

3. Дохняк Б.М., Киричевский В.В. Реализация алгоритмов решения трехмерных задач вязкоупругости эластомеров методом конечных элементов// Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1987, – Вып. 50. – С. 42-47.
4. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наук. думка, 2002. – 655с.
5. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. – М.: Гостехиздат, 1949. – 304с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.– К.: Наук. думка, 1976. – 483с.
7. Harrington R.F. Field computation by moment methods, Macmillan, New York, 1968.
8. Sylvester P., Chan K.K. Bubnov-Galerkin solution to wire – antenna problem. Institution of Electrical Proceedings, 1972.
9. Hassan M.A., Sylvester P. Radiation and scattering by wire antenna structures near a rectangular plate reflector. Institution of Electrical Proceedings, 1977.
10. Chari M.V., Sylvester P. Finite elements in electric and magnetic field problems. John Wiley, Chichester, 1980.

УДК 539.413:519.624.3

## ДО ПИТАННЯ ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЗГИНУ БАЛКИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Грищак В.З., д.т.н., професор, Гребенюк С.М., к.т.н., доцент, Ходаковська А.В., аспірант

*Запорізький національний університет*

У роботі розглянуто застосування гібридного методу скінченних елементів до розв'язання задачі згину балки змінної жорсткості.

*Ключові слова: метод фазних інтегралів, гібридний метод скінченних елементів, метод скінченних елементів.*

Грищак В.З., Гребенюк С.Н., Ходаковская А.В. К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ / Запорожский национальный университет, Украина

В работе рассмотрено применение гибридного метода конечных элементов к решению задачи изгиба балки переменной жесткости

*Ключевые слова: метод фазовых интегралов, гибридный метод конечных элементов, метод конечных элементов.*

Gristchak V. Z., Grebenuk S.N., Khodakovskaya A.V. TO THE QUESTION ABOUT THE ASYMPTOTIC SOLVE PROBLEM OF BEND A BEAM THAT HAS A VARIABLE INFLEXIBILITY / Zaporizhzhya national university, Ukraine

In this paper the authors considered the application of a hybrid finite elements method to solve the problem of bend a beam that has a variable inflexibility.

*Key words: a phase- integral method, a hybrid finite elements method, a finite elements method.*

У даній роботі наводиться розв'язок задачі згину балки змінної жорсткості під розподіленим навантаженням, отриманий за допомогою гібридного методу скінченних елементів. Цей метод є одним із підходів до розв'язування задач математичної фізики з малим параметром. Сутність запропонованого гібридного підходу полягає в поєднанні двох методів: метода ВКБ (метода фазних інтегралів) на першому кроці розв'язання і методу скінченних елементів (МСЕ) на другому. Тобто в МСЕ замість, наприклад, поліноміальної апроксимації використовується отриманий розв'язок за методом ВКБ. Ця ідея зустрічається в К. Флетчера, який вважав, що важливою особливістю методу Гальоркіна є можливість вибору пробних функцій таким чином, що точний розв'язок може бути отриманий з мінімально можливим числом пробних функцій. Причому використовується вся відома інформація про шуканий розв'язок. [1]

Розглянемо балку довжиною  $l$  (рис.1) під розподіленим навантаженням  $q(x)$ , зі змінною жорсткістю  $B(x)=EI(x)$ . Будемо використовувати однорідні граничні умови шарнірного закріплення. Відразу задамо закони змінення навантаження і жорсткості:  $q(x) = q_0\psi(x)$ ,  $B(x) = B_0f(x) = EI_0f(x)$ .

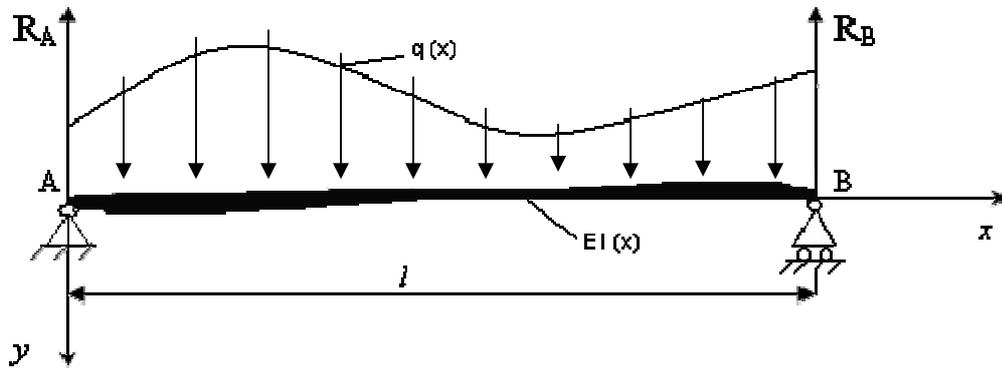


Рис. 1.

Диференціальне рівняння кривої згину має вигляд:

$$[B(x)w''']' = q(x). \quad (1)$$

Розкриємо дужки у виразі (1) з урахуванням того, що жорсткість  $B$  залежить від  $x$ :

$$Bw^{IV} + 2B'w''' + B''w'' = q(x) \quad (2)$$

У диференціальному рівнянні четвертого порядку (2) зробимо перехід до безрозмірних величин, використовуючи такі заміни:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad W = \frac{w}{l};$$

У результаті отримаємо таке рівняння

$$\frac{1}{l^3}W^{IV} B_0f(\xi) + 2\frac{1}{l}B_0f'(\xi)\frac{1}{l^2}W''' + \frac{1}{l^2}B_0f''(\xi)\frac{1}{l}W'' = q(\xi). \quad (3)$$

Після перетворення отримаємо:

$$W^{IV} + 2\bar{f}'(\xi)W''' + \bar{f}''(\xi)W'' = \frac{l^3}{B_0}q_0\phi(\xi), \quad (4)$$

$$\text{де } \bar{f}'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}; \quad \bar{f}''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f(\xi)}; \quad \phi(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{f(\xi)}.$$

$$W^{IV} + 2\bar{f}'(\xi)W''' + \bar{f}''(\xi)W'' = \lambda^4\phi(\xi), \quad (5)$$

$$\text{де } \lambda^4 = \frac{l^3q_0}{B_0}.$$

Якщо  $\lambda^4 = \frac{1}{\varepsilon^2}$ , тоді помножимо (5) на  $\varepsilon^2$ :

$$\varepsilon^2W^{IV} + a_1\bar{f}'(\xi)W''' + a_2\bar{f}''(\xi)W'' = \phi(\xi), \quad (6)$$

$$\text{де } a_1 = 2\varepsilon^2; \quad a_2 = \varepsilon^2.$$

Розв'язуючи рівняння (6), робимо заміну  $W'' = y$ :

$$\varepsilon^2y'' + a_1\bar{f}'(\xi)y' + a_2\bar{f}''(\xi)y = \phi(\xi). \quad (7)$$

Насамперед отримаємо розв'язок однорідного рівняння для (7)

$$\varepsilon^2 y'' + a_1 \bar{f}'(\xi) y' + a_2 \bar{f}''(\xi) y = 0, \quad (8)$$

Побудуємо розв'язок диференціального рівняння (8) (другого порядку) з параметром  $\varepsilon$ , методом фазних інтегралів. [2]

У відповідності до цього методу розв'язок рівняння (8) матиме вигляд

$$\bar{y} = \exp\left(\int \varepsilon^{-1} \varphi_0 d\xi\right). \quad (9)$$

Підставляючи вирази (9) та його похідні в рівняння (8) і збираючи коефіцієнти при  $\varepsilon^0$ , дістанемо рівняння вигляду:

$$\varphi_0^2 + a_2 \bar{f}'' = 0, \quad (10)$$

звідки 
$$\varphi_{0,1,2} = \pm i [a_2 \bar{f}''(\xi)]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Здобутий вираз для  $\varphi_{0,1,2}$  (11) – це однокленне ВКБ - розвинення розв'язку рівняння (8). [3]

Таким чином, розв'язок однорідного рівняння (8) має вигляд:

$$y_{одн.} = C_1 \sin\left(\int [a_2 \bar{f}''(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\right) + C_2 \cos\left(\int [a_2 \bar{f}''(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\right). \quad (12)$$

Якщо  $f(\xi) = P_0 e^{\alpha l \xi}$  і  $\psi(\xi) = N_0 e^{\beta l \xi}$ , тоді

$$\bar{f}'' = \frac{f''}{f} = \frac{P_0 \alpha^2 l^2 e^{\alpha l \xi}}{P_0 e^{\alpha l \xi}} = \alpha^2 l^2. \quad (13)$$

У (12) підставимо (13) і вираз для  $a_2 = \varepsilon^2$ , а потім візьмемо інтеграли:

$$y_{одн.} = C_1 \sin \gamma \xi + C_2 \cos \gamma \xi, \quad (14)$$

$$\text{де } \gamma = \varepsilon l \alpha.$$

Щоб знайти розв'язок неоднорідного рівняння (7), застосовуємо метод варіації довільних постійних. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$y_{заг.} = A_1 e^{(\beta - \alpha) l \xi} + \bar{C}_1 \sin \gamma \xi + \bar{C}_2 \cos \gamma \xi, \quad (15)$$

де 
$$A_1 = \frac{K_0}{(\beta - \alpha)^2 l^2 + \gamma^2} = \frac{K_0}{m^2 + \gamma^2}; \quad m = (\beta - \alpha) l;$$

причому

$$\phi(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{N_0 e^{\beta l \xi}}{P_0 e^{\alpha l \xi}} = K_0 e^{m \xi}; \quad K_0 = \frac{N_0}{P_0} \quad (16)$$

Але  $W'' = y$ , тому необхідно (15) двічі проінтегрувати, і остаточно отримаємо:

$$W = \frac{K_0}{[m^4 + \gamma^2 m^2]} e^{m \xi} - \bar{C}_1 \frac{1}{\gamma^2} \sin \gamma \xi - \bar{C}_2 \frac{1}{\gamma^2} \cos \gamma \xi + \bar{C}_3 \xi + \bar{C}_4 \quad (17)$$

Щоб знайти постійні  $\bar{C}_1 \dots \bar{C}_4$ , скористаємося однорідними граничними умовами шарнірного закріплення:

$$\bar{C}_1 = A_1 \text{ctg } \gamma - A_1 \frac{e^m}{\sin \gamma}; \quad \bar{C}_2 = -A_1; \quad \bar{C}_3 = \left( \frac{A_1}{m^2} + \frac{A_1}{\gamma^2} \right) (1 - e^m); \quad \bar{C}_4 = -\frac{A_1 (\gamma^2 + m^2)}{\gamma^2 m^2} \quad (18)$$

Підставимо (18) у (17) і отримаємо:

$$W = \frac{A_1}{m^2} e^{m\xi} - \left[ \frac{A_1}{\gamma^2} \operatorname{ctg} \gamma - \frac{A_1 e^m}{\gamma^2 \sin \gamma} \right] \sin \gamma \xi + \\ + \frac{A_1}{\gamma^2} \cos \gamma \xi + \left[ \left( \frac{A_1}{m^2} + \frac{A_1}{\gamma^2} \right) (1 - e^m) \right] \xi - \frac{A_1 (\gamma^2 + m^2)}{\gamma^2 m^2}$$

Перейдемо до  $x$ , зробивши зворотню заміну  $W = \frac{w}{l}$ ,  $\xi = \frac{x}{l}$ :

$$w = \frac{A_1 l}{m^2} e^{\frac{m}{l} x} - \frac{A_1 l (\cos \gamma - e^m)}{\gamma^2 \sin \gamma} \sin \frac{\gamma}{l} x + \\ + \frac{A_1 l}{\gamma^2} \cos \frac{\gamma}{l} x + \frac{A_1 (m^2 + \gamma^2) (1 - e^m)}{m^2 \gamma^2} x - \frac{A_1 l (m^2 + \gamma^2)}{m^2 \gamma^2} \quad (19)$$

Таким чином, на першому етапі був отриманий вираз для згину балки (19) за допомогою методу ВКБ.

На другому етапі зобразимо цей розв'язок у вигляді:

$$W = C_0 e^{\frac{m}{l} x} + C_1 \sin \frac{\gamma}{l} x + C_2 \cos \frac{\gamma}{l} x + C_3 x + C_4, \quad (20)$$

$$\text{де } C_0 = \frac{A_1 l}{m^2}; C_1 = \frac{A_1 l (e^m - \cos \gamma)}{\gamma^2 \sin \gamma}; C_2 = \frac{A_1 l}{\gamma^2}; C_3 = \frac{A_1 (m^2 + \gamma^2) (1 - e^m)}{m^2 \gamma^2}; C_4 = -\frac{A_1 l (m^2 + \gamma^2)}{m^2 \gamma^2}.$$

Тепер застосуємо метод скінченних елементів. Для рівноваги балки замінимо дію навантаження  $q(x)$  на еквівалентні зосереджені сили  $T_1$  і  $T_2$  і моменти  $M_1$  і  $M_2$  на кінцях елемента (рис. 2). [4]

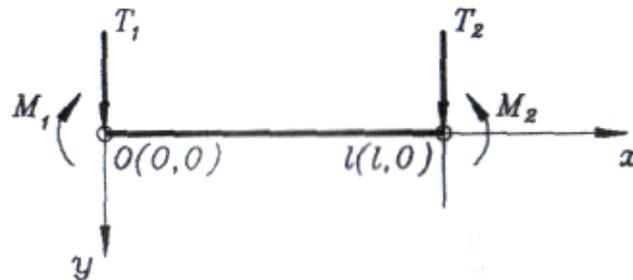


Рис. 2.

Матриця зусиль у вузлах (матриця навантаження) має вигляд:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

і матриця переміщень у вузлах:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

де  $w_1, w_2$  – прогини у вузлах;  $\theta_1$  і  $\theta_2$  – кути повороту у вузлах.

При рівновазі пружної системи функціонал повної енергії досягає мінімуму. Мінімізуючи функціонал, ми визначасмо ті деформації, при яких настає стан рівноваги.

Функціонал потенційної енергії деформації для елемента балки  $[0, l]$ :

$$\Phi = \int_0^l \left[ q(x)w - \frac{EI(x)}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right] dx. \quad (23)$$

Знайдемо рівняння пружної лінії на ділянці  $[0, l]$ , використовуючи для апроксимації вираз для згину балки (19), який був отриманий за допомогою методу ВКБ. А кути повороту  $\theta$  будуть дорівнювати:

$$\theta = \frac{dw}{dx}. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = C_0 e^{\frac{m}{l}x_1} + C_1 \sin \frac{\gamma}{l} x_1 + C_2 \cos \frac{\gamma}{l} x_1 + C_3 x_1 + C_4 \\ \theta_1 = \frac{dw_1}{dx_1} = C_0 \frac{m}{l} e^{\frac{m}{l}x_1} + C_1 \frac{\gamma}{l} \cos \frac{\gamma}{l} x_1 - C_2 \frac{\gamma}{l} \sin \frac{\gamma}{l} x_1 + C_3 \\ y_2 = C_0 e^{\frac{m}{l}x_2} + C_1 \sin \frac{\gamma}{l} x_2 + C_2 \cos \frac{\gamma}{l} x_2 + C_3 x_2 + C_4 \\ \theta_2 = \frac{dw_2}{dx_2} = C_0 \frac{m}{l} e^{\frac{m}{l}x_2} + C_1 \frac{\gamma}{l} \cos \frac{\gamma}{l} x_2 - C_2 \frac{\gamma}{l} \sin \frac{\gamma}{l} x_2 + C_3 \end{array} \right. \quad (25)$$

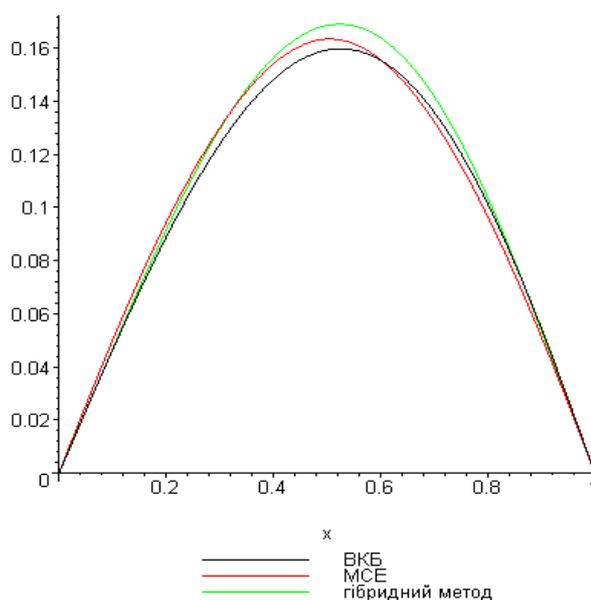
Підставивши координати вузлових точок  $0(0,0)$  і  $l(l,0)$  у систему (25), для скінченного елемента балки отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = C_0 + C_2 + C_4 \\ \theta_1 = C_0 \frac{m}{l} + C_1 \frac{\gamma}{l} + C_3 \\ w_2 = C_0 e^m + C_1 \sin \gamma + C_2 \cos \gamma + C_3 l + C_4 \\ \theta_2 = C_0 \frac{m}{l} e^m + C_1 \frac{\gamma}{l} \cos \gamma - C_2 \frac{\gamma}{l} \sin \gamma + C_3 \end{array} \right. \quad (26)$$

Розв'яжемо цю систему відносно  $C_0, C_1, C_2, C_3$ , та підставимо отримані значення в (19). Перепишемо отриманий вираз, розташувавши доданки по вузлових деформаціях  $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2$ . Коефіцієнти біля  $w_1, \theta_1, w_2, \theta_2$  - це функції форми. Далі за допомогою Maple робимо розрахунки згідно з методом скінченних елементів.[5]

Побудуємо графік згину балки, отриманого за допомогою методу ВКБ, МСЕ та гібридного методу скінченних елементів для таких параметрів:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad N_0 = 4, \quad P_0 = 2, \quad l = 1 \text{ м}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad q_0 = 18 \cdot 10^6, \quad I_0 = 9 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon = 1$$



Із графіка бачимо, що гібридний метод скінченних елементів показує результати приблизно такі ж, як і метод скінченних елементів. Таким чином, у майбутньому необхідно показати, що цей метод буде працювати також добре, як і звичайний метод скінченних елементів, але для меншої кількості скінченних елементів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965. – 237 с.
3. Дмітрієва О.М. Гібридний ВКБ - Гальоркін метод та його застосування до деяких задач механіки деформівного твердого тіла: Автореф. дис.канд.фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Запорізький держ. ун-т – Запоріжжя, 1997. – 16 с.
4. Крылов О.В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах. – М.: Радио и связь, 2002. – 104 с.
5. Матросов А. В. Марле б. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

УДК 539.3

## АНАЛІТИЧНИЙ І НАБЛИЖЕНО АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ШТАМПА З ШОРСТКОЮ СМУГОЮ

Д'яченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент, Жмур Т.О., студент, Нікітенко А.М., студент

*Запорізький національний університет*

Розглянуто плоску контактну задачу про вдавлювання смугового штампа з плоскою основою або циліндричного штампа з неплоскою основою в шорстку смугу при лінійному законі деформування шорсткості. Знайдено аналітичні розв'язки у формі повторних рядів, що є представленнями рядів Неймана для коефіцієнтів шорсткості двох видів: обмежених знизу (великих) та обмежених зверху (малих). Знайдено наближено аналітичний розв'язок поставленої задачі. Проведено аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості на контактні характеристики.

*Ключові слова: контактна задача, штамп, шорсткість, закон деформування шорсткості.*

Дьяченко Н.Н., Жмур Т.А., Никитенко А.Н. АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ШТАМПА С ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСОЙ / Запорожский национальный университет, Украина.

Рассмотрена плоская контактная задача о вдавливании полосового штампа с плоским основанием или цилиндрического штампа с неплоским основанием в шероховатую полосу при линейном законе деформирования шероховатости. Найдены аналитические решения в форме повторных рядов, являющиеся представлениями ряда Неймана для коэффициентов шероховатости двух видов: ограниченных снизу (больших) и ограниченных сверху (малых). Найдены приближенно аналитические решения поставленных задач. Проведен анализ числовых результатов по выявлению влияния шероховатости на контактные характеристики.

*Ключевые слова: контактная задача, штамп, шероховатость, закон деформирования шероховатости.*

Dyachenko N.N., Thmur T.A., Nikitenko A.N. ANALYTICAL AND APPROXIMATELY THE ANALYTICAL DECISION OF A FLAT CONTACT PROBLEM ON INTERACTION OF A PUNCH WITH A ROUGH STRIP / Zaporizhzhya National University, Ukraine.

The flat contact problem about pressing of a strip punch with the flat platform or a cylindrical punch with non-planar the platform in a rough strip is considered at the linear law of deformation of a roughness. Analytical decisions in the form of the repeated series, being by representations of series Neumann for factors of a roughness of two kinds are found: limited from below (big) and limited from above (small). Decisions of problems put by found approximately analytical. The analysis of numerical results on revealing influence of a roughness on contact characteristics is made.

*Key words: a contact task, a punch, roughness, the law of roughness deformation.*

Контактні задачі застосовуються в інженерній та будівельній практиці, чим пояснюється їх активний розвиток. У класичні постановці припускається, що контактуючі тіла ідеально гладкі. Як відомо [1-7], шорсткість суттєво впливає на значення контактних характеристик. Уперше поставив і розв'язав контактну задачу з урахуванням шорсткості поверхні Штаєрман І.Я. [2], у подальшому цей напрям