4. Moulin H. The strategy of social choice. Advanced Textbooks in Economics - Amsterdam, New York, Oxford: Noth Holland publishing company -1983. -№18. –214p.

5. Arrow K.J. Rational Choice Functions and Ordering Economica (N.S.) -1959. -V.26. -P.121-127.

6. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории -М.: Наука -1990. -240с.

7. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений -М.: Наука -1989. -320с.

УДК 519.612.2:512.56

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ЗАПОЛНЕННЫМ *I*–ЫМ СТОЛБЦОМ

Курапов С.В., к.ф.-м.н., доцент, Кондратьева Н.А., к.ф.-м.н., доцент

Запорожский национальный университет

В данной работе приведены рекуррентные формулы для вычисления определителей ленточных матриц с помощью методов алгебры структурных чисел.

Ключевые слова: ленточные матрицы, алгебра структурных чисел, определитель

Курапов С.В., Кондрат'єва Н.О. ВИЗНАЧНИКИ ТРИДІАГОНАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗАПОВНЕНИМ *i*–им СТОВПЦЕМ / Запорізький національний університет, Україна

У даній роботі наведені рекурентні формули для обчислення визначників стрічкових матриць за допомогою методів алгебри структурних чисел.

Ключові слова: стрічкові матриці, алгебра структурних чисел, визначник

Kurapov S.V., Kondratyeva N.A. A THREE-DIAGONAL MATRIXES' DETERMINANTS WITH THE FILLED COLUMN *i* / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The recurrence formulas for calculation of the banded matrixes' determinants by means of the methods of structural numbers' algebra are brought in given work.

Key words: banded matrixes, algebra of structural numbers, determinant

Введение. При использовании интерполяционных сплайнов в задачах цифровой обработки сигналов [1], а также в других областях практической деятельности человека приходится решать системы линейных уравнений определенного вида, где матрица коэффициентов представляет собой трехдиагональную матрицу. В литературе [2] приведены рекуррентные формулы для вычисления определителя такой матрицы, однако для полного решения системы уравнений методом Крамера необходимо иметь и методы вычисления определителей матриц с заполненным *i*-столбцом

Постановка задачи. Получить рекуррентные формулы для вычисления определителя трехдиагональной матрицы с заполненным *i*-столбцом.

Вывод формул. Рассмотрим матрицу А с заполненным столбцом i. В представлении с помощью структурных чисел матрица будет иметь вид:

	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	0	…	i	…	0	0		γ_1
	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	…	i	…	0	0		γ_2
	0	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	…	i	…	0	0		γ_3
A =	0	0	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	…	i	…	0	0	=	γ_4
	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…
	0	0	0	0	…	I	…	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$		$\gamma_{n-1}+\alpha_n$
	0	0	0	0	…	I	…	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$		$\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$

Докажем рекуррентную формулу для вычисления определителя такой ленточной матрицы с заполненным *i* столбцом. Доказательство будем проводить, применяя, как и прежде, методы алгебры структурных чисел [3]. В данной алгебре запись ненулевых элементов в строках отображается записью соответствующих структурных чисел, характеризующих номера столбцов, а запись строк определяется соответствующим местоположением в выражениях. Таким образом, множество индексов столбцов для соответствующей строки *k* можно записать в виде кортежа γ_k или однострочного структурного числа γ_k, а отдельный элемент строки, характеризующий столбец *i* в виде единичного элемента α_i или структурного элемента α_i.

1. Рассмотрим случай с заполненным первым столбцом $i = 1$, в этом случае матрица А имеет следующий вид:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 1 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & \ldots & 0 & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \gamma_1 \\ \hline \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 \\ \hline \gamma_4 \\ \hline \ldots \\ \hline \gamma_{n-1} + \alpha_n \\ \hline \alpha_1 + \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \hline \end{array}$$

Произведя умножение однострочных структурных чисел, получим выражение для вычисления определителя матрицы А в виде структурного многочлена:

$$\det A_n = (\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2})(\gamma_{n-1} + \alpha_n) \cdot (\alpha_1 + \alpha_{n-1} + \alpha_n) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \gamma_{n-1} + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n) \cdot (\alpha_1 + \alpha_{n-1} + \alpha_n) =$$
$$= \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_n + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} +$$
$$+ \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_n. \qquad (1)$$

В данном выражении элементы $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_1$ и $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_{n-1}$ не содержат числа α_n, и поэтому не могут быть рассмотрены как элементы структурного числа. Элемент $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_n$ содержит два числа α_n и поэтому не может быть рассмотрен как элемент структурного числа. Элемент структурного числа $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1$ легко преобразуется

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \times \ldots \times$$
$$\times (\alpha_1 + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n)(\alpha_1 + \alpha_{n-1} + \alpha_n) \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1 =.$$

Так как числа α_1 и α_n должны отсутствовать в круглых скобках ввиду умножения на них в конце выражения, то

$$= \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \ldots (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1 =.$$

Далее последовательно

$$= \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_4 + \alpha_5) \ldots \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1 \text{ и окончательно } = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \ldots \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1.$$

После преобразований имеем:

$$\det A_n = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-1} \cdot \alpha_n + \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-2} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \ldots \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \cdot \alpha_1. \qquad (2)$$

С учетом инверсии [4]

$$\det A_n = \det A_{n-1} \cdot a_{n,n} - \det A_{n-2} \cdot a_{n-1,n} \cdot a_{n,n-1} + (-1)^{n-1} a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n} \cdot a_{n,1}. \qquad (3)$$

2. Рассмотрим случай с заполненным вторым столбцом $i = 2$, в этом случае матрица А имеет следующий вид:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & a_{4,3} & a_{4,4} & \ldots & 0 & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \gamma_1 \\ \hline \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 \\ \hline \gamma_4 \\ \hline \ldots \\ \hline \gamma_{n-1} + \alpha_n \\ \hline \alpha_2 + \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \hline \end{array}$$

Произведя умножение однострочных структурных чисел, получим выражение для вычисления определителя матрицы А в виде структурного многочлена

$$\det A_n = (\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2})(\gamma_{n-1}+\alpha_n)\cdot(\alpha_2+\alpha_{n-1}+\alpha_n) = (\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}+\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n)\cdot(\alpha_1+\alpha_{n-1}+\alpha_n) =$$
$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_2 + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1} + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2 + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-1} +$$
$$+\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_n. \quad (4)$$

В данном выражении элементы $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_2$ и $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}$ не содержат числа α_n, и поэтому не могут быть рассмотрены как элементы структурного числа. Элемент $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_n$ содержит два числа α_n, и поэтому не может быть рассмотрен как элемент структурного числа. Элемент структурного числа $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2$ легко преобразуется

$$\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2 = (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)\times\ldots\times$$
$$\times(\alpha_2+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n)(\alpha_2+\alpha_{n-1}+\alpha_n)\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2 =.$$

Так как числа α_2 и α_n должны отсутствовать в круглых скобках ввиду умножения на них в конце выражения, то

$$= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)\ldots(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2 =.$$

Далее последовательно

$$= \alpha_1\alpha_3\alpha_4(\alpha_4+\alpha_5)\ldots\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2 \text{ и окончательно } = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2.$$

После преобразований имеем:

$$\det A_n = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-1} + \alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5\ldots\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2. \quad (5)$$

С учетом инверсии [2]

$$\det A_n = \det A_{n-1}\cdot a_{n,n} - \det A_{n-2}\cdot a_{n-1,n}\cdot a_{n,n-1} + (-1)^n a_{1,1}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n}\cdot a_{n,2}. \quad (6)$$

Исключение составляет матрица 3×3 для i=2, она определяется по формулам расчета для простой трехдиагональной матрицы

$$\det A_3 = \det A_2\cdot a_{3,3} - \det A_1\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2}. \quad (7)$$

3. Рассмотрим ленточную матрицу A размером $n\times n$ с заполненным столбцом i для общего случая. В этом случае определитель зависит и от размера матрицы n и от заполненного столбца i, будем обозначать такой определитель как $\Delta_{n,i}$. Здесь следует различать следующие случаи:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \ldots & i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & \ldots & i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & i & \ldots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & i & \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & i & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \gamma_1+\alpha_i \\ \hline \gamma_2+\alpha_i \\ \hline \gamma_3+\alpha_i \\ \hline \gamma_4+\alpha_i \\ \hline \ldots \\ \hline \alpha_i+\gamma_{n-2} \\ \hline \alpha_i+\gamma_{n-1}+\alpha_n \\ \hline \alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n \\ \hline \end{array}$$

Случай, когда $n = i$.

Тогда

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & I \\ \hline a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & 0 & 0 & I \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & 0 & 0 & I \\ \hline 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & \ldots & 0 & 0 & I \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & I \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \gamma_1+\alpha_i \\ \hline \gamma_2+\alpha_i \\ \hline \gamma_3+\alpha_i \\ \hline \gamma_4+\alpha_i \\ \hline \ldots \\ \hline \gamma_{n-2}+\alpha_i \\ \hline \gamma_{n-1}+\alpha_n \\ \hline \alpha_{n-1}+\alpha_n \\ \hline \end{array}$$

$$\det A_n = (\gamma_1 + \alpha_i)\cdot(\gamma_2 + \alpha_i)\cdot(\gamma_3 + \alpha_i)\cdot\ldots\cdot(\gamma_{n-2} + \alpha_i)\cdot(\gamma_{n-1} + \alpha_n)\cdot(\alpha_{n-1} +\cdot\alpha_n) = (\gamma_1\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot\alpha_i + \alpha_i\cdot\gamma_1)\cdot(\gamma_3 + \alpha_i)\times\ldots\times$$
$$\times (\gamma_n+\alpha_i)\cdot(\gamma_{n-1} + \alpha_n)\cdot(\alpha_{n-1} +\cdot\alpha_n) = (\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3+ \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\alpha_i + \gamma_1\cdot\alpha_i\cdot\gamma_3 + \alpha_i\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3)\cdot\ldots\cdot(\gamma_{n-2} + \alpha_i)\cdot(\gamma_{n-1} + \alpha_n)\cdot(\alpha_{n-1} +\cdot\alpha_n) =$$
$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_i + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_i\cdot\alpha_{n-1} + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-3}\cdot\alpha_i\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1} + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-4}\cdot\alpha_i\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1} \ldots+$$
$$+ \gamma_1\cdot\alpha_i\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1} + \cdot\alpha_i\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1} =.$$

Структурный элемент $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-3}\cdot\alpha_i\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}$ данного структурного многочлена равен

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-3}\cdot\alpha_i\cdot(\alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-1} = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-3}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}.$$

Структурный элемент $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-4}\cdot\alpha_i\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}$ данного структурного многочлена равен

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-4}\cdot\alpha_i\cdot(\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot(\alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-1} = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-4}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}.$$

Структурный элемент $\gamma_1\cdot\alpha_i\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-4}\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}$ данного структурного многочлена равен

$$= \gamma_1\cdot\alpha_i\cdot(\alpha_2 + \alpha_3 +\cdot\alpha_4)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot(\alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-1} = \gamma_1\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}.$$

Структурный элемент $\alpha_i\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-3}\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}$ данного структурного многочлена равен

$$= \alpha_i\cdot(\alpha_1 + \alpha_2 +\cdot\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot(\alpha_{n-2} +\cdot\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-1} = \alpha_n\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1}.$$

С учетом последних преобразований можно записать

$$\Delta_{n,i} = \Delta_{n-1}\cdot\alpha_n - \Delta_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-1} + \Delta_{n-3}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1} + \Delta_{n-4}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1} +\ldots + \Delta_1\cdot\alpha_n\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-3}\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_{n-1} \quad (8)$$

или

$$\det A_{n,i} = \det A_{n-1}\cdot a_{n,n} - \det A_{n-2}\cdot a_{n-1,n}\cdot a_{n,n-1} + \det A_{n-3}\cdot a_{n-2,n}\cdot a_{n-1,n-2}\cdot a_{n,n-1} + \det A_{n-4}\cdot a_{n-3,n}\cdot a_{n-2,n-3}\cdot a_{n-1,n-2}\cdot a_{n,n-1} +\ldots+ \det A_1\cdot a_{2,n}\cdot a_{3,2}\cdot\ldots\cdot a_{n-2,n-3}\cdot a_{n-1,n-2}\cdot a_{n,n-1} + (-1)^{n-1} a_{1,n}\cdot a_{2,1}\cdot\ldots\cdot a_{n-2,n-3}\cdot a_{n-1,n-2}\cdot a_{n,n-1}. \quad (9)$$

Случай, когда $n = i+1$.

В этом случае определитель определяется как

A =

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	…	0	i	0		γ_1
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	…	0	i	0		γ_2
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	…	0	i	0		γ_3
0	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	…	0	i	0	=	γ_4
…	…	…	…	…	…	…		…
0	0	0	…	$a_{n-2,n-2}$	$a_{n-2,n-1}$	0		γ_{n-2}
0	0	0	…	$a_{n-1,n-2}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$		$\gamma_{n-1} + \alpha_n$
0	0	0	…	$a_{n,n-2}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$		$\alpha_{n-1} + \alpha_n$

$$\det A_n = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n + \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-2}. \quad (10)$$

Случай, когда $n > i+1$.

$$\det A_n = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot(\gamma_{n-1}+\alpha_n)\cdot(\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n) = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot(\gamma_{n-1}\cdot\alpha_i+\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n-1}+$$

$$+\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n+\alpha_n\cdot\alpha_i+\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}+\alpha_n\cdot\alpha_n) = \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot(\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n+\alpha_n\cdot\alpha_i+\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}) =$$

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\gamma_{n-1}\cdot\alpha_n+\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i+\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}.$$

Рассмотрим структурный элемент $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i$.

Представим его в виде

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot(\gamma_{i-1}+\alpha_i)\cdot(\alpha_{i-1}+\alpha_i+\alpha_{i+1})\cdot(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2})\cdot\ldots\cdot(\alpha_i+\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\times$$

$$\times(\alpha_i+\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_i+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i =$$

Число α_i должно быть удалено во всех скобках, так как оно присутствует в конце выражения.

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot\gamma_{i-1}\cdot(\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1})\cdot(\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2})\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i =$$

Далее должно быть удалено число α_{i-1} как обязательно включенное в $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot\gamma_{i-1}$

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot\gamma_{i-1}\cdot\alpha_{i+1}(\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2})\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i =$$

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot\gamma_{i-1}\cdot\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2})\cdot(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i =$$

и так далее. Окончательно получим

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\ldots\cdot\gamma_{i-2}\cdot\gamma_{i-1}\cdot\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-2}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i$$

Определитель равен

$$\det A_{n,i} = \det A_{n-1,i}\cdot\alpha_n + \det A_{n-1,i}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}\det A_{i-1}\cdot\alpha_{i+1}\cdot\alpha_{i+2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n\cdot\alpha_i. \quad (11)$$

В качестве примера вычислим значения неизвестных для следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 26;\\
7x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 34;\\
6x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 82;\\
8x_3 + 9x_4 + 3x_5 &= 90;\\
13x_4 + 2x_5 + 12x_6 &= 199;\\
3x_5 + 5x_6 + 8x_7 &= 135;\\
4x_6 + 9x_7 + 2x_8 &= 134;\\
7x_7 + 11x_8 &= 177.
\end{aligned}$$

Данную систему уравнений можно представить в матричном виде:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 3&5&0&0&0&0&0&0\\\hline 7&2&4&0&0&0&0&0\\\hline 0&6&11&5&0&0&0&0\\\hline 0&0&8&9&3&0&0&0\\\hline 0&0&0&13&2&12&0&0\\\hline 0&0&0&0&3&5&8&0\\\hline 0&0&0&0&0&4&9&2\\\hline 0&0&0&0&0&0&7&11\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline x_1\\\hline x_2\\\hline x_3\\\hline x_4\\\hline x_5\\\hline x_6\\\hline x_7\\\hline x_8\\\hline\end{array}\quad=\quad\begin{array}{|c|}\hline 26\\\hline 34\\\hline 82\\\hline 90\\\hline 199\\\hline 135\\\hline 134\\\hline 177\\\hline\end{array}$$

Традиционными методами вычисляем определители соответствующих порядков для трехдиагональной матрицы:

$\Delta_0 = 1;$

$\Delta_1 = 3;$

$\Delta_2 = -29;$

$\Delta_3 = -391;$

$\Delta_4 = -2359;$

$\Delta_5 = 10531;$

$\Delta_6 = 137579;$

$\Delta_7 = 911219;$

$\Delta_8 = 7987303.$

Вычислим определитель матрицы А с заполненным первым столбцом, используя выражение (3):

26	5	0	0	0	0	0	0
34	2	4	0	0	0	0	0
82	6	11	5	0	0	0	0
90	0	8	9	3	0	0	0
199	0	0	13	2	12	0	0
135	0	0	0	3	5	8	0
134	0	0	0	0	4	9	2
177	0	0	0	0	0	7	11

$\Delta_{1,1} = 26;$

$\Delta_{2,1} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -118;$

$\Delta_{3,1} = \Delta_{2,1}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,1}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,1} = -282;$

$\Delta_{4,1} = \Delta_{3,1}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,1}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} - a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,1} = -6818;$

$\Delta_{5,1} = \Delta_{4,1}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,1}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,1} = 57062;$

$\Delta_{6,1} = \Delta_{5,1}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,1}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} - a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,1} = 44758;$

$\Delta_{7,1} = \Delta_{6,1}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,1}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,1} = 2436038;$

$\Delta_{8,1} = \Delta_{7,1}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,1}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} - a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,8}\, a_{8,1} = 15974606;$

$x_1 = \Delta_{1,1}/\Delta_1 = 15974606/7987303 = 2.$

Вычислим определитель матрицы А с заполненным вторым столбцом, используя выражение (6):

3	26	0	0	0	0	0	0
7	34	4	0	0	0	0	0
0	82	11	5	0	0	0	0
0	90	8	9	3	0	0	0
0	199	0	13	2	12	0	0
0	135	0	0	3	5	8	0
0	134	0	0	0	4	9	2
0	177	0	0	0	0	7	11

$\Delta_{1,2} = 3$;

$\Delta_{2,2} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = -80$;

$\Delta_{3,2} = \Delta_{2,2} \cdot a_{3,3} - \Delta_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} = -1864$;

$\Delta_{4,2} = \Delta_{3,2} \cdot a_{4,4} - \Delta_{2,2} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,3} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,2} = -8176$;

$\Delta_{5,2} = \Delta_{4,2} \cdot a_{5,5} - \Delta_{3,2} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,4} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,2} = 20524$;

$\Delta_{6,2} = \Delta_{5,2} \cdot a_{6,6} - \Delta_{4,2} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,5} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,2} = 688556$;

$\Delta_{7,2} = \Delta_{6,2} \cdot a_{7,7} - \Delta_{5,2} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,6} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,2} = 3224716$;

$\Delta_{8,2} = \Delta_{7,2} \cdot a_{8,8} - \Delta_{6,2} \cdot a_{7,8} \cdot a_{8,7} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,8}\, a_{8,2} = 31949212$;

$x_2 = \Delta_{8,2}/\Delta_8 = 31949212/7987303 = 4$.

Вычислим определитель матрицы А с заполненным третьем столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	26	0	0	0	0	0
7	2	34	0	0	0	0	0
0	6	82	5	0	0	0	0
0	0	90	9	3	0	0	0
0	0	199	13	2	12	0	0
0	0	135	0	3	5	8	0
0	0	134	0	0	4	9	2
0	0	177	0	0	0	7	11

$\Delta_{1,3} = 3$;

$\Delta_{2,3} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = -29$;

$\Delta_{3,3} = \Delta_{2,3} \cdot a_{3,3} - \Delta_{1,3} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} = -1889$;

$\Delta_{4,3} = \Delta_{3,3} \cdot a_{4,4} - \Delta_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,3} = -4032$;

$\Delta_{5,3} = \Delta_{4,3} \cdot a_{5,5} - \Delta_{3,3} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,4} - \Delta_2 \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,3} = -20607$;

$\Delta_{6,3} = \Delta_{5,3} \cdot a_{6,6} - \Delta_{4,3} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,5} + \Delta_2 \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,3} = 746817$;

$\Delta_{7,3} = \Delta_{6,3} \cdot a_{7,7} - \Delta_{5,3} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,6} - \Delta_2 \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,3} = 1784937$;

$\Delta_{8,3} = \Delta_{7,3} \cdot a_{8,8} - \Delta_{6,3} \cdot a_{7,8} \cdot a_{8,7} + \Delta_2 \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,6} \cdot a_{6,7} \cdot a_{7,8} \cdot a_{8,3} = 23961909$;

$x_3 = \Delta_{8,3}/\Delta_8 = 23961909/7987303 = 3$.

Вычислим определитель матрицы А с заполненным четвертым столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	0	26	0	0	0	0
7	2	4	34	0	0	0	0
0	6	11	82	0	0	0	0
0	0	8	90	3	0	0	0
0	0	0	199	2	12	0	0
0	0	0	135	3	5	8	0
0	0	0	134	0	4	9	2
0	0	0	177	0	0	7	11

$\Delta_{1,4} = 3;$

$\Delta_{2,4} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -29;$

$\Delta_{3,4} = \Delta_{2,4}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,4}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} = -391;$

$\Delta_{4,4} = \Delta_{3,4}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,4}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} + \Delta_{1,4}\cdot a_{2,4}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3} + \Delta_0\cdot a_{1,4}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3} = -20006;$

$\Delta_{5,4} = \Delta_{4,4}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,4}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} = 193415;$

$\Delta_{6,4} = \Delta_{5,4}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,4}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} + \Delta_3\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,3} = -212969;$

$\Delta_{7,4} = \Delta_{6,4}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,4}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} - \Delta_3\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,3} = 6983471;$

$\Delta_{8,4} = \Delta_{7,4}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,4}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} + \Delta_3\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,3} = 39936515.$

$x_4 = \Delta_{8,4}/\Delta_8 = 39936515/7987303 = 5.$

Вычислим определитель матрицы A с заполненным пятым столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	0	0	26	0	0	0
7	2	4	0	34	0	0	0
0	6	11	5	82	0	0	0
0	0	8	9	90	0	0	0
0	0	0	13	199	12	0	0
0	0	0	0	135	5	8	0
0	0	0	0	134	4	9	2
0	0	0	0	177	0	7	11

$\Delta_{1,5} = 3;$

$\Delta_{2,5} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -29;$

$\Delta_{3,5} = \Delta_{2,5}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,5}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} = -391;$

$\Delta_{4,5} = \Delta_{3,5}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,5}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} = -2359;$

$\Delta_{5,5} = \Delta_{4,5}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,5}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} + \Delta_{2,5}\cdot a_{3,5}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4} - \Delta_{1,5}\cdot a_{2,5} a_{3,2}\cdot a_{3,3}\cdot a_{5,4} + a_{1,5} a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4} = -$
$209363;$

$\Delta_{6,5} = \Delta_{5,5}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,5}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} = 2774765;$

$\Delta_{7,5} = \Delta_{6,5}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,5}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} - \Delta_4\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,5} = 1326325;$

$\Delta_{8,5} = \Delta_{7,5}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,5}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} + \Delta_4\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,5} = 55911121;$

$X_5 = \Delta_{8,5}/\Delta_8 = 55911121/7987303 = 7.$

Вычислим определитель матрицы A с заполненным шестым столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	0	0	0	26	0	0
7	2	4	0	0	34	0	0
0	6	11	5	0	82	0	0
0	0	8	9	3	90	0	0
0	0	0	13	2	199	0	0
0	0	0	0	3	135	8	0
0	0	0	0	0	134	9	2
0	0	0	0	0	177	7	11

$\Delta_{1,6} = 3;$

$\Delta_{2,6} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -29;$

$\Delta_{3,6} = \Delta_{2,6}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,6}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} = -391;$

$\Delta_{4,6} = \Delta_{3,6}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,6}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} = -2359;$

$\Delta_{5,6} = \Delta_{4,6}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,6}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} = 10531;$

$\Delta_{6,6} = \Delta_{5,6}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,6}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} - \Delta_{3}\cdot a_{4,6}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5} - \Delta_{2}\cdot a_{3,6}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5} - \Delta_{1}\cdot a_{2,6}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5} -$

$- a_{1,6}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5} = 2049774;$

$\Delta_{7,6} = \Delta_{6,6}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,6}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} = 7158734;$

$\Delta_{8,6} = \Delta_{7,6}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,6}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} + \Delta_{5}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,6} = 79873030;$

$x_6 = \Delta_{8,6}/\Delta_8 = 79873030/7987303 = 10.$

Вычислим определитель матрицы А с заполненным седьмым столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	0	0	0	0	26	0
7	2	4	0	0	0	34	0
0	6	11	5	0	0	82	0
0	0	8	9	3	0	90	0
0	0	0	13	2	12	199	0
0	0	0	0	3	5	135	0
0	0	0	0	0	4	134	2
0	0	0	0	0	0	177	11

$\Delta_{1,7} = 3;$

$\Delta_{2,7} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -29;$

$\Delta_{3,7} = \Delta_{2,6}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,7}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} = -391;$

$\Delta_{4,7} = \Delta_{3,6}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,7}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} = -2359;$

$\Delta_{5,7} = \Delta_{4,6}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,7}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} = 10531;$

$\Delta_{6,7} = \Delta_{5,6}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,7}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} = 137579;$

$\Delta_{7,7} = \Delta_{6,6}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,7}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} + \Delta_{4}\cdot a_{5,7}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6} - \Delta_{3}\cdot a_{4,7}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6} + \Delta_{2}\cdot a_{3,7}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6} -$

$- \Delta_{1}\cdot a_{2,7}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6} + a_{1,7}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6} = 10236490;$

$\Delta_{8,7} = \Delta_{7,6}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,7}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} = 63898424;$

$x_7 = \Delta_{8,7}/\Delta_8 = 63898424/7987303 = 8.$

Вычислим определитель матрицы А с заполненным восьмым столбцом, используя выражения (9-11):

3	5	0	0	0	0	0	26
7	2	4	0	0	0	0	34
0	6	11	5	0	0	0	82
0	0	8	9	3	0	0	90
0	0	0	13	2	12	0	199
0	0	0	0	3	5	8	135
0	0	0	0	0	4	9	134
0	0	0	0	0	0	7	177

$\Delta_{1,8} = 3$;

$\Delta_{2,8} = a_{1,1}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1} = -29$;

$\Delta_{3,8} = \Delta_{2,8}\cdot a_{3,3} - \Delta_{1,8}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} = -391$;

$\Delta_{4,8} = \Delta_{3,8}\cdot a_{4,4} - \Delta_{2,8}\cdot a_{3,4}\cdot a_{4,3} = -2359$;

$\Delta_{5,8} = \Delta_{4,8}\cdot a_{5,5} - \Delta_{3,8}\cdot a_{4,5}\cdot a_{5,4} = 10531$;

$\Delta_{6,8} = \Delta_{5,8}\cdot a_{6,6} - \Delta_{4,8}\cdot a_{5,6}\cdot a_{6,5} = 137579$;

$\Delta_{7,8} = \Delta_{6,8}\cdot a_{7,7} - \Delta_{5,8}\cdot a_{6,7}\cdot a_{7,6} = 901219$;

$\Delta_{8,8}= \Delta_{7,8}\cdot a_{8,8} - \Delta_{6,8}\cdot a_{7,8}\cdot a_{8,7} + \Delta_5\cdot a_{6,8}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7} - \Delta_4\cdot a_{5,8}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7} + \Delta_3\cdot a_{4,8}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7}$

$+\Delta_2\cdot a_{3,8}\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7} - \Delta_1\cdot a_{2,8}\cdot a_{3,2}\cdot\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7} + a_{1,8}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot\cdot a_{4,3}\cdot a_{5,4}\cdot a_{6,5}\cdot a_{7,6}\cdot a_{8,7} = 87860333$;

$x_8 = \Delta_{8,8}/\Delta_8 = 87860333/7987303 = 11$.

Заключение. Получены рекуррентные соотношения для вычисления определителя трехдиагональной матрицы с заполненным *i*-столбцом. Произведена проверка на конкретных примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелевицкий И.В. Интерполяционные сплайны в задачах цифровой обработки сигналов //Exponenta Pro/Математика в приложениях.-2004.-вып.4.-с.42-53.
2. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985,.-208с.
3. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972. – 332 с.
4. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Советское радио, 1972. – 212 с.

УДК 539.371

ПРО ДЕЯКІ СПОСОБИ АПРОКСИМАЦІЇ КРУГЛИХ ПЛАСТИН РІЗНИХ ПРОФІЛІВ

Левчук С.А., к.ф.-м.н., доцент, Сисоєв Ю.О., к.т.н., доцент

Запорізький національний університет

Стаття присвячена моделюванню статичного деформування круглих пластин різних профілів шляхом апроксимації їх кільцевими пластинами дискретно-змінної товщини. Застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв’язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Ключові слова: кільцева пластина, крайова та складена задача, складена конструкція, матриця типу Гріна , матрична алгебра.

Левчук С.А., Сысоев Ю.А. О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ АППРОКСИМАЦИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН РАЗНЫХ ПРОФИЛЕЙ/ Запорожский национальный университет, Украина

Статья посвящена моделированию статического деформирования круглых пластин различных профилей путем аппроксимации их кольцевыми пластинами дискретно-переменной толщины. Применение аппарата функций Грина и матричной алгебры позволило построить компактный вычислительный алгоритм решения рассмотренной задачи при практически произвольном количестве секций в составном теле, которое применялось при моделировании.

Ключевые слова: кольцевая пластина, гранично-составная задача, составная конструкция, матрица типа Грина, матричная алгебра.