

8. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наукова думка, 1976. 247с.
9. Зенкин О.В., Приварников А.К. Решение некоторых задач оптимального расположения фигур на плоскости // Тезисы докладов на IV Всесоюзной межвузовской конференции. – Тбилиси: ТГУ – 1969 – С. 85-86.
10. Зенкин О.В., Приварников А.К. Некоторые алгоритмы оптимального раскроя листового проката // Труды мех.-мат. факультета по заказам промышленности. – Днепропетровск: ДГУ, 1971. – № 1 – С. 226-233.
11. Бабаев Ф.В. Металлосбережение путем рационального раскроя материала раскрой листового проката на фигурные заготовки разных форм (№08 2003год)
12. Бабаев Ф.В. Металлосбережение путем рационального раскроя материала. раскрой листового проката на фигурные заготовки разных форм (№09 2003год)
13. Зінченко А.І., Приварников А.К. Алгоритм регулярного размещения однотипных фигур в прямоугольном листе // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – Вип. 1, Т.1. – 2006.- С. 34-38.
14. Аввакумов В.Д. Численное решение задач оптимального размещения плоских объектов // Электронный журнал «Прикладная геометрия». - Вип. 9.- №19. – 2007.- С. 13-23.

УДК 51:612.846

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДІЇ ОКОРУХОВИХ М'ЯЗИВ ПРИ ОБЕРТАННЯХ ОКА

Кирилах Н. Г., к. ф.-м. н., доцент

Кременчуцький державний політехнічний університет ім. М. Остроградського

Створено математичну модель дії окорухових м'язів при обертаннях ока. Така модель дозволяє отримувати якісні та кількісні оцінки впливу різних груп окорухових м'язів і пояснювати патології окорухового апарату.

Ключові слова: математична модель, окорухові м'язи, вектори сил тяги, моменти сил, матриця перетворення координат.

Kirilakha N.G. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗДЕЙСТВИЯ ГЛАЗОДВИГАТЕЛЬНЫХ МЫШЦ ПРИ ПОВОРОТАХ ГЛАЗА / Кременчугский государственный политехнический университет им. М. Остроградского, Украина.

Построена математическая модель действия глазодвигательных мышц при поворотах глаза. Представленная модель позволяет получать количественные и качественные оценки такого воздействия и объяснять различные патологии глазодвигательного аппарата.

Ключевые слова: математическая модель, глазодвигательные мышцы, векторы сил тяги, моменты сил, матрица преобразования координат.

Kirilakha N. MATHEMATICAL MODEL OF INFLUENCE OF EYE MOVING MUSCLES AT THE TURNS OF EYE / Kremenchuk Mykhaylo Ostrogradskiy State Polytechnical University, Ukraine.

The mathematical model of influence of eye moving muscles at the turns of eye is constructed. The presented model enables to receive the qualitative and quantitative estimations of such influence and to explain different pathologies of eye moving system.

Key words: mathematical model, eye moving muscles, vectors of tractive forces, moments of forces, matrix of transformation of coordinates.

Актуальність. Створення моделі дії окорухового апарату залишається серйозною проблемою в офтальмології. Така модель дозволила б хірургу прогнозувати результати операції і тим самим покращити ефект від операції та запобігти можливих ускладнень. Вивченню дії окорухових м'язів присвячено досить багато досліджень, проте їм притаманні певні недоліки. По-перше, основна маса досліджень не носить кількісного характеру. Далі, прикріплення окорухових м'язів до склери розглядається як точки на поверхні очного яблука, хоча насправді зони прикріплення мають досить значну протяжність [1,2]. Настільки значну, що вона суттєво впливає на особливості біомеханіки окорухового апарату. Найбільше це стосується косих м'язів. Крім того, більшість праць не розглядає детально зміну дії окорухових м'язів при виведенні очного яблука із первинної позиції погляду [1,2]. Загалом можна сказати, що роботам із цього питання бракує детальної математичної розробки і кількісних оцінок.

Мета. Побудові математичної моделі дії очорухових м'язів, за допомогою якої можливо б було робити кількісні оцінки, і присвячена дана робота.

У роботі прийняті такі положення:

1. Очне яблуко розглядається як сфера з певним радіусом r .

2. Введено до розгляду тривимірну декартову систему координат $OXYZ$ (див. рис.1), таким чином, що точка O збігається з центром ока, вісь OY проходить через вершину рогики ока (точка M_0), вісь OZ проходить через вершину ока (точка B). Введено до розгляду також спеціальну сферичну систему координат, яка отримала назву офтальмографічна сферична система координат (ОССК) φ, θ (див. рис.1) [3]. При обертаннях ока ці системи залишаються нерухомими. Аналогічні системи $OX_1Y_1Z_1$ та φ_1, θ_1 , $OX_2Y_2Z_2$, φ_2, θ_2 і т. д. жорстко пов'язані з оком і обертаються разом із ним.

3. Будемо розглядати шість основних м'язів: горизонтальні прямі м'язи MRM та MRL; вертикальні прямі м'язи MRS та MRI; косі м'язи MOS і MOI. Місце прикріплення кожного м'яза будемо розглядати у вигляді трьох точок на поверхні очного яблука, а самі м'язи – як трійку векторів, що виходять із цих точок під певними кутами до координатних площин.

4. Тобто, маємо шість груп векторів, напрямком яких (згідно з прийнятими в офтальмологічній практиці положеннями) визначається наступним чином: для групи MRM та MRL приймаємо, що напрямком тяги м'яза іде по дотичній до поверхні очного яблука в горизонтальній площині; для групи MRS та MRI прийнято, що напрямком тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що проходить під кутом 23° до координатної площини OYZ назад і медіально (у негативному напрямку осей OX і OY); для точок прикріплення косих м'язів (MOS і MOI) приймаємо, що напрямком тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що має з площиною OYZ кут 51° , уперед і медіально (по осі OX у негативному напрямку, а по осі OY – у позитивному напрямку) [1].

5. Дія очорухових м'язів визначається величиною важелів м'язів і силою тяги кожного м'яза (довжиною вектора тяги).

Задачі. Реалізація основної мети роботи призводить до розв'язання двох задач: по-перше, побудова векторів сил тяги очорухових м'язів та їх моментів у первинній позиції погляду; по-друге, з'ясування того, як вони змінюватимуться в різних системах координат, при обертаннях ока.

Згідно з вищеведеними умовами, вектор тяги будемо як такий, що йде уздовж прямої перетину двох площин, одна з яких є дотичною в точці прикріплення м'яза, інша – визначена напрямком тяги м'яза. З цього випливає, що вектор слід шукати як векторний добуток векторів нормальних до зазначених площин:

$$\vec{F}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ A_i & B_i & C_i \end{vmatrix} \cdot t_i \cdot K_i, \quad (1)$$

де x_i, y_i, z_i - координати точки прикріплення i -го м'яза, A_i, B_i, C_i - координати нормального вектора другої площини.

Для точок прикріплення м'язів MRM та MRL необхідно прийняти $A=0, B=0, C=1$. Для точок прикріплення м'язів MRS та MRI – $A=\cos 23^\circ, B=-\sin 23^\circ, C=0$. А для точок прикріплення м'язів MOS та MOI з умов випливає, що $A=\cos 51^\circ, B=\sin 51^\circ, C=0$.

Параметр t_i – нормуючий множник, який приводить довжину кожного вектора до одиниці:

$$|t_i| = \frac{1}{\sqrt{(y_i \cdot C_i - B_i \cdot z_i)^2 + (A_i \cdot z_i - x_i \cdot C_i)^2 + (x_i \cdot B_i - A_i \cdot y_i)^2}}. \quad (2)$$

А знак для цього параметра обираємо такий, щоб він забезпечував правильний напрям вектора тяги – зовні від поверхні очного яблука.

K - довільний позитивний множник, який уведено для того, щоб управляти довжиною вектора.

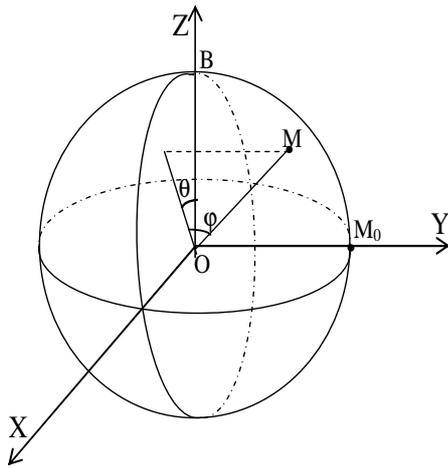


Рис. 1.

Схематичне зображення очного яблука, т. M_0 - вершина рогівки ока, т. B - вершина ока, т. M - довільна точка на поверхні ока. φ і θ - координати офтальмологічної сферичної системи координат (ОССК)

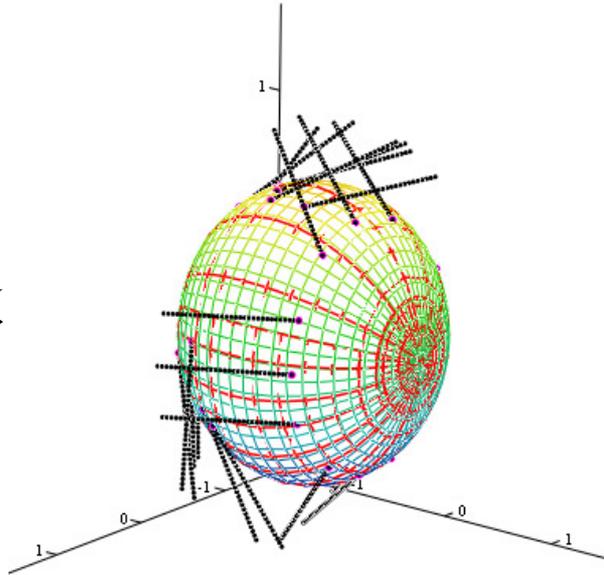


Рис. 2.

Сферичне яблуко та вектори сил тяги в первинній позиції погляду

Отже, вектор тяги, позначимо його $\vec{F}_i(Fx_i, Fy_i, Fz_i)$, у первинній позиції погляду, остаточно набирає вигляду:

$$\vec{F}_i = ((y_i C_i - B_i z_i) \vec{i} + (A_i z_i - x_i C_i) \vec{j} + (x_i B_i - A_i y_i) \vec{k}) \cdot t_i \cdot K_i. \quad (3)$$

Отримані в такий спосіб вектори показано на рис. 2. Рис. 2 виконано з використанням графічних можливостей програми Mathcad2000.

Дія м'язів у первинній позиції погляду може бути описана моментами цих векторів відносно осей координат, що знаходяться за формулами [5]:

$$Mx_i = -Fy_i \cdot z_i + Fz_i \cdot y_i, \quad (4)$$

$$My_i = Fx_i \cdot z_i - Fz_i \cdot x_i, \quad (5)$$

$$Mz_i = -Fx_i \cdot y_i + Fy_i \cdot x_i, \quad (6)$$

де Fx_i, Fy_i, Fz_i - проєкції вектора сили, що діє в i -й точці, на осі OX, OY та OZ відповідно, а Mx_i, My_i, Mz_i - моменти цієї сили відносно відповідних осей.

Визначення того, як змінюються вектори сил тяги при обертаннях, спирається на те положення, що при обертаннях поверхні навколо нерухомого центра, нові декартові координати точок цієї поверхні в нерухомій системі координат визначаються за формулами [6]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де A - матриця перетворення координат, вигляд якої залежить від того, яким чином визначено обертання. Тоді нові сферичні координати точок прикріплення можна визначити із співвідношень:

$$Q(\theta', \varphi') = A \cdot Q(\theta, \varphi), \quad (8)$$

де Q - матриця-стовпчик:

$$Q(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

У знаходженні матриці перетворень координат A полягає основна складність цієї задачі. Її визначення може бути різним, залежно від того, які вихідні дані є в розпорядженні лікаря.

Випадок 1. Якщо відомо, на який кут обернуто очне яблуко навколо кожної з координатних осей, то матриця A визначається як добуток матриць:

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & -\sin \eta \\ 0 & \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$A_y = \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu \end{pmatrix}, \quad (12)$$

кожна з яких представляє перетворення координат при обертанні відповідно навколо осей OZ , OX та OY .

Так, при обертанні спочатку на кут δ навколо осі OZ , а потім навколо осі OX' , у яку переходить вісь OX , на кут η , і, нарешті, навколо осі OY'' – образу осі OY після двох перетворень, на кут μ (див. рис. 3), матриця A має вигляд:

$$A = A_z \cdot A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \mu - \sin \delta \sin \eta \sin \mu & -\sin \delta \cos \eta & \cos \delta \sin \mu + \sin \delta \sin \eta \cos \mu \\ \sin \delta \cos \mu + \cos \delta \sin \eta \sin \mu & \cos \delta \cos \eta & \sin \delta \sin \mu - \cos \delta \sin \eta \cos \mu \\ -\cos \eta \sin \mu & \sin \eta & \cos \eta \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Слід зазначити, що в окремих випадках, коли одне або два обертання відсутні, матрицю перетворення A можна отримати з (13), якщо в добутку вилучити один або два з множників, наприклад: $A = A_z \cdot A_x$, означає обертання навколо осей OZ та OX .

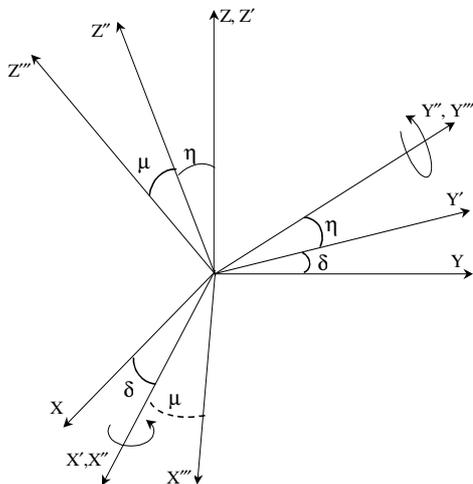


Рис. 3.

Обертання навколо осей координат

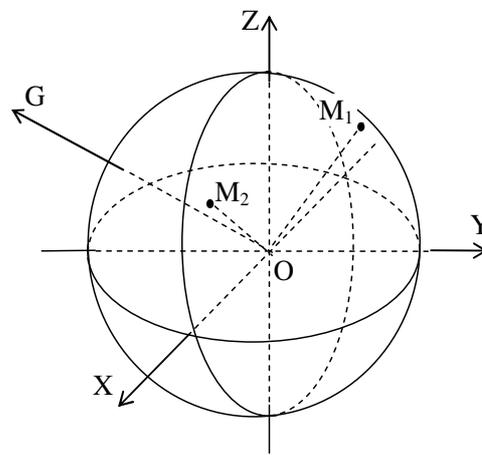


Рис. 4.

Обертання навколо довільної осі

Випадок 2. Якщо відомо лише, як змінюється положення якоїсь певної точки на поверхні очного яблука при його обертанні, тобто зміна її координат, тоді задача ставиться так: визначити матрицю перетворення A , що відповідає обертанню, при якому певна точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перейде в положення

точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Або як будуть змінюватися сферичні координати точок на поверхні ока в ОССК, при обертанні, яке точку $M_1(\theta_1, \varphi_1)$ переведе в положення точки $M_2(\theta_2, \varphi_2)$?

Найбільш доцільним можна вважати обертання навколо осі, що є перпендикулярною до площини M_1OM_2 на кут $\angle M_1OM_2$ (рис. 4).

Як відомо [6], при повороті на кут ω декартової системи координат $OXYZ$ навколо осі OG , що утворює кути α, β, γ відповідно з осями координат OX, OY , та OZ , координати точки змінюються за формулою:

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \tilde{A}_G \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\tilde{A}_G = \begin{pmatrix} \cos\omega + \tau \cos^2 \alpha & \cos\gamma \sin\omega + \tau \cos\alpha \cos\beta & -\cos\beta \sin\omega + \tau \cos\alpha \cos\gamma \\ -\cos\gamma \sin\omega + \tau \cos\beta \cos\alpha & \cos\omega + \tau \cos^2 \beta & \cos\alpha \sin\omega + \tau \cos\beta \cos\gamma \\ \cos\beta \sin\omega + \tau \cos\gamma \cos\alpha & -\cos\alpha \sin\omega + \tau \cos\gamma \cos\beta & \cos\omega + \tau \cos^2 \gamma \end{pmatrix}, \quad (15)$$

Отже, матрицю A перетворення координат точок рухомої поверхні ока в нерухомій системі координат $OXYZ$ слід шукати як обернену до матриці \tilde{A}_G :

$$A = A_G = \tilde{A}_G^{-1}, \quad (16)$$

індекс G використано задля того, щоб підкреслити, що ці матриці представляють обертання навколо допоміжної осі OG .

де $\omega = \angle M_1OM_2$, $\tau = 1 - \cos \omega$, (див. рис. 4).

Направляючі косинуси осі обертання $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ знайдемо з того, що направляючий вектор осі є векторним добутком векторів OM_1 і OM_2 , а тому:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

звідки після досить громіздких перетворень, з урахуванням зв'язку між декартовими та сферичними координатами, отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \theta_1}{|\bar{N}|}; \\ \cos \beta &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1) \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{|\bar{N}|}; \\ \cos \gamma &= \frac{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \theta_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \theta_2}{|\bar{N}|}; \end{aligned} \quad (18)$$

де $|\bar{N}|$ – довжина вектора \bar{N} :

$$|\bar{N}| = ((\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \theta_1)^2 + (\sin(\theta_2 - \theta_1) \cos \varphi_2 \cos \varphi_1)^2 + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \theta_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \theta_2)^2)^{1/2}. \quad (19)$$

А $\cos \omega$ знайдемо з визначення скалярного добутку двох векторів:

$$\cos \omega = \frac{OM_1 \cdot OM_2}{|OM_1| \cdot |OM_2|}, \quad (20)$$

або, оскільки $|OM_1| = 1$, та $|OM_2| = 1$, отримаємо:

$$\cos \omega = \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1, \quad \text{а} \quad \sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega}, \quad (21)$$

враховуючи, що кути обертання не перевищують 180° .

Таким чином, визначаємо за формулами (18)-(21) направляючі косинуси осі обертання та кут обертання, а потім за (15)-(16) – елементи матриці перетворення декартових координат A при обертанні.

З виразів (15)-(21) можна визначити повороти ока в діагностичні позиції погляду. У такому випадку слід вказати θ_1, φ_1 – сферичні координати переднього полюса ока в початковій позиції погляду і θ_2, φ_2 – нові координати цієї точки після обертання. Дововимося, що полюс ока в початковій позиції має координати $\theta = 0^\circ, \varphi = 90^\circ$. Наприклад, якщо узяти $\theta_1 = 0^\circ, \varphi_1 = 90^\circ, \theta_2 = 315^\circ, \varphi_2 = 60^\circ$, то це означає, що око повернулося так, що передній полюс ока змістився по меридіану 315° на 30° (позиція приведення-піднімання).

Але, слід зазначити, що в цьому випадку з (18) випливає $\beta = 90^\circ$, тобто обертання навколо осі OY відсутнє. Проте, коли крім зміни положення переднього полюса ока, має місце ще й циклодукція (обертання навколо осі OY), модель (14)-(21) перестає бути адекватною. Розглянемо цю задачу окремо.

Випадок 3. Якщо передній полюс ока змістився по θ^* -меридіану на кут ω і при цьому відбувається циклодукція на кут μ , то у формулах (15)-(21) слід узяти $\theta_1 = 0^\circ, \varphi_1 = 90^\circ, \theta_2 = \theta^*, \varphi_2 = 90^\circ - \omega$, а матрицю A слід визначати як добуток двох матриць при особливих умовах.

$$A = A_{GY} = A_G|_{\cos \beta=0} \cdot A_Y = A_G|_{\cos \beta=0} \cdot \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Таким чином, формули (10)-(22) дають можливість визначати нові координати точок прикріплення і векторів сил тяги окорухових м'язів практично в усіх можливих випадках у різних системах координат. Так, вектори сил дії окорухових м'язів у нерухомій системі координат визначаються за формулами

$$\bar{F}'_i = A \cdot \bar{F}_i, \quad (23)$$

а в рухомій системі координат координати цих векторів мають вигляд:

$$\bar{F}'_i = A^{-1} \cdot \bar{F}_i, \quad (24)$$

де A^{-1} – матриця, обернена до матриці A .

Багато клінічних фактів можна пояснити зміною моментів сил дії м'язів як у нерухомій, так і в рухомих системах координат. Для визначення нових моментів використовуємо формули, аналогічні (4)-(6), у яких координати точок прикріплення м'язів та векторів сил тяги замінено на нові: x'_i, y'_i, z'_i та F'_x, F'_y, F'_z відповідно.

Інколи виникає необхідність знайти нові сферичні координати точок прикріплення окорухових м'язів у нерухомій системі координат ОССК, не звертаючись до декартової системи координат. Розглянемо формули (8). Це є система трьох рівнянь відносно невідомих θ' та φ' . Якщо для зручності ввести позначення:

$$\begin{aligned} D &= a_{11} \cos \varphi \sin \theta + a_{12} \sin \varphi + a_{13} \cos \varphi \cos \theta; \\ K &= a_{21} \cos \varphi \sin \theta + a_{22} \sin \varphi + a_{23} \cos \varphi \cos \theta; \\ L &= a_{31} \cos \varphi \sin \theta + a_{32} \sin \varphi + a_{33} \cos \varphi \cos \theta; \end{aligned} \quad (25)$$

то для визначення θ' та φ' отримано співвідношення:

$$\varphi' = \arcsin K, \quad (26)$$

$$\theta' = \begin{cases} \arctg \frac{D}{L}, & \text{якщо } D \geq 0, L > 0, \\ \arctg \frac{D}{L} + 2\pi, & \text{якщо } D < 0, L > 0, \\ \arctg \frac{D}{L} + \pi, & \text{якщо } L < 0, \\ 0, & \text{якщо } L = 0 \text{ і } D = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Покажемо приклади застосування даної моделі та інтерпретації результатів. Багато інших прикладів можна знайти в [7,8]. Для реалізації алгоритму і графічного представлення результатів створено програму в системі Mathcad 2000. Зауважимо, що в наведених прикладах координати точок прикріплення м'язів вважаються відомими [4]. Нумерація точок на рис. 5-7 теж така, як прийнято в [4]. Нижніми індексами вказано вісь, відносно якої будуються моменти.

Приклад 1. Необхідно визначити, як змінюється горизонтальна вертикальна та ротаторна дія верхнього прямого м'яза (MRS) на очне яблуко в трьох точках його прикріплення при приведенні-відведенні ока в межах 30° від первинної позиції погляду

Оскільки приведення-відведення означає обертання тільки навколо осі OZ , маємо дані випадку 1, де $A = A_z$, див. (10)-(13). Приймаємо в (10) $\delta = -30^\circ, -25^\circ, \dots, +30^\circ$.

Після визначення матриці перетворення координат A , з (7) та (8) отримуємо декартові та сферичні координати точок прикріплення м'яза в новій позиції, а за формулами (24), (4)-(6) – вектори тяги і моменти сил у процесі обертання ока. На рис. 5 показано графіки зміни моментів сил у заданих точках у відносних величинах, при приведенні-відведенні ока від -30° до $+30^\circ$. Показані тут особливості дії MRS треба враховувати при плануванні хірургії цього м'яза, для передбачення „вторинних” ефектів, розрахувати які і дозволяє наша математична модель.

Приклад 2. Необхідно визначити, як змінюється горизонтальна вертикальна та ротаторна дія верхнього косоного м'яза (MOS) на очне яблуко в трьох точках його прикріплення при виведенні ока в діагностичну позицію погляду. При цьому передній полюс ока відхиляється на 30° по меридіану 225° . У цьому випадку слід узяти у формулах (15), (18)-(21) або (22) $\theta_1 = 0^\circ$, $\varphi_1 = 90^\circ$, $\omega = 30^\circ$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \omega = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\theta_2 = 225^\circ$, $\mu = 0^\circ$. На рис. 6 показано динаміку зміни моментів сил при даному обертанні.

Цей приклад демонструє збільшення торзійної і зменшення абдукторної дії MOS при приведенні та опусканні ока, що може пояснити роль MOS у конвергентному процесі при опусканні очей.

Приклад 3. Необхідно визначити, як змінюється горизонтальна, вертикальна та ротаторна дія на очне яблуко в точках прикріплення MRS, якщо око обертається таким чином, що точка прикріплення нижнього косоного м'яза (MOI) з координатами $\theta = 101,0^\circ$, $\varphi = -47,5^\circ$ займає положення з координатами $\theta = 115,5^\circ$, $\varphi = -21,1^\circ$.

Використаємо формули (15)-(21), де слід узяти $\theta_1 = 101,0^\circ$, $\varphi_1 = -47,5^\circ$, $\theta_2 = 115,5^\circ$, $\varphi_2 = -21,1^\circ$. На рис. 7 показано графіки зміни моментів сил MRS у даній ситуації.

Цей приклад безпосередньо стосується планування хірургії околомоторів, у цьому випадку рецесії MOI. З графіків (1x, 2x, 12x) видно, що вертикальна дія MRS, при будь-якій рецесії у вказаних межах залишається незмінною, м'яз діє на елевацію.

Горизонтальна дія MRS (графіки 1z, 2z, 12z) зміниться несуттєво. І лише внутрішня порція MRS (графік 12y) дещо підсилить інциклодукторну дію, у той час як інші порції MRS (графіки 1y, 2y) свою торзійну дію майже не змінять.

Тобто, завдяки нашій математичній моделі, можна сказати, що запланована рецесія MOI, практично не змінить дії MRS. Аналогічним чином можна перевірити і вплив рецесії MOI на дію інших окоорухових м'язів. Це дає змогу точно передбачити ефект операції і запобігти виникненню небажаної послідовної девіації.

Висновки. 1. У роботі визначено закономірності зміни при обертаннях ока сферичних та декартових координат прикріплень окоорухових м'язів відносно їх прикріплень у первинній позиції погляду.

2. Описано зміну векторів тяги при обертаннях ока.

3. Описано зміну моментів сил дії окоорухових м'язів на очне яблуко при обертаннях ока.

Таким чином, представлено один із можливих варіантів побудови математичної моделі дії окоорухових м'язів (моментів сил) на очне яблуко при обертаннях ока. Попри певні недоліки, що обумовлені припущеннями про незмінність абсолютних значень сил при обертаннях, така модель дає можливість отримати якісну і кількісну оцінку зміни дії окоорухових м'язів при обертаннях ока і пояснити клінічні факти.

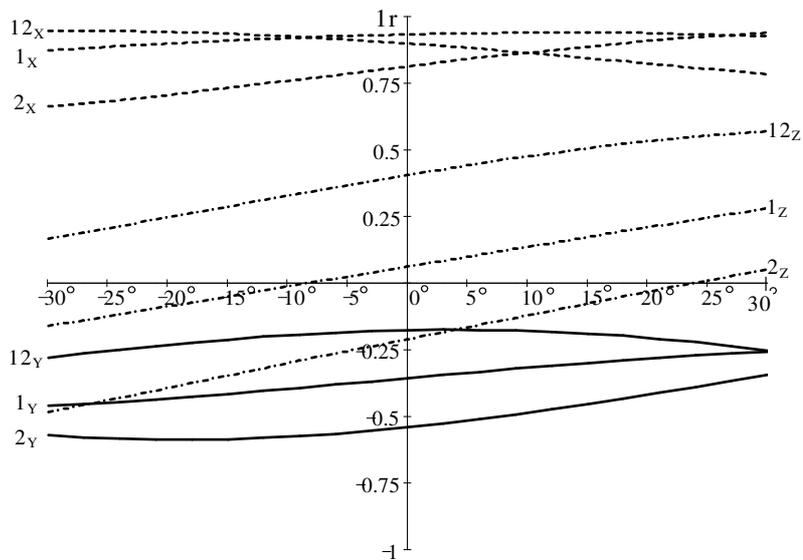


Рис. 5.

Графіки зміни моментів сил у точках прикріплення верхнього прямого м'яза у відносних величинах (r) у проєкціях на осі OX , OY , OZ декартової системи координат, при приведенні-відведенні ока від -30° до $+30^\circ$.

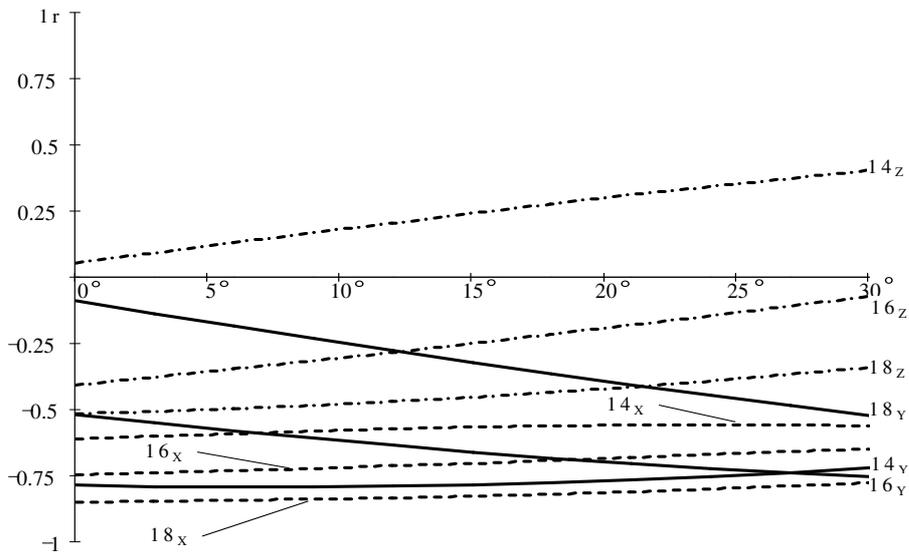


Рис. 6.

Графіки зміни моментів сил у точках прикріплення верхнього косого м'яза у відносних величинах (r) у проєкціях на осі OX , OY , OZ декартової системи координат, при виведенні ока в діагностичну позицію погляду: від 0° до приведення-опускання 30° .

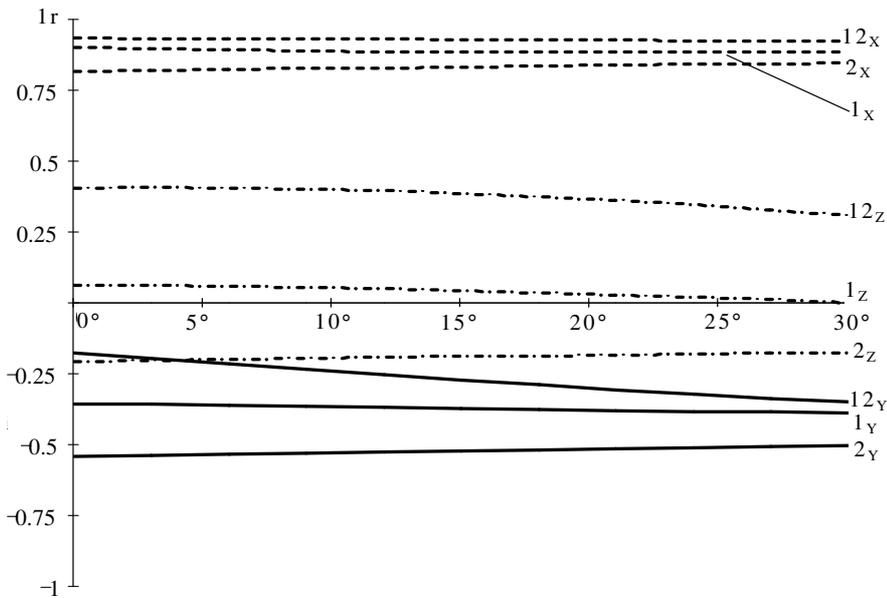


Рис. 7.

Графіки зміни моментів сил у точках прикріплення верхнього прямого м'яза у відносних величинах (r) у проекціях на осі OX , OY , OZ декартової системи координат, при повороті ока таким чином, що точка прикріплення нижнього косого м'яза з координатами в ОССК $\theta_{22} = 101,0^\circ$, $\varphi_{22} = -47,5^\circ$ займає положення з координатами $\theta'_{22} = 115,3^\circ$, $\varphi'_{22} = -21,1^\circ$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Koene A. R. Eye Mechanics And Their Implications For Eye Movement Control / A. R. Koene. – Helmholtz Instituut, 2002. – 123p.
2. Scott A. B. Planning Inferior Oblique Muscle Surgery / A. B. Scott // Reinecke R. D. Strabismus. New York, San Francisco, London: Grune&Stratton, 1978. P.347-354.
3. Топографія поверхні людського ока в сферичній системі координат / В. І. Ємченко, В. О. Мосьпан, С. О. Литовченко [та ін.] // Офтальмол. журн. – 2005. – №5. – С.75–80.
4. Про дію окоорухових м'язів на очне яблуко людини в первинній позиції погляду / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах, В. О. Мосьпан [та ін.] // Офтальмол. журн. – 2007. – №2. – С.50–56.
5. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1968. – 940с.
6. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / Петр Сергеевич Моденов. – М.: Из-во Московского университета, 1969. – 698 с.
7. Ємченко В. І. Про дію окоорухових м'язів на людське око при патології окоорухового апарату / В.І. Ємченко, Н. Г. Кирилах // Офтальмол. журн. –2008. – № 1. – С.19 – 23.
8. Ємченко В. І. Перевірка етіологічних гіпотез розвитку А-V-X синдрому за допомогою математичної моделі дії окоорухових м'язів на очне яблуко людини / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах // Офтальмол. журн. –2008. – № 2. – С.29-40.