Рис. 1–3 свидетельствуют об овражной структуре исследуемого функционала. Поэтому задачу (1)–(2) следует отнести к классу овражных оптимизационных задач. В связи с этим для её решения целесообразно использовать специальные методы нелинейной оптимизации [2, 5].

ВЫВОДЫ

Исследованы свойства функционала, характеризующего отклонение экспериментальных значений релаксационного спектра от значений, рассчитываемых на основе модели (1) для одних и тех же температур. Показано, что этот функционал является нелинейным, невыпуклым и имеет овражную структуру, что обусловливает невозможность применения стандартных методов конечномерной оптимизации для его минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахрушин В.Є., Чиріков О.Ю. Моделі та механізми механічної релаксації, пов'язаної з перебудовою домішково-дефектної підсистеми кристалів. - Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2004. - 140 с.
2. Застосування квазіньютонівської мінімізації до визначення параметрів складних релаксаційних спектрів за емпіричними даними / Бахрушин В.Є., Гончаренко Ю.В., Чиріков А.Ю., Шумада Р.Я. // Нові технології. - 2005. - № 1-2 (7-8). - С. 226 – 229.
3. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений. – СПб.: Лань, 2001. – 384 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1974. – 534 с.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ О ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ

Гребенюк С.Н., к.т.н., доцент, Тимошина О.Н., ассистент

Запорожский национальный университет

В работе рассмотрено применение метода конечных элементов к решению интегральных уравнений. Решена задача о винклеровском основании.

Ключевые слова: метод конечных элементов, интегральные уравнения, основание Винклера.

Гребенюк С.М., Тимошина О.М. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО ЗАДАЧІ ПРО ВІНКЛЕРІВСЬКУ ОСНОВУ / Запорізький національний університет, Україна

У роботі розглянуто застосування методу скінченних елементів до розв'язання інтегральних рівнянь. Розв'язана задача про вінклерівську основу.

Ключові слова: метод скінчених елементів, інтегральні рівняння, основа Вінклера.

Grebenyuk S.N., Timoshina O.N. APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD TO THE DECISIONS PROBLEM ABOUT WINKLER BASE / Zaporizhzhya national university, Ukraine

In this paper we developed apply by finite element method to decisions integrate equations. The problem of Winkler base was solved.

Key words: finite element method, integral equations, base of Winkler.

Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками относятся к области теории контактных и смешанных задач механики деформированного твердого тела. Они включают в себя как задачи о контактном взаимодействии между тонкостенными элементами типа накладок (стрингеров) или включений различных геометрических форм с массивными деформируемыми телами, так и задачи о контакте тел, армированных тонкими покрытиями или прослойками. Указанные задачи с одной стороны, тесно примыкают к классическим контактным задачам механики деформированного твердого тела, а с другой стороны, непосредственно связаны с важными для инженерной практики вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов к деформированным телам. Стрингеры и включения, как штампы и разрезы, являются концентраторами напряжений. Поэтому изучение концентрации напряжений в таких задачах и разработка методов ее снижения представляют собой теоретическую и практическую проблемы большой значимости. Контактные задачи для тел с покрытиями и прослойками имеют также важные приложения в связи с широким распространением в технике композиционных материалов, конструкций, усиленных или армированных тонкостенными элементами, в вопросах изучения «масштабного фактора», тензометрирования и других областях прикладной механики.

В прикладном аспекте упомянутые задачи, будучи связанными с вопросами передачи нагрузок, часто встречаются в различных областях строительства и машиностроения, и их развитие все время стимулируется возрастающими потребностями инженерной практики. Они возникают при проектировании авиационных и других тонкостенных конструкций, в практике сварных соединений, в строительной механике при расчете фундаментов зданий, дорожных и аэродромных покрытий, в измерительной технике, при разработке методик прочностных расчетов композитов, а также различных инженерных конструкций и их деталей, усиленных или армированных тонкостенными элементами, в вопросах предотвращения развития трещин в конструкциях и других отраслях прикладной механики.

Случаи формулировки задач в виде интегральных уравнений встречались уже в первой половине XIX века. Основы теории интегральных уравнений на рубеже XIX-XX веков были рассмотрены в работах Вито Вольтерра, Ивара Фредгольма, Давида Гильберта и Эрхарда Шмидта. Сейчас существует обширный круг задач, для математического описания которых эффективно используются интегральные уравнения. Интегральные уравнения нашли эффективное применение в таких областях, как физика - задачи диффузии, теория упругости, теплопроводность и т.д.; механика - многомассовые системы, колебания валов и другие задачи анализа динамики машин и механизмов; аэродинамика – собственные колебания крыльев самолета; астрономия – анализ распределения масс в галактике; теория точности вычислений – получение оценок погрешностей при решении дифференциальных уравнений и т.д.

Расширение области приложения интегральных уравнений стимулировало разработку их теории и особенно приближенных методов решения. Появилось много работ по исследованию свойств различных типов интегральных уравнений, а также возможностей их решения. При этом методы аналитического решения, основанные на понятии резольвенты, преобразования Лапласа, Фурье, Бесселя и др., представляют собой мощный инструмент для исследования ряда практических задач, имеют вполне естественные ограничения в приложениях, поскольку ориентированы на определенный, далеко не полный круг линейных задач и трудно реализуемы на ЭВМ [2, 5, 6]. В связи с этим новый толчок в развитии получили ставшие уже классическими метод механических квадратур, итерационные методы, проекционные методы (моментов, Галеркина, коллокации и др.). В расчете на применение ЭВМ были предложены методы, основанные на сочетании метода квадратур с аппроксимацией искомых решений, а также методы типа Рунге-Кутты, блочные, на основе сплайнов и т.д. Эти методы позволили уверенно решать многие типы линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными и постоянными пределами интегрирования [2, 5, 6].

В настоящее время одним из самых распространенных методов является метод конечных элементов (МКЭ), который появился в 40-50-х годах XX столетия в ряде работ, посвященных решению задач механики. Первоначально МКЭ был предложен инженерами, нашел широкое применение на практике, но значительное время оставался вне поля зрения математиков. По мере углубления понимания основного процесса становилась очевидной его связь с другими приближенными методами (такими, как методы Релея, Ритца и Галеркина), и достигнутая общность привлекла к этой области внимание математиков. История МКЭ восходит к работам В.Ритца и отечественных математиков И.Г. Бубнова и Б.Г. Галеркина. После подробного математического исследования оказалось, что при наглядных входных данных задачи МКЭ часто сходится быстрее, чем метод конечных разностей, а иногда вообще обладает оптимальной скоростью сходимости. Поэтому МКЭ стал вытеснять метод конечных разностей и завоевал всеобщее признание как эффективный метод решения самых разнообразных задач. Такая популярность метода объясняется простотой его физической интерпретации, математической формы и гибкостью численного алгоритма, облегчающей программирование сложных задач. МКЭ к решению интегральных уравнений применяется достаточно давно, однако, как правило, решение получалось в итерационном процессе с шагом по параметру интегрирования. Такой подход проще в реализации, однако может давать значительные вычислительные погрешности по сравнению с непосредственным построением матрицы жесткости, которая включает подынтегральное выражение. Итерационный подход развит в решении задач вязкоупругости в работах В.В. Киричевского, Б.М. Дохняка [3, 4]. Применение метода конечных элементов к расчету различных явлений и процессов, описываемых интегральными уравнениями, рассмотрено в работах Р.Ф. Харрингтона [7] – задач электростатики, в работах М.В. Чери и П. Сильвестра [10] – задач магнитостатики, для расчета распределения тока в проволочных антеннах МКЭ применен П. Сильвестром и К.К. Ченом [8], в рефлекторных антеннах – М.А. Хасаном и П. Сильвестром [9].

Рассмотрим применение метода конечных элементов к контактной задаче механики для сдвигового винклеровского основания, усиленного покрытием, сводящейся к решению интегрального уравнения вида Фредгольма 2-го рода.

Пусть сдвиговое основание Винклера усилено покрытием (рис.1).

На участке $|x| \le a$ верхней грани покрытия находится жесткая на растяжение, но гибкая накладка. Между основанием и покрытием, а также между накладкой и покрытием осуществлено полное сцепление. К накладке приложена сдвигающая сила T [1].

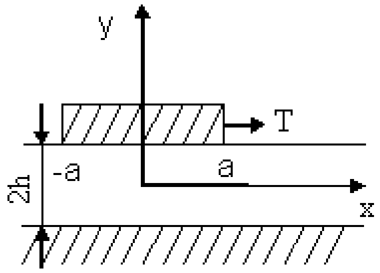

Рис. 1.

При указанной постановке задачи для ее решения воспользуемся уравнением [1]

$$4Gh\tilde{u}'' = -(1-\nu)(\tau_1 - \tau_2) + \frac{1-2\nu}{3}h^2(\tau_1'' - \tau_2'') - \nu h(\sigma_1' + \sigma_2'), \tag{1}$$

и положим в нм

$$\sigma_1 = \sigma_2 \equiv 0, \quad \tau_2 = k\tilde{u}, \tag{2}$$

где $k -$ коэффициент постели основания; σ_1, σ_2 - нормальные напряжения; τ_1, τ_2 - касательные напряжения, $\tilde{u}$ - перемещения, G и ν $-$ модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Будем иметь

$$F\tilde{u}'' - (1-\nu)k\tilde{u} = -(1-\nu)\tau_1 + \frac{1-2\nu}{3}h^2\tau_1'', \tag{3}$$

$$F = 4Gh + \frac{1-2\nu}{3}h^2 k,$$

Учитывая, что

$$\tilde{u} \to 0 \quad (|x| \to \infty), \quad \tau_1 = 0 \quad (|x| > a), \quad \tilde{u} = \varepsilon \quad (|x| \le a), \tag{4}$$

где ε $-$ величина жесткого горизонтального перемещения накладки под действием силы T.

При $|x| > a$ получим

$$b^2\tilde{u}'' - \tilde{u} = 0, \quad b^2 = F[(1-\nu)k]^{-1}.$$

Отсюда найдем

$$\tilde{u} = A_1 e^{-\frac{x}{b}},$$

где

$$A_1 = \frac{\varepsilon(b^2 - c^2)sh\frac{a}{c}}{bc\ ch\frac{a}{c} + b^2 sh\frac{a}{c}} \cdot e^{-\frac{a}{b}}.$$

При $|x| \le a$ из (3) имеем

$$c^2\tau_1'' - \tau_1 = -k\varepsilon, \quad c^2 = (1-2\nu)h^2[3(1-\nu)]^{-1}, \quad b > c.$$

Отсюда получим

$$\tau_1 = k\varepsilon + A_2 ch\frac{x}{c},$$

где

$$A_2 = \frac{k\varepsilon(b^2 - c^2)}{c^2 \; ch\frac{a}{c} + bc \; sh\frac{a}{c}}.$$

Используя преобразование Фурье, а также значение известных интегралов и свойства дельта-функции [1], получим интегральное уравнение, соответствующее постановке данной задачи, относительно неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих в покрытии под накладкой

$$\frac{c^2}{kb^2}\tau_1(x) + \frac{b^2 - c^2}{2b^3 k}\int_{-a}^{a}\tau_1(\xi)\, e^{\frac{-(\xi - x)}{b}} d\xi = \varepsilon \quad (|x| \le a),$$

где

$$\varepsilon = \frac{T}{2k}\left[a + \frac{(b^2 - c^2) sh\frac{a}{c}}{c^2 ch\frac{a}{c} + bc \; sh\frac{a}{c}}\right]^{-1}.$$

Полученное интегральное уравнение будем решать методом конечных элементов.

Решение интегрального уравнения методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений вида

$$K_{ij} = \tau_{1j} f_j$$

Для данного интегрального уравнения найдем матрицу жесткости K_{ij} и вектор f_j.

$$K_{ij}\tau_{1j} = \tau_{1j}(x_j - x_{j-1}) + \lambda\sum_{i=1}^{M}\tau_{1i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{\frac{-(\xi - x)}{b}} d\xi dx,$$

где

$$\lambda = \frac{(b^2 - c^2)}{2bc^2},$$

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{\varepsilon b^2}{c^2}dx = \frac{\varepsilon kb^2}{c^2}(x_j - x_{j-1}).$$

Матрица K_{ij} имеет следующий вид

$$K_{ii} = (x_i - x_{i-1}) + \lambda b^2 \left(e^{\frac{(x_i - x_{i-1})}{b}} + e^{\frac{-(x_i - x_{i-1})}{b}}\right) \qquad i = j,$$

$$K_{ij} = -\lambda b^2 \left(e^{\frac{(-x_j)}{b}} - e^{\frac{(-x_{j-1})}{b}}\right)\left(e^{\frac{x_i}{b}} - e^{\frac{x_{i-1}}{b}}\right) \qquad i \ne j.$$

Разбив отрезок $[-a, a]$ на n конечных элементов одинаковой длины и учитывая, что

$$(x_i - x_{i-1}) = \frac{2a}{n}, \quad x_i = \frac{2ai}{n}, \quad x_{i-1} = \frac{2a(i-1)}{n},$$

получим

$$K_{ii} = \frac{2a}{n} + \lambda b^2 \left(e^{\frac{2a}{nb}} + e^{\frac{-2a}{nb}}\right) \qquad i = j,$$

$$K_{ij} = -\lambda b^2 \left(e^{\frac{-2aj}{nb}} - e^{\frac{-2a(j-1)}{nb}}\right)\left(e^{\frac{2ai}{nb}} - e^{\frac{2a(i-1)}{nb}}\right) \qquad i \ne j.$$

$$f_j = \frac{\varepsilon k b^2}{c^2} \cdot \frac{2a}{n}.$$

Таким образом, задача сводится к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными τ_{1j}.

Рассмотрим конструкцию, для которой

$$\nu = 0,28; \quad G = 8 \cdot 10^{10} \frac{H}{м^2}; \quad T = 20H; \quad k = 9 \cdot 10^6 \frac{H}{м^3}; \quad h = 0,1м; \quad |x| \le 1,$$

Для данной конструкции матрица жесткости K_{ij} и вектор f_j имеют вид

$$K_{ii} = \frac{2}{n} + 8,52 \cdot 10^7 (e^{\frac{2,85 \cdot 10^{-2}}{n}} + e^{\frac{-2,85 \cdot 10^{-2}}{n}}),$$

$$K_{ij} = -8,52 \cdot 10^7 (e^{\frac{-2,85 \cdot 10^{-2} j}{n}} - e^{\frac{-2,85 \cdot 10^{-2}(j-1)}{n}})(e^{\frac{2,85 \cdot 10^{-2} i}{n}} - e^{\frac{2,85 \cdot 10^{-2}(i-1)}{n}}).$$

$$f_j = \frac{31140}{n}.$$

Таким образом, получим систему n линейных уравнений с n неизвестными относительно неизвестных под накладкой касательных напряжений τ_{1j}.

Графики приближенного решения для различных сеток разбиения и точного решения $\tau_1 = k\varepsilon + A_2 ch\frac{x}{c}$ приведены на рис.2.

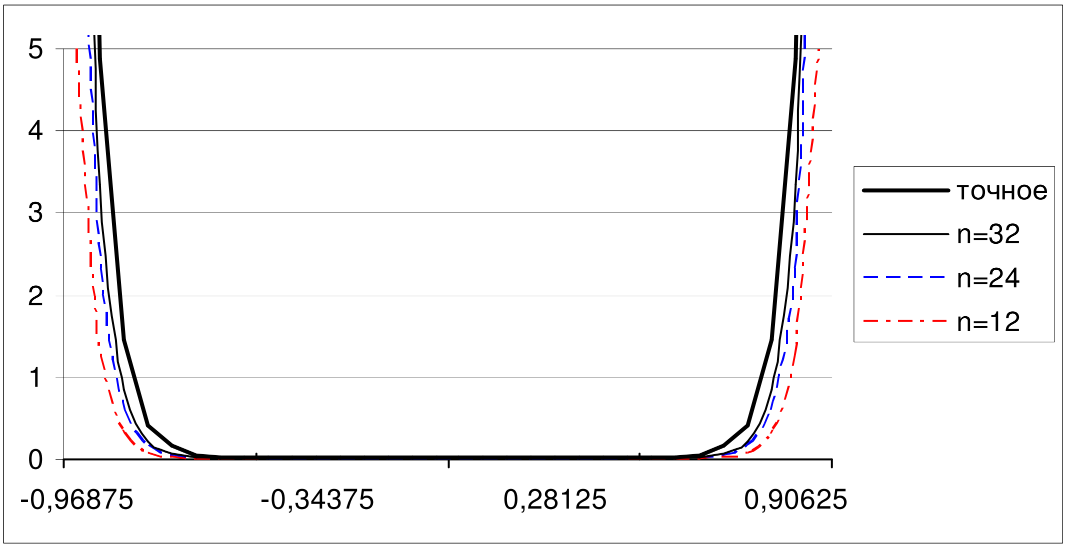

Рис. 2

Для приведенных сеток разбиения наблюдается устойчивая сходимость результатов расчета. При этом максимальная погрешность уменьшается от 46% до 14%. Таким образом, МКЭ можно достаточно эффективно использовать при решении задач, сводящихся к интегральным уравнениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488с.
2. Биргер И.А. некоторые математические методы решения инженерных задач. – М.: Оборонгиз, 1956. – 149с.

3. Дохняк Б.М., Киричевский В.В. Реализация алгоритмов решения трехмерных задач вязкоупругости эластомеров методом конечных элементов// Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1987, – Вып. 50. – С. 42-47.
4. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наук. думка, 2002. – 655с.
5. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. – М.: Гостехиздат, 1949. – 304с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.– К.: Наук. думка, 1976. – 483с.
7. Harrington R.F. Field computation by moment methods, Macmillan, New York, 1968.
8. Sylvester P., Chan K.K. Bubnov-Galerkin solution to wire – antenna problem. Institution of Electrical Proceedings, 1972.
9. Hassan M.A., Sylvester P. Radiation and scattering by wire antenna structures near a rectangular plate reflector. Institution of Electrical Proceedings, 1977.
10. Chari M.V., Sylvester P. Finite elements in electric and magnetic field problems. John Wiley, Chichester, 1980.

УДК 539.413:519.624.3

ДО ПИТАННЯ ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ ЗГИНУ БАЛКИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Грищак В.З., д.т.н., професор, Гребенюк С.М., к.т.н., доцент, Ходаковська А.В., аспірант

Запорізький національний університет

У роботі розглянуто застосування гібридного методу скінченних елементів до розв’язання задачі згину балки змінної жорсткості.

Ключові слова: метод фазних інтегралів, гібридний метод скінченних елементів, метод скінченних елементів.

Грищак В.З., Гребенюк С.Н., Ходаковская А.В. К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ / Запорожский национальный университет, Украина

В работе рассмотрено применение гибридного метода конечных элементов к решению задачи изгиба балки переменной жесткости

Ключевые слова: метод фазовых интегралов, гибридный метод конечных элементов, метод конечных элементов.

Gristchak V. Z., Grebenuk S.N., Khodakovskaya A.V. TO THE QUESTION ABOUT THE ASYMPTOTYC SOLVE PROBLEM OF BEND A BEAM THAT HAS A VARIABLE INFLEXIBILITY / Zaporizhzhya national university, Ukraine

In this paper the authors considered the application of a hybrid finite elements method to solve the problem of bend a beam that has a variable inflexibility.

Key words: a phase- integral method, a hybrid finite elements method, a finite elements method.

У даній роботі наводиться розв’язок задачі згину балки змінної жорсткості під розподіленим навантаженням, отриманий за допомогою гібридного методу скінченних елементів. Цей метод є одним із підходів до розв’язування задач математичної фізики з малим параметром. Сутність запропонованого гібридного підходу полягає в поєднанні двох методів: метода ВКБ (метода фазних інтегралів) на першому кроці розв’язання і методу скінченних елементів (МСЕ) на другому. Тобто в МСЕ замість, наприклад, поліноміальної апроксимації використовується отриманий розв’язок за методом ВКБ. Ця ідея зустрічається в К. Флетчера, який вважав, що важливою особливістю методу Гальоркіна є можливість вибору пробних функцій таким чином, що точний розв’язок може бути отриманий з мінімально можливим числом пробних функцій. Причому використовується вся відома інформація про шуканий розв’язок. [1]