УДК 519.816

ПРАВИЛА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОТНОШЕНИЯ ПАРНОДОМИНАНТНОСТИ

Козин И.В., к.ф.-м.н., доцент

Запорожский национальный университет

В статье рассмотрена задача обобщения классических правил голосования на произвольные правила выбора, основанные на отношении парнодоминантности. Получены обобщения известных правил: правила Кондорсе, Копленда, Симпсона, Борда и других. Доказана состоятельность по Кондорсе для построенных обобщенных правил выбора. Исследована инвариантность построенных правил выбора относительно некоторых групп преобразований.

Ключевые слова: задачи принятия решения, правила голосования, отношения парнодоминантности, симметрия выбора.

Козін І.В. ПРАВИЛА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ВІДНОШЕННЯ ПАРНОДОМІНУВАННЯ /Запорізький національний університет, Україна

У статті розглянута задача узагальнення класичних правил голосування на довільні правила вибору, що засновані на відношенні парнодомінування. Отримані узагальнення відомих правил: правила Кондорсе, Копленда, Симпсона, Борда та інших. Доведено переконливість за Кондорсе для побудованих узагальнених правил вибору. Досліджено инваріантність побудованих правил вибору відносно деяких груп перетворень.

Ключові слова: задачі прийняття рішень, правила голосування, відношення парнодомінантності, симетрія вибору.

Kozin I.V. DECISION-MAKING RULES BASED ON PAIRDOMINATION RELATION / Zaporizhzhya national university, Ukraine

The generalization problem of classical rules of voting on the any rules of a choice based on the pairdomination relation is considered in the article. Generalizations of known rules are received: rules Condorce, Kopland, Simpson, Borda and others. The Condorce solvency for the constructed generalized rules of a choice is proved. Invariance of the constructed rules of a choice concerning some groups of transformations is investigated.

Key words: decision-making problems, rules of choice, rules of voting, pairdomination relations, symmetry of choice.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Наиболее известными и хорошо исследованными правилами, построенными на основе принципа парнодроминантности, безусловно, являются правила голосования. Правила голосования большинством голосов подробно исследовались в многочисленных работах [1-5]. Получен ряд результатов для правил голосования, которые можно смело назвать фундаментальными. Это теорема Янга о характеристических свойствах правил голосования с подсчетом очков, теорема Гиббарда-Сэттертуэйта о правилах голосования защищенных от манипулирования, теорема Эрроу о независимости от посторонних альтернатив и ряд других.

Гораздо более общей задачей принятия решений является задача выбора на основе отношения парнодоминантности. Этой задаче также посвящены многочисленные исследования [6], подробно исследована проблема классификации механизмов выбора [7].

Целью настоящей статьи является обобщение ряда известных механизмов принятия решения путем голосования на случай произвольных парнодоминантных правил выбора, а также исследование инвариантности правил выбора относительно групп преобразований множества выбора.

ПРАВИЛА ГОЛОСОВАНИЯ

Правила голосования основываются на очень простом принципе – *принципе большинства*, который утверждает, что если из двух альтернатив А и В более половины агентов предпочитают альтернативу А, то она должна быть выбрана по этому правилу. Любое правило, удовлетворяющее принципу большинства, является обобщением этого принципа на число альтернатив, большее двух.

Задача принятия решения для случая голосования может рассматриваться как частный случай задачи многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. А именно: задано N экономических агентов, каждый из которых обладает критерием $F_i(x): X \to \{1, 2, ..., m\}$, где значение целевой функции i-го агента $F_i(x)$ – это номер альтернативы x в порядке уменьшения предпочтений этого агента. Задача предложить правило принятия решения, которое строится на основании целевых функций агентов и может использоваться на любом подмножестве множества X. Экономические агенты в правилах голосования называются выборщиками, а элементы множества выбора - кандидатами.

Элемент множества X, который выбирается по заданному правилу выбора, называется победителем по этому правилу. Для некоторых агентов их целевые функции могут совпадать. Эти агенты объединяются в группы. Таким образом, условием задачи принятия решений является набор групп выборщиков, для каждой из которых указано количество выборщиков в группе и вектор предпочтений для данной группы. Условие можно выписать в виде следующей таблицы:

Таблица 1.

N_1	N_2		N_k
i_{11}	i_{21}	…	i_{k1}
i_{12}	i_{22}	…	i_{k2}
…	…	…	…
i_{1m}	i_{2m}	…	i_{km}

В верхней строке таблицы указаны количества выборщиков в группах, имеющих одинаковые предпочтения, а в колонках перечислены кандидаты в порядке убывания предпочтений для этой группы выборщиков, то есть $t = F_s(i_{st})$. Такая таблица называется профилем предпочтений. Правило выбора должно строиться лишь на информации, которая содержится в профиле предпочтений.

Будем говорить, что кандидат b предпочтительнее кандидата a, если сумма величин N_i на тех колонках, в которых b встречается ранее a, больше, чем сумма этих величин в остальных колонках профиля предпочтений.

Приведем наиболее известные правила голосования. Причем правила выбора будем рассматривать как множественные, то есть допускается выбор более чем одного элемента из множества X. Правило абсолютного большинства: выбирается тот кандидат, которого предпочитают любому другому абсолютное большинство ($\geq \frac{1}{2}N$) выборщиков. Это правило всегда применимо для $N=2$. Однако для $N>2$ множество выбора может оказаться пустым.

Правило относительного большинства выбирает те элементы множества X, для которых мощность множества $M_1(x) = \{i : F_i(x) = 1\}$ максимальна.

Определим бинарное отношение предпочтения $\preceq$ на множестве X следующим образом: обозначим $\chi(x,y)$ мощность множества $\{i : F_i(x) \leq F_i(y)\}$. Элемент y предпочтительнее элемента x, $x \preceq y$ в том и только в том случае, когда $\chi(x,y) \geq \frac{M}{2}$, то есть не менее половины выборщиков предпочитают кандидата y кандидату x. Отношение $\preceq$ является отношением парнодоминирования на множестве X. Легко показать, что при $N\geq 3$ отношение $\preceq$, вообще говоря, не является отношением порядка.

Ряд правил голосования строится на основе отношения $\preceq$. Например, правило Кондорсе: выбирается тот элемент (или элементы) $x^*\in X$, для которого $\forall y\in X,\ y\preceq x^*$. Заметим, что правило Кондорсе часто приводит к пустому множеству выбора.

Существует целый класс правил выбора, которые обладают следующим свойством. Для тех задач, для которых существует единственный кандидат, выбираемый по правилу Кондорсе, эти правила выбирают того же самого кандидата. Такие правила называются состоятельными по Кондорсе.

Рассмотрим некоторые из таких правил.

Правило Копленда. Для каждого элемента $x\in X$ вычисляется оценка Копленда:

$$K(x) = \sum_{y\in X} \varepsilon(x,y)\,, \quad \text{где}\ \varepsilon(x,y) = \begin{cases} +1,\ \text{если}\ \chi(y,x) > M/2 \\ -1\ \text{если}\ \chi(y,x) < M/2 \\ 0\ \text{если}\ \chi(y,x) = M/2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Выбирается элемент $x\in X$ с максимальной оценкой Копленда.

Правило Симпсона. Для каждого элемента $x \in X$ вычисляется оценка Симпсона:

$$S(x) = \min_{y \in X} \chi(y, x) . \qquad (2)$$

Выбирается элемент с максимальной оценкой Симпсона.

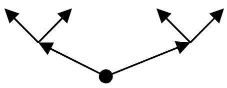

Рис.1.

Правило сравнений по бинарному дереву. Это правило можно применять лишь в том случае, когда не существует элементов $x,y \in X$, для которых $x \prec y$ и $y \prec x$, то есть $\forall x, y \in X, \chi(x, y) \neq \frac{M}{2}$. Выбирается произвольное бинарное дерево - связный ориентированный граф без циклов с числом вершин ≥3, у которого каждая вершина, кроме одной – корневой, имеет полустепень захода (число входящих дуг) 1, а полустепень исхода (число исходящих дуг) либо 2, либо 0. Корневая вершина имеет полустепень захода 0. Вершины с полустепенью исхода 0 называются концевыми. Каждой концевой вершине ставится в соответствие элемент множества $x \in X$. Правило выбора реализуется в несколько этапов. На каждом этапе выбираются две концевые вершины, для которых входящие в них дуги имеют общее начало. Этому началу ставится в соответствие один из двух, приписанных концевым вершинам, элементов x,y множества X, а именно: элемент x, если $y \prec x$, в противном случае - y. Рассматриваемые вершины и входящие в них дуги удаляются из дерева. Процесс повторяется до тех пор, пока не останется одна вершина. Выбирается элемент x^*, соответствующий этой вершине. Правило выбора по бинарному дереву называется полным, если для каждого элемента множества X найдется хотя бы одна концевая вершина, которой этот элемент приписан. Соответствующее бинарное дерево называется полным деревом сравнений.

Все три перечисленные правила Копленда, Симпсона и полные правила сравнений по бинарному дереву являются состоятельными по Кондорсе. Все эти правила построены на основании отношения парнодоминантности $\prec$.

Другая большая группа правил строится на основе свертки критериев $F_i(x)$. А именно: определяется агрегированный критерий по правилу

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi(F_i(x)) . \qquad (3)$$

Решение находится из условия $F(x) \to max$. Функцию $F(x)$ называют числом очков кандидата x.

Здесь ψ - невозрастающая функция, отличная от константы $\psi:\{1,2,\ldots,M\} \to R^1$. В частности, критерий относительного большинства – это критерий именно такого вида при условии

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t = 1 \\ 0, \text{ при } t \neq 1 \end{cases}.$$

Классическое правило Борда является правилом с подсчетом очков при $\psi(t) = M - t$.

Критериальные правила вида (3) называются правилами с подсчетом очков.

Еще одна группа – двухэтапные правила. На первом этапе по одному из правил с подсчетом очков определяются первые два кандидата, с наибольшим числом очков. На втором этапе выбор осуществляется из этих двух кандидатов по правилу абсолютного большинства.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теперь результаты предыдущего раздела будут обобщены для правил принятия решения, согласованных с произвольным отношением парнодоминирования $\prec$ на конечном множестве X.

Отношение парнодоминирования на конечном множестве X может быть задано ориентированным графом, вершины которого представляют возможные варианты выбора решения и вершина a соединена дугой с вершиной b в том и только в том случае, когда решение $a \prec b$. Если для всех пар (a,b), в которых $a \neq b$, справедливо одно и только одно из двух утверждений $a \prec b$ или $b \prec a$, то это отношение будем называть полным. Граф полного отношения прнодоминирования представляет собой турнир, то есть его носителем является полный граф K_n, где n число вариантов выбора. Иногда отношение $a \prec b$ имеет числовую характеристику $\varphi(a,b)$ (степень доминирования). В этом случае, граф, представляющий отношение, будет взвешенным, каждой дуге, соответствующей отношению $a \prec b$, будет приписан вес $\varphi(a,b)$.

Пусть на конечном множестве X задано отношение полного парнодоминирования $\prec$. Будем рассматривать правила принятия решений, основанные на этом отношении при следующих определяющих соотношениях. Во-первых, правило принятия решений определено на любом непустом подмножестве $A \subseteq X$ и каждому такому подмножеству A ставит в соответствие один или несколько элементов из A. Во-вторых, если $a \prec b$, то на двухэлементном множестве $\{a,b\}$ по этому правилу выбирается элемент b.

Наиболее известным правилом выбора является правило Кондорсе. Это правило в общем случае формулируется следующим образом. По правилу Кондорсе выбирается элемент $x^* \in X$, такой, что $\forall x \in X, x \neq x^* \Rightarrow x \prec x^*$. Заметим, что оптимальный по правилу Кондорсе элемент в общем случае может и не существовать.

Попытаемся обобщить это правило таким образом, чтобы выбор на любом множестве приводил к непустому множеству оптимальных решений.

Циклом Кондорсе называется такое подмножество $A \subseteq X$, что

$$\forall x \in A, \exists x_1, x_2, ..., x_k \Rightarrow x \prec x_1 \prec x_2 \prec ... \prec x_k \prec x \tag{4}$$

Легко показать, что множество вершин A, обладающее свойством (4), действительно является циклом в графе, представляющем отношение парнодоминирования $\prec$, либо состоит из единственной вершины.

Теорема 1. Для любого полного отношения парнодоминирования существует цикл Кондорсе.

Доказательство. Действительно, в качестве множества A выберем множество вершин графа G, представляющего отношение парнодоминирования, таких, что $\forall a \in A$ и для любой вершины $x \in X$ существует ориентированный путь, соединяющий вершину x с вершиной a в графе G. Множество A и есть цикл Кондорсе. Покажем, что это множество не пусто. Для любой вершины $x \in X$ рассмотрим множество $B(x)$ – множество всех вершин $\{y\}$, для которых существует ориентированный путь, соединяющий вершину y с вершиной x. Рассмотрим два таких множества $B(x_1)$ и $B(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Из свойства полноты отношения $\prec$ следует, что верно ровно одно из двух соотношений $x_1 \prec x_2$ или $x_2 \prec x_1$. Пусть, например, верно первое из них. Тогда $B(x_1) \subseteq B(x_2)$. Выберем среди множеств $B(x)$ множества, максимальные по включению. Такие множества обязательно существуют в силу доказанного свойства и конечности множества X. Пусть это будут множества $B(x_1), B(x_2), ..., B(x_k)$. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые порождают эти множества, образуют цикл Кондорсе.

Обобщенное правило Кондорсе. Для полного отношения $\prec$ в качестве множества оптимальных решений выбирается цикл Кондорсе. В том случае, когда цикл Кондорсе состоит из единственной точки, приходим к классическому правилу Кондорсе.

Рассмотрим обобщения других правил выбора большинством голосов на произвольное отношение парнодоминирования.

Обобщенное правило Копленда. Для ориентированного графа определим алгебраическую степень вершины, как разность числа входящих и исходящих дуг. Правило выбора Копленда будет формулироваться следующим образом. Выбираются те элементы множества X, для которых алгебраическая степень соответствующих им вершин в графе G отношения парнодоминирования $\prec$ максимальна. Если существует единственный элемент, оптимальный по Кондорсе, то результат применения правила Копленда и Кондорсе будет одинаковым. Действительно, единственный оптимальный по Кондорсе элемент будет иметь алгебраическую степень $n-1$, где n – число элементов множества X, и эта степень, естественно, является максимальной.

Пример, который приведен на рис.2, показывает, что в общем случае результаты применения правила Кондорсе и Копленда различны. Обозначим через $Kn(X)$ – множество элементов, оптимальных по правилу Кондорсе, а через $Kp(X)$ – множество элементов X, оптимальных по правилу Копленда. Тогда $Kn(X)=\{1,2,3,4\}$, а $Kp(X)=\{3,4\}$

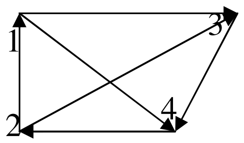

Рис. 2.

Теорема 2. Множество оптимальных по Копленду элементов содержится в цикле Кондорсе, то есть $Kp(X) \subseteq Kn(X)$.

Доказательство. Для доказательства потребуется следующая

Лемма. Если для элемента $x\in X$ найдется такой элемент $y\in Kn(X)$, что $y\prec x$, то $x\in Kn(x)$.

Доказательство леммы. Для любого элемента $x\in X$ найдется такой элемент $x^*\in Kn(X)$ и $x_1,x_2,\ldots x_k\in X$, что $x\prec x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_k\prec x^*$. Из этих соотношений и условия $y\prec x$, где $y\in Kn(X)$ следует, что $x\in Kn(X)$. Лемма доказана.

Заметим, что из леммы непосредственно следует, что для любого элемента $x\in X\backslash Kn(X)$ и $y\in Kn(X)$ справедливо соотношение $x\prec y$.

Доказательство теоремы проведем методом от противного. Выберем произвольный элемент $x\in Kp(X)$. Предположим, что $x\notin Kn(X)$. Пусть количество элементов в цикле Кондорсе равно k, а количество элементов y, связанных с элементом x соотношением $y\prec x$, равно m. Тогда алгебраическая степень элемента x не более, чем m-k. С другой стороны, так как $\forall y\in Kn(X), x\prec y$, то алгебраическая степень любого элемента из $Kn(X)$ не менее чем $m+1-(k-2)=m-k+3$. То есть алгебраическая степень элемента x не является максимальной, что противоречит условию $x\in Kp(X)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть теперь граф G, который представляет полное отношение парно доминирования, взвешенный граф, то есть каждой существующей в графе G дуге, соединяющей вершину i с вершиной j, поставлено в соответствие положительное число w_{ij} – вес этой дуги. Это число в графе отношения можно интерпретировать как степень превосходства вершины j над вершиной i. Будем предполагать, что не существует элементов, для которых одновременно $x\prec y$ и $y\prec x$, то есть в графе G не существует ориентированных циклов длины 2. Дополним множество весов $\{w_{ij}\}$ до квадратной матрицы, положив $w_{ji}=-w_{ij}$. Положим $W=\max\limits_{i,j} w_{ij}$.

Определение. Оценкой Симпсона для вершины i называется величина

$$S_i=\min_j\{1+\frac{w_{ji}}{W}\} \tag{5}$$

Обобщенное правило Симпсона. Обобщенным правилом Симпсона называется правило выбора, которое на множестве X с взвешенным отношением парнодоминирования выбирает элемент с максимальной оценкой Симпсона.

Теорема 3. Обобщенное правило Симпсона состоятельно по Кондорсе.

Доказательство. Пусть элемент $a_i\in X$ – выбирается по правилу Кондорсе, то есть в графе отношения G вершина, представляющая элемент a_i является стоком. В графе присутствуют дуги (j,i), $j=1,2,\ldots,n$. Поэтому оценка Симпсона вершины i больше, чем 1. Для любой другой вершины оценка Симпсона будет меньше единицы. Таким образом, по правилу Симпсона будет выбрана вершина, которая выбирается и по правилу Кондорсе.

Пусть бинарное отношение порождается профилем голосования. Выберем в качестве веса дуги, соединяющей кандидата i с кандидатом j количество выборщиков, предпочитающих кандидата j кандидату i. Так как наличие дуги означает предпочтение по большинству голосов, то вес любой существующей в графе дуги будет находиться в пределах $\frac{N}{2}\le w_{ij}\le N$, где N- число выборщиков. Правило Симпсона для голосования будет в этом случае совпадать с обобщенным правилом Симпсона.

Заметим, что оптимальный по Симпсону элемент не обязательно содержится в цикле Кондорсе.

Приведем полезную интерпретацию правила Симпсона для процедуры вероятностного выбора. Пусть для каждой пары элементов a_i,a_j возможны лишь два события: либо $a_i\prec a_j$, либо $a_j\prec a_i$, каждому из этих событий приписаны соответственно вероятности p_{ij} и p_{ji}, причем $p_{ij}\geq 0$ и $p_{ij}+p_{ji}=1$, $i,j=1,2,\ldots n$. Вершина a_i соединяется дугой с вершиной a_j в том и только в том случае, когда $p_{ij}\geq {}^1\!/_2$. Каждой такой дуге приписывается вес, равный величине p_{ij}. Выбор оптимального элемента множества X может быть осуществлен по правилу Симпсона.

Это правило позволяет, например, по результатам многочисленных парных турниров определить сильнейшую команду и может применяться при прогнозировании результатов соревнований.

Другим вариантом применением этого правила может быть механизм выбора в экспертных системах.

Правила голосования, основанные на бинарных деревьях, практически без изменения могут быть преобразованы в правила выбора по любому строгому отношению парнодоминирования (отношению, в котором нет эквивалентных вершин). Для этих правил имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть на множестве X задано отношение строгого парнодоминирования. Тогда:

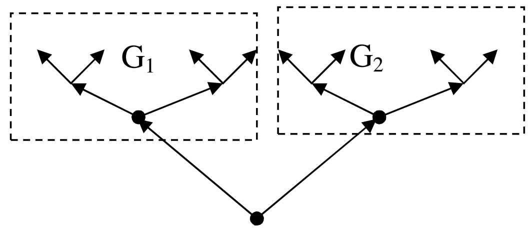

Рис.3.

1. Для любого полного бинарного дерева сравнений элементов множества X, элемент, выбираемый по этому дереву, принадлежит циклу Кондорсе.
2. Для любого элемента $x \in X$, принадлежащего циклу Кондорсе, существует полное бинарное дерево сравнений элементов множества X, по которому выбирается элемент x.

Доказательство. 1. Выше было показано, что любой элемент цикла Кондорсе доминирует над любым элементом, не принадлежащем циклу. Поэтому в любом дереве парных сравнений победить может только элемент из цикла Кондорсе.

2. Пусть имеется два (вообще говоря, неполных) бинарных дерева сравнений G_1 и G_2, по которым выбирается один и тот же элемент $x \in X$. Пусть множества концевых вершин этих деревьев соответственно $A, B \subseteq X$. Тогда существует стандартная процедура построения бинарного дерева сравнений, по которому выбирается тот же элемент x с множеством концевых вершин $A \cup B$. Это дерево получается добавлением к объединению графов G_1 и G_2 новой вершины, которая соединяется дугами с корневыми вершинами деревьев G_1 и G_2. Пример такого построения показан на рис. 3. Теперь теорема легко доказывается. Пусть элемент x принадлежит циклу Кондорсе. Тогда для любого элемента $y \in X$ можно построить цепочку сравнений $y \prec y_1 \prec y_2 \prec \ldots \prec y_k \prec x$. По этой цепочке сравнений строится бинарное дерево сравнений, по которому выбирается элемент x (рис.4). Объединяем такие деревья с помощью операции, описанной выше, до тех пор, пока бинарное дерево сравнений не станет полным.

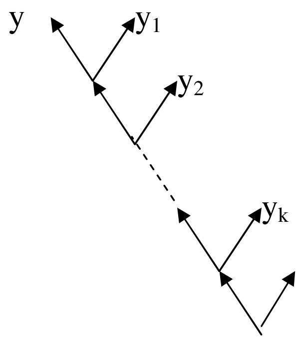

Рис. 4.

Рассмотрим теперь обобщения правил с подсчетом очков. Будем предполагать, что каждая дуга графа G, представляющего заданное отношение парно доминирования, взвешена действительным числом (степенью превосходства). Это число может быть как положительным, так и отрицательным или нулем.

Обобщенное правило Борда. Выбирается такая вершина графа, для которой алгебраическая сумма весов дуг, инцидентных к ней, максимальна. В алгебраической сумме каждое слагаемое входит со знаком «+», если дуга, соответствующая этому слагаемому, входит в вершину и со знаком «-», если эта дуга исходит из вершины.

ГРАФ ВЫБОРА. ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ ДЛЯ ПАРНОДОМИНАНТНЫХ ПРАВИЛ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Пусть на множестве X задано отношение парнодоминантности $\prec$. Обозначим через $\Gamma=\{g\}$ группу преобразований множества X. Группа Γ сохраняет заданное отношение парнодоминантности, если из условия $x \prec y$ следует, что $\forall g \in \Gamma \quad g(x) \prec g(y)$. Если X – конечное множество, то отношение толерантности может быть задано ориентированным графом G, вершинами которого служат элементы множества X, а дуги соответствуют наличию отношения $\prec$ между элементами. Группа Γ может рассматриваться как подгруппа группы перестановок вершин графа. Условие инвариантности отношения относительно отображений группы Γ равносильно условию: Γ является подгруппой группы автоморфизмов графа G.

Таким образом, исследование свойств симметрии отношения $\prec$ сводится к исследованию группы автоморфизмов графа G.

Рассмотрим теперь правило принятия решений, построенное на основе заданного отношения парнодоминантности. Правило принятия решений называется инвариантным относительно действия группы преобразований $\Gamma=\{g\}$, если оно перестановочно с действием группы Γ. Другими словами, если согласно этому правилу на множестве X некоторое его подмножество A, то для любого преобразования $g \in \Gamma$ на множестве $g(X)$ по этому правилу будет выбираться подмножество $g(A)$. Очевидно, что если отношение парнодоминантности инвариантно относительно группы Γ, то и любое правило принятия решений будет инвариантным относительно действия той же группы. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть теперь правило принятия решений построено на основе взвешенного отношения парнодоминантности $\prec$ с антисимметричной матрицей весов $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. Каждую такую матрицу можно рассматривать как элемент $\frac{n(n-1)}{2}$-мерного линейного пространства антисимметричных матриц. Пусть теперь группа *Г={g}* – подгруппа группы преобразований этого пространства. Правило принятия решений будем называть инвариантным относительно действия группы *Г*, если результат применения этого правила при любой фиксированной матрице весов $a=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ не меняется, если матрицу весов a заменить на матрицу $g(a)$ для любого элемента $g\in Г$.

Рассмотрим два примера.

1) Обобщенное правило Симпсона. В этом случае правило выбора, построенное по антисимметричной матрице $a=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, имеет вид:

$$\min_{j}\left\{1+\frac{2a_{ji}}{\sum_{k,l=1}^{n}|a_{kl}|}\right\}\to\max$$

Группа преобразований, сохраняющих это правило выбора, состоит из всех преобразований вида $a_{ij}\to sign(a_{ij})\varphi(|a_{ij}|)$, где $\varphi(t)$ - произвольная монотонно возрастающая функция одной переменной.

2) Обобщенное правило Борда. Правило принятия решения можно представить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\to\max$$

В этом случае в качестве группы преобразований можно взять преобразования вида: $a_{ij}\to ca_{ij}+\beta_{ij}$, где (β_{ij}) - антисимметричная матрица, для которой выполнено условие $\forall i=1,2,...,n\ \ \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}=C$, где C – постоянная.

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ

Правила принятия решения, связанные с отношением парно доминирования, удобно применять в том случае, когда отношения предпочтения на множестве объектов выбора носят вероятностный или нечеткий характер.

Рассмотрим пример с нечетким отношением парнодоминирования.

Пусть отношение доминирования между двумя объектами оценивается по качественной шкале:

1) *a* гораздо меньше *b* или *b* гораздо больше *a*;

2) *a* немного меньше *b* или *b* немного больше *a*.

Припишем паре *(a,b)* вес 1, если *a* гораздо меньше *b*, вес 1/2, если *a* немного меньше *b*, вес -1/2, если *b* немного меньше *a*, вес -1, если *b* гораздо меньше *a* и вес, равный 0, во всех остальных случаях. В результате получим антисимметричную матрицу весов $a=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. Далее, основываясь на этой матрице, можно применять один из методов выбора по отношению парнодоминантности, которые были описаны в предыдущем разделе.

Аналогичный механизм можно применить и в том случае, когда для каждого отношения доминирования определена его вероятность, важность, экспертная оценка и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич В.А., Меншиков И.С. Институты согласия -М.: Знание -1989. -48с.
2. Данилов М.И., Сотсков А.И. Механизмы группового выбора -М.: Наука -1991. –176с.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели -М.: Мир -1991. -464с.

4. Moulin H. The strategy of social choice. Advanced Textbooks in Economics - Amsterdam, New York, Oxford: Noth Holland publishing company -1983. -№18. –214p.
5. Arrow K.J. Rational Choice Functions and Ordering Economica (N.S.) -1959. -V.26. -P.121-127.
6. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории -М.: Наука -1990. -240с.
7. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений -М.: Наука -1989. -320с.

УДК 519.612.2:512.56

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ЗАПОЛНЕННЫМ *I*–ЫМ СТОЛБЦОМ

Курапов С.В., к.ф.-м.н., доцент, Кондратьева Н.А., к.ф.-м.н., доцент

Запорожский национальный университет

В данной работе приведены рекуррентные формулы для вычисления определителей ленточных матриц с помощью методов алгебры структурных чисел.

Ключевые слова: ленточные матрицы, алгебра структурных чисел, определитель

Курапов С.В., Кондрат'єва Н.О. ВИЗНАЧНИКИ ТРИДІАГОНАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗАПОВНЕНИМ *i*–им СТОВПЦЕМ / Запорізький національний університет, Україна

У даній роботі наведені рекурентні формули для обчислення визначників стрічкових матриць за допомогою методів алгебри структурних чисел.

Ключові слова: стрічкові матриці, алгебра структурних чисел, визначник

Kurapov S.V., Kondratyeva N.A. A THREE-DIAGONAL MATRIXES' DETERMINANTS WITH THE FILLED COLUMN *i* / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The recurrence formulas for calculation of the banded matrixes' determinants by means of the methods of structural numbers' algebra are brought in given work.

Key words: banded matrixes, algebra of structural numbers, determinant

Введение. При использовании интерполяционных сплайнов в задачах цифровой обработки сигналов [1], а также в других областях практической деятельности человека приходится решать системы линейных уравнений определенного вида, где матрица коэффициентов представляет собой трехдиагональную матрицу. В литературе [2] приведены рекуррентные формулы для вычисления определителя такой матрицы, однако для полного решения системы уравнений методом Крамера необходимо иметь и методы вычисления определителей матриц с заполненным *i*-столбцом

Постановка задачи. Получить рекуррентные формулы для вычисления определителя трехдиагональной матрицы с заполненным *i*-столбцом.

Вывод формул. Рассмотрим матрицу А с заполненным столбцом i. В представлении с помощью структурных чисел матрица будет иметь вид:

	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	0	…	i	…	0	0		γ_1
	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	…	i	…	0	0		γ_2
	0	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	…	i	…	0	0		γ_3
A =	0	0	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	…	i	…	0	0	=	γ_4
	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…
	0	0	0	0	…	I	…	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$		$\gamma_{n-1} + \alpha_n$
	0	0	0	0	…	I	…	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$		$\alpha_i + \alpha_{n-1} + \alpha_n$

Докажем рекуррентную формулу для вычисления определителя такой ленточной матрицы с заполненным *i* столбцом. Доказательство будем проводить, применяя, как и прежде, методы алгебры структурных чисел [3]. В данной алгебре запись ненулевых элементов в строках отображается записью соответствующих структурных чисел, характеризующих номера столбцов, а запись строк определяется соответствующим местоположением в выражениях. Таким образом, множество индексов столбцов для