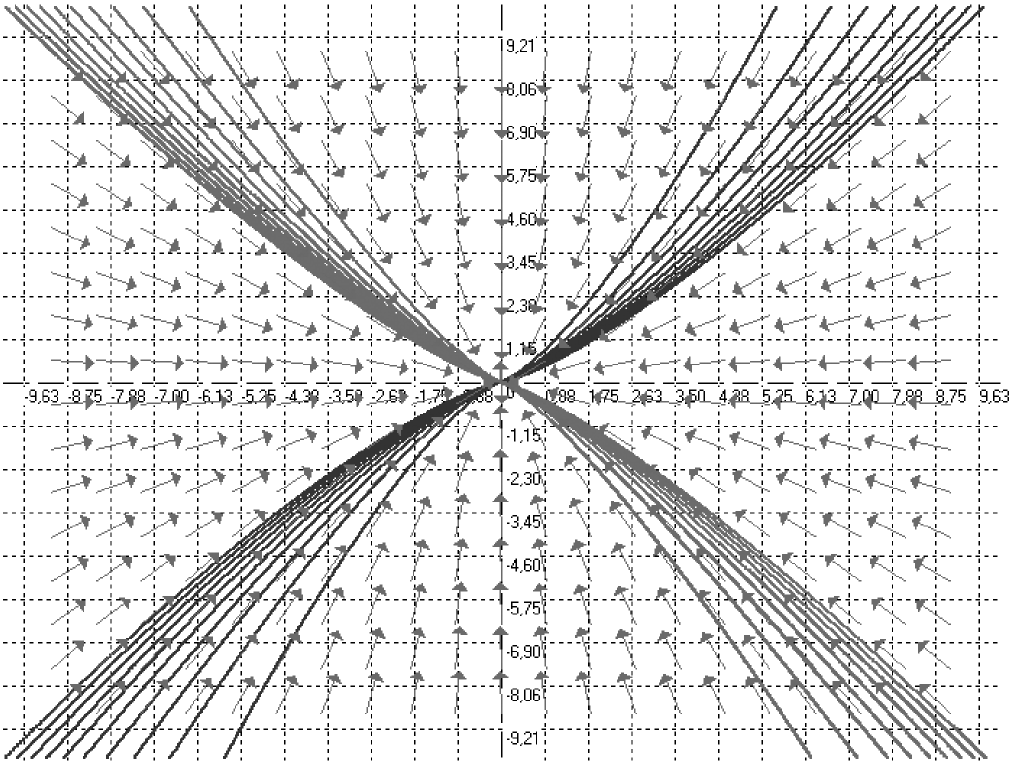

Рис. 4. Картина фазовых траекторий

Закономерности, полученные при проведении вычислительного эксперимента для непрерывной модели сохраняются и для дискретной модели (при этом время t принимается дискретным).

IV. ВЫВОДЫ

Результатом данной работы являются построение и исследование новой модели динамики позитивной системы балансового типа на примере сложной экономической системы с учетом инвестиций. На основе проведенного анализа показано, что разработка модели, объединяющей модели С. Карлина и В.В. Леонтьева может быть эффективной для повышения качества, адекватности и точности модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов / Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 256 с.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику / Ашманов С.А. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
3. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика / Леонтьев В.В.; пер. с англ.; под ред. С.С. Шаталина, Д.В. Волового. – М.: Политическая литература, 1990. – 415 с.
4. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика / Леонтьев В.В.; пер. с англ.; авт. предисл. и науч. ред. А.Г. Гранберг. – М.: Экономика, 1997. – 479 с.
5. Леонтьев В. Будущее мировой экономики / Леонтьев В. – М.: Международные отношения, 1979. – 212 с.
6. Леонтьев В. Исследование структуры американской экономики / Леонтьев В. – М.: Госстатиздат, 1958. – 640 с.
7. Леонтьев В. Избранные статьи / Леонтьев В. – Санкт-Петербург: Новое время, 1994. – С. 90, 95 – 96.
8. Основы теории оптимального управления / [Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М. и др.] ; под ред. В.Ф. Кротова – М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.
9. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Интрилигатор М. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.

10. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике: [учеб. пособ. для вузов] / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 304 с.

11. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / Карлин С. – М.: Мир, 1964. – 838 с.

12. Моисеев Н.Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования / Моисеев Н.Н. – М.: Знание, 1975. – 63 с.

13. Ляшенко И.Н. Макромодели экономического роста / Ляшенко И.Н. – К.: Высшая школа, 1979. – 232 с.

14. Петров А.А. Опыт математического моделирования экономики / Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.

15. Петров А.А. Экономические механизмы и задача агрегирования модели межотраслевого баланса / А.А. Петров, А.А. Шананин // Математическое моделирование. – 1993. – Т.5, №9. – С. 18-42.

16. Мудров В.И. Метод наименьших модулей / В.И. Мудров, В.Л. Кушко – М.: Знание, 1971. – 64 с.

УДК 517.929.7

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ТА СПІКАННЯ ПОРОШКОВИХ МАТЕРІАЛІВ

Ляшенко В.П., к. ф.-м. н., доцент, Григорова Т.А., аспірант

Кременчуцький державний політехнічний університет ім. Михайла Остроградського

Побудова математичної моделі спікання циліндричних заготовок із порошків металів, розв'язок її різними методами та порівняння отриманих результатів.
Ключові слова: математична модель, алгоритм, кінцево-різницева схема.

Ляшенко В.П., Григорова Т.А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРЕСОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ / Кременчугский государственный политехнический университет им. Михаила Остроградского, Украина

Построение математической модели спекания заготовок цилиндрических заготовок из порошков металлов, решение её различными методами и сравнение полученных результатов.
Ключевые слова: математическая модель, алгоритм, конечно-разностная схема.

Lyashenko V., Grygorova T. MODELING OF PRESSING AND FRITTING PROCESSES OF POWDER MATERIALS / Kremenchuk state polytechnic university named after M. Ostrogradskiy, Ukraine

Construction of mathematical model of fritting of cylinder form billets from powders of metals, solution it by different methods and comparison of the got results.
Key words: mathematical model, algorithm, finite-difference scheme.

ВСТУП. Процеси пресування та спікання відносяться до основних технологічних операцій в порошковій металургії. Розрізняють тепле та холодне пресування. Під час теплого пресування металевих порошкових матеріалів під дією температури відбувається перетворення неміцного брикету на спечене тіло з властивостями, близькими до властивостей компактного матеріалу. В процесі пресування та спікання відбувається зміна фізичних та механічних властивостей, таких як щільність, об'єм, електропровідність та інших. Протікають складні процеси дифузії як газоподібних, так і твердих частинок. Особливістю цих процесів є усадка матеріалу. Це приводить до підвищення щільності та зменшення первинного об'єму матеріалу брикету. Важливе місце в формуванні фізико механічних властивостей спечених матеріалів належить температурному розподілу в контейнері під час пресування та спікання [1].

Температурне поле $T = f(r, z, t)$ брикету циліндричної форми скінченної довжини L , що розігрівається внутрішніми джерелами тепла дією електричного струму силою *I*, в циліндричній системі координат (r, z, φ) можна описати за допомогою початково-крайової задачі для диференціального рівняння теплопровідності зі змінними теплофізичними характеристиками.

МЕТА РОБОТИ. Побудова математичної моделі температурного поля під час пресування та спікання заготовки циліндричної форми із електропровідних порошків, розробка алгоритму розв'язку за допомогою двох різних кінцево-різницевих схем та порівняння отриманих чисельних результатів.