УДК 519.876.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ MAPLE ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВЛАСОВА

*Галан Е.Е., ст. преподаватель, Овский А.Г., аспирант, Толок В.А., д.т.н., профессор

Запорожский национальный университет
** Запорожский национальный технический университет*

Авторы с помощью программирования в системе компьютерной математики Maple, реализуют упрощающую символическую запись В.З. Власова. Используя запись, получают общее решение трехмерных уравнений теории упругости двумя способами, запрограммированными в Maple.

Ключевые слова: перемещение, напряжение, начальные функции, общие уравнения равновесия тела, упругое изотропное тело, деформированное и напряженное состояние тела.

Галан О.Є., Овський О.Г., Толок В.О. ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MAPLE ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ПОЧАТКОВИХ ФУНКЦІЙ ВЛАСОВА/ Запорізький національний університет, Запорізький національний технічний університет Україна.

Автори, за допомогою програмування в системі MAPLE реалізують спрощуючий символічний запис В.З. Власова. Використовуючи запис, отримують загальний розв’язок трьохвимірних рівнянь теорії пружності двома способами, запрограмованими в Maple.

Ключові слова: переміщення, напруження, початкові функції, загальні рівняння рівноваги тіла, пружне ізотропне тіло, деформований і напружений стан тіла.

Galan E.E., Ovsky A.G., Tolok V.A. APPLICATION OF THE MAPLE SYSTEM DURING REALIZATION OF METHOD of INITIAL FUNCTIONS OF VLASOV / Zaporizhzhya national university, Zaporizhzhya national technical university, Ukraine.

Authors by programming in the system of computer mathematics Maple, will realize the simplifying symbolic record of V.Z. Vlasov. Utillizing a record, get the general decision of three-dimensional equalizations of theory of resiliency two methods, programed in the Maple.

Words: moving, tension, initial functions, common equalizations of equilibrium of body, resilient isotropic body, deformational tense state of body.

1 ВВЕДЕНИЕ

В.З. Власовым с помощью разложения функций в ряд Маклорена было получено решение уравнений теории упругости в трехмерном пространстве, им же была предложена символическая запись решения. В статье предлагается реализация символики Власова в системе программирования MAPLE, подробно рассматриваются приёмы получения решений уравнений теории упругости в Maple по методу начальных функций [2]. Разработанная программа выводит решение в виде символьных рядов Власова.

2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА MAPLE

Пользуемся математическим аппаратом Власова [2], принимаем за искомые основные функции: $u = u(x, y, z),\ \upsilon = \upsilon(x, y, z),\ w = w(x, y, z)$ и напряжение $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$. Для упрощения записи будем рассматривать пропорциональные величины для перемещений, которые определяются формулами:

$$U = Gu, \quad V = G\upsilon, \quad W = Gw. \tag{2.1}$$

Для искомых напряжений также изменим форму записи:

$$\tau_{xz} = X, \quad \tau_{yz} = Y, \quad \sigma_z = Z. \tag{2.2}$$

Учитывая новые формы записи, запишем общие уравнения равновесия упругого изотропного тела:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial z} = -\dfrac{\partial W}{\partial x} + X, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{\partial W}{\partial y} + Y, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z} = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} Z, \\ \dfrac{\partial Z}{z} = -\dfrac{\partial X}{\partial x} - \dfrac{\partial Y}{y} - c, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial z} = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{2}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial Z}{\partial y} - b, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{2}{1-\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{\partial Z}{\partial x} - a. \end{cases} \tag{2.3}$$

Для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} имеем:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial U}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right)\right], \\ \sigma_y = \dfrac{2}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial V}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right)\right], \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где ν - коэффициент Пуассона тела.

Уравнениями (2.3), (2.4) и присоединенными к ним граничными условиями определяются шесть искомых величин.

Выделим в теле две плоскости: начальную $z = 0$ и параллельную ей $z = const$. Часть тела, которая находится между ними, есть слой произвольно фиксированной толщины. Искомые величины уравнений (2.3) при фиксированном значении координаты z зависят лишь от двух переменных x, y, которые определяют положение точки на плоскости $z = const$. Величины U, V, W, X, Y, Z определяют векторы полного перемещения и полного напряжения, которые действуют в любой точке (x, y) фиксированной плоскости $z = const$. Величины $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$, которые относятся к начальной координатной плоскости $z = 0$, называются начальными функциями, которые считают заданными (они не находятся во время решения задачи) [2].

Решение задачи будем искать в виде бигармонических уравнений, а не рядов Маклорена:

$$\begin{cases} U = U_0(x, y)\cos(\gamma z) + U_1(x, y)\sin(\gamma z) + U_2 z\cos(\gamma z) + U_3 z\sin(\gamma z), \\ V = V_0(x, y)\cos(\gamma z) + V_1(x, y)\sin(\gamma z) + V_2 z\cos(\gamma z) + V_3 z\sin(\gamma z), \\ W = W_0(x, y)\cos(\gamma z) + W_1(x, y)\sin(\gamma z) + W_2 z\cos(\gamma z) + W_3 z\sin(\gamma z), \\ X = X_0(x, y)\cos(\gamma z) + Z_1(x, y)\sin(\gamma z) + Z_2 z\cos(\gamma z) + Z_3 z\sin(\gamma z), \\ Y = Y_0(x, y)\cos(\gamma z) + Y_1(x, y)\sin(\gamma z) + Y_2 z\cos(\gamma z) + Y_3 z\sin(\gamma z), \\ Z = Z_0(x, y)\cos(\gamma z) + Z_1(x, y)\sin(\gamma z) + Z_2 z\cos(\gamma z) + Z_3 z\sin(\gamma z). \end{cases} \tag{2.5}$$

Для упрощения записи частичных производных используем символический метод, суть которого заключается в замене операций дифференцирования операциями умножения. Тогда операции дифференцирования и линейных преобразований уравнений (2.3) возможно проводить методами линейной алгебры, не нарушая целостности и согласуемости решения [4].

Уравнения (2.3) имеют вид:

$$\begin{cases} rU = -\alpha W + X, \\ rV = -\beta W + Y, \\ rW = -\dfrac{\nu}{1-\nu}(\alpha U + \beta V) + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} Z, \\ rZ = -\alpha X - \beta Y - c, \\ rY = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\beta U - \left(\alpha^2 V + \dfrac{2}{1-\nu}\beta^2 V\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\beta Z - b, \\ rX = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\beta V - \left(\beta^2 U + \dfrac{2}{1-\nu}\alpha^2 U\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\alpha Z - a, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\alpha^n \to \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$, $\beta^n \to \dfrac{\partial^n}{\partial y^n}$, $r^n \to \dfrac{\partial^n}{\partial z^n}$;

n – целое число.

Суть первого способа вывода операторов Власова заключается в следующем. Система (2.6) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial z} = -\alpha W + X, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\beta W + Y, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z} = -\dfrac{\nu}{1-\nu}(\alpha U + \beta V) + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} Z, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial z} = -\alpha X - \beta Y - c, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial z} = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\beta U - \left(\alpha^2 V + \dfrac{2}{1-\nu}\beta^2 V\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\beta Z - b, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} = -\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\beta V - \left(\beta^2 U + \dfrac{2}{1-\nu}\alpha^2 U\right) - \dfrac{\nu}{1-\nu}\alpha Z - a. \end{cases} \tag{2.7}$$

Как видно, оператор дифференцирования $r \to \dfrac{\partial}{\partial z}$ не используется. В эту систему подставим решение (2.5) и будем брать производные от уравнений системы вплоть до четвертой производной по z. Поочередно для каждого случая, приравнивая переменную z=0, получим систему уравнений, решив ее относительно переменных $U_1, U_2, U_3, \ldots, Z_1, Z_2, Z_3$, получим решение задачи [4]. Данный метод, впервые встречается в работах Галан Е.Е., Толока В.А. и Шапара В.В. Вид системы на рис. 2.1.

$$eq1p1 := \mathrm{u1}(x, y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x, y) = -\alpha\,\mathrm{w0}(x, y) + \mathrm{xx0}(x, y)$$

$eq2p1 :=$
$$-\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma = -\alpha\,(\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{w2}(x,y)) + \mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{xx2}(x,y)$$

$$eq3p1 := -\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2 = -\alpha\,(-\mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma) - \mathrm{xx0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{xx3}(x,y)\,\gamma$$

$$eq4p1 := \mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma^3 = -\alpha\,(-\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{w2}(x,y)\,\gamma^2) - \mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{xx2}(x,y)\,\gamma^2$$

$$eq1p2 := \mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y) = -\beta\,\mathrm{w0}(x,y) + \mathrm{yy0}(x,y)$$

$eq2p2 :=$
$$-\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma = -\beta\,(\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{w2}(x,y)) + \mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{yy2}(x,y)$$

$$eq3p2 := -\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2 = -\beta\,(-\mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma) - \mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma$$

$$eq4p2 := \mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma^3 = -\beta\,(-\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{w2}(x,y)\,\gamma^2) - \mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{yy2}(x,y)\,\gamma^2$$

$$eq1p3 := \mathrm{w1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{w2}(x,y) = -\frac{\nu\,(\alpha\,\mathrm{u0}(x,y) + \beta\,\mathrm{v0}(x,y))}{1-\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\nu)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p3 := -\mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma = -\frac{\nu\,(\alpha\,(\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x,y)) + \beta\,(\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y)))}{1-\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\nu)\,(\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{zz2}(x,y))}{1-\nu}$$

$$eq3p3 := -\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{w2}(x,y)\,\gamma^2 = -\frac{\nu\,(\alpha\,(-\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma) + \beta\,(-\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma))}{1-\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\nu)\,(-\mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$

$$eq4p3 := \mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma^3 = -\frac{\nu\,(\alpha\,(-\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2) + \beta\,(-\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2))}{1-\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\nu)\,(-\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{zz2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$

$$eq1p4 := \mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{xx2}(x,y) = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,\mathrm{v0}(x,y)}{1-\nu} - \beta^2\,\mathrm{u0}(x,y) - \frac{2\,\alpha^2\,\mathrm{u0}(x,y)}{1-\nu} - \frac{\nu\,\alpha\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p4 := -\mathrm{xx0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{xx3}(x,y)\,\gamma = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y))}{1-\nu} - \beta^2\,(\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x,y)) - \frac{2\,\alpha^2\,(\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x,y))}{1-\nu} - \frac{\nu\,\alpha\,(\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{zz2}(x,y))}{1-\nu}$$

$$eq3p4 := -\mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{xx2}(x,y)\,\gamma^2 = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(-\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$
$$-\beta^2\,(-\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma) - \frac{2\,\alpha^2\,(-\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$
$$-\frac{\nu\,\alpha\,(-\mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$

$$eq4p4 := \mathrm{xx0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{xx3}(x,y)\,\gamma^3 = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(-\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$
$$-\beta^2\,(-\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2) - \frac{2\,\alpha^2\,(-\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$
$$-\frac{\nu\,\alpha\,(-\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{zz2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$

$$eq1p5 := \mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{yy2}(x,y) =$$
$$-\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,\mathrm{u0}(x,y)}{1-\nu} - \alpha^2\,\mathrm{v0}(x,y) - \frac{2\,\beta^2\,\mathrm{v0}(x,y)}{1-\nu} - \frac{\nu\,\beta\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p5 := -\mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x,y))}{1-\nu}$$
$$-\alpha^2\,(\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y)) - \frac{2\,\beta^2\,(\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y))}{1-\nu}$$
$$-\frac{\nu\,\beta\,(\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{zz2}(x,y))}{1-\nu}$$

$$eq3p5 := -\mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{yy2}(x,y)\,\gamma^2 = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(-\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$
$$-\alpha^2\,(-\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma) - \frac{2\,\beta^2\,(-\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$
$$-\frac{\nu\,\beta\,(-\mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma)}{1-\nu}$$

$$eq4p5 := \mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma^3 = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,(-\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$
$$-\alpha^2\,(-\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2) - \frac{2\,\beta^2\,(-\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$
$$-\frac{\nu\,\beta\,(-\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{zz2}(x,y)\,\gamma^2)}{1-\nu}$$

$$eq1p6 := \mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{zz2}(x,y) = -\alpha\,\mathrm{xx0}(x,y) - \beta\,\mathrm{yy0}(x,y)$$

$$eq2p6 := -\mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma =$$
$$-\alpha\,(\mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{xx2}(x,y)) - \beta\,(\mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{yy2}(x,y))$$

$$eq3p6 := -\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{zz2}(x,y)\,\gamma^2 =$$
$$-\alpha\,(-\mathrm{xx0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{xx3}(x,y)\,\gamma) - \beta\,(-\mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma)$$

$$eq4p6 := \mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma^3 =$$
$$-\alpha\,(-\mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{xx2}(x,y)\,\gamma^2) - \beta\,(-\mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{yy2}(x,y)\,\gamma^2)$$

Рис. 2.1. Вид системы согласно первому способу, вывода операторов В.З. Власова

Во втором способе система записывается в виде (2.6). Умножив уравнение (2.6) на r и подставляя все те же уравнения (2.6) в новые и исключая члены rU, rV, rW, rX, rY, rZ, будем получать общие формулы для вторых, третьих, четвертых производных. Потом будем брать производные от бигармонических уравнений, как в первом способе, приравнивать их к правым частям уравнений системы (2.6). Вышеизложенный метод был разработан аспирантом Овским А.Г. и Толоком В.А., во время анализа результатов, полученных Власовым В.З. В результате получается новая система уравнений, где присутствуют лишь начальные функции. Система уравнений принимает вид, удобный для автоматизации получения решений $U_1, U_2, U_3, ..., Z_1, Z_2, Z_3$. Преимуществом второго способа является меньшее количество итераций для получения решений. Вид системы на рис. 2.2.

$$eq1p1 := \mathrm{u1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{u2}(x,y) = -\alpha\,\mathrm{w0}(x,y) + \mathrm{xx0}(x,y)$$

$$eq2p1 := -\mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma = -\frac{1}{2}\,\frac{(2\,\alpha^2\,\nu - 2\,\beta^2 + 2\,\beta^2\,\nu - 4\,\alpha^2)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p1 := -\mathrm{u1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{u2}(x,y)\,\gamma^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(-4\,\beta^2\,\alpha + 2\,\beta^2\,\nu\,\alpha - 4\,\alpha^3 + 2\,\alpha^3\,\nu)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(2\,\beta^2 - 2\,\beta^2\,\nu + 3\,\alpha^2 - 2\,\alpha^2\,\nu)\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq4p1 := \mathrm{u0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{u3}(x,y)\,\gamma^3 = \frac{(\beta^4\,\nu + \alpha^4\,\nu + 2\,\alpha^2\,\beta^2\,\nu - \beta^4 - 4\,\alpha^2\,\beta^2 - 3\,\alpha^4)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(-2\,\alpha\,\beta^3 - 2\,\alpha^3\,\beta)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(-\beta^2\,\alpha - \alpha^3)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq1p2 := \mathrm{v1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{v2}(x,y) = -\beta\,\mathrm{w0}(x,y) + \mathrm{yy0}(x,y)$$

$$eq2p2 := -\mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma = \frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(-2\,\beta^2\,\nu + 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha^2\,\nu + 4\,\beta^2)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\beta\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p2 := -\mathrm{v1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{v2}(x,y)\,\gamma^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(-4\,\alpha^2\,\beta + 2\,\beta^3\,\nu + 2\,\beta\,\nu\,\alpha^2 - 4\,\beta^3)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(3\,\beta^2 - 2\,\beta^2\,\nu + 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha^2\,\nu)\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq4p2 := \mathrm{v0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{v3}(x,y)\,\gamma^3 = -\frac{(2\,\alpha^3\,\beta + 2\,\alpha\,\beta^3)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(-2\,\alpha^2\,\beta^2\,\nu - \alpha^4\,\nu - \beta^4\,\nu + \alpha^4 + 3\,\beta^4 + 4\,\alpha^2\,\beta^2)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\beta^3 + \alpha^2\,\beta)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq1p3 := \mathrm{w1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{w2}(x,y) = -\frac{\nu\,(\alpha\,\mathrm{u0}(x,y) + \beta\,\mathrm{v0}(x,y))}{1-\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\,\nu)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p3 := -\mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma = -\frac{1}{2}\,\frac{(2\,\alpha^2\,\nu + 2\,\beta^2\,\nu)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\beta\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p3 := -\mathrm{w1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{w2}(x,y)\,\gamma^2 = -\frac{(\alpha^3\,\nu + \beta^2\,\nu\,\alpha + \alpha^3 + \beta^2\,\alpha)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\beta\,\nu\,\alpha^2 + \beta^3\,\nu + \alpha^2\,\beta + \beta^3)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\alpha^2\,\nu + \beta^2\,\nu)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq4p3 := \mathrm{w0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{w3}(x,y)\,\gamma^3 = \frac{(\alpha^4\,\nu + 2\,\alpha^2\,\beta^2\,\nu + \alpha^4 + 2\,\alpha^2\,\beta^2 + \beta^4\,\nu + \beta^4)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(-\beta^2\,\alpha - \alpha^3)\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(-\alpha^2\,\beta - \beta^3)\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq1p4 := \mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{zz2}(x,y) = -\alpha\,\mathrm{xx0}(x,y) - \beta\,\mathrm{yy0}(x,y)$$

$$eq2p4 := -\mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma = -\frac{(2\,\beta^2\,\alpha + 2\,\alpha^3)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(2\,\alpha^2\,\beta + 2\,\beta^3)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\alpha^2\,\nu + \beta^2\,\nu)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p4 := -\mathrm{zz1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{zz2}(x,y)\,\gamma^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(2\,\alpha^2 + 2\,\beta^2)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(-2\,\alpha + \nu\,\alpha)\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(-2\,\beta + \nu\,\beta)\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq4p4 := \mathrm{zz0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{zz3}(x,y)\,\gamma^3 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(4\,\alpha^3 + 4\,\beta^2\,\alpha)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(4\,\alpha^2\,\beta + 4\,\beta^3)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(\alpha^2+\beta^2)\,(\alpha^2\,\nu + \beta^2\,\nu + \alpha^2 + \beta^2)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq1p5 := \mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{yy2}(x,y) = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,\mathrm{u0}(x,y)}{1-\nu} - \alpha^2\,\mathrm{v0}(x,y) - \frac{2\,\beta^2\,\mathrm{v0}(x,y)}{1-\nu} - \frac{\nu\,\beta\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p5 := -\mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma = -\frac{(2\,\alpha^2\,\beta + 2\,\beta^3)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\beta^2\,\nu - \alpha^2 + \alpha^2\,\nu - 2\,\beta^2)\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p5 := -\mathrm{yy1}(x,y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{yy2}(x,y)\,\gamma^2 = -\frac{(\alpha^3\,\beta\,\nu + \alpha\,\beta^3\,\nu + 3\,\alpha\,\beta^3 + 3\,\alpha^3\,\beta)\,\mathrm{u0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(-\alpha^4\,\nu - \alpha^2\,\beta^2\,\nu + 5\,\alpha^2\,\beta^2 + 4\,\beta^4 + \alpha^4)\,\mathrm{v0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(\beta\,\nu\,\alpha^2 + \beta^3\,\nu + \alpha^2\,\beta + \beta^3)\,\mathrm{zz0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq4p5 := \mathrm{yy0}(x,y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{yy3}(x,y)\,\gamma^3 = \frac{(8\,\alpha^2\,\beta^3 + 4\,\alpha^4\,\beta + 4\,\beta^5)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(-2\,\alpha\,\beta^3 - 2\,\alpha^3\,\beta)\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{(\alpha^4\,\nu - 4\,\alpha^2\,\beta^2 + \beta^4\,\nu - 3\,\beta^4 - \alpha^4 + 2\,\alpha^2\,\beta^2\,\nu)\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq1p6 := \mathrm{xx1}(x,y)\,\gamma + \mathrm{xx2}(x,y) = -\frac{(1+\nu)\,\alpha\,\beta\,\mathrm{v0}(x,y)}{1-\nu} - \beta^2\,\mathrm{u0}(x,y) - \frac{2\,\alpha^2\,\mathrm{u0}(x,y)}{1-\nu} - \frac{\nu\,\alpha\,\mathrm{zz0}(x,y)}{1-\nu}$$

$$eq2p6 := -\mathrm{xx0}(x,y)\,\gamma^2 + 2\,\mathrm{xx3}(x,y)\,\gamma = -\frac{(2\,\beta^2\,\alpha + 2\,\alpha^3)\,\mathrm{w0}(x,y)}{-1+\nu} - \frac{(-\beta^2 + \beta^2\,\nu - 2\,\alpha^2 + \alpha^2\,\nu)\,\mathrm{xx0}(x,y)}{-1+\nu} + \frac{\alpha\,\beta\,\mathrm{yy0}(x,y)}{-1+\nu}$$

$$eq3p6 := -\mathrm{xx1}(x, y)\,\gamma^3 - 3\,\mathrm{xx2}(x, y)\,\gamma^2 = \frac{(\beta^4\,\nu + \alpha^2\,\beta^2\,\nu - 4\,\alpha^4 - 5\,\alpha^2\,\beta^2 - \beta^4)\,\mathrm{u0}(x, y)}{-1+\nu}$$
$$+ \frac{(-\alpha^3\,\beta\,\nu - \alpha\,\beta^3\,\nu - 3\,\alpha^3\,\beta - 3\,\alpha\,\beta^3)\,\mathrm{v0}(x, y)}{-1+\nu}$$
$$+ \frac{(-\alpha^3\,\nu - \beta^2\,\nu\,\alpha - \alpha^3 - \beta^2\,\alpha)\,\mathrm{zz0}(x, y)}{-1+\nu}$$
$$eq4p6 := \mathrm{xx0}(x, y)\,\gamma^4 - 4\,\mathrm{xx3}(x, y)\,\gamma^3 = \frac{(4\,\alpha^5 + 4\,\alpha\,\beta^4 + 8\,\alpha^3\,\beta^2)\,\mathrm{w0}(x, y)}{-1+\nu}$$
$$+ \frac{(\beta^4\,\nu + \alpha^4\,\nu + 2\,\alpha^2\,\beta^2\,\nu - \beta^4 - 4\,\alpha^2\,\beta^2 - 3\,\alpha^4)\,\mathrm{xx0}(x, y)}{-1+\nu}$$
$$+ \frac{(-2\,\alpha\,\beta^3 - 2\,\alpha^3\,\beta)\,\mathrm{yy0}(x, y)}{-1+\nu}$$

Рис. 2.2. Система, составленная по второму способу получения операторов Власова

Подставив полученные переменные в бигармонические уравнения (2.5) и сделав необходимые преобразования, связанные с группированием дифференциальных операций над начальными функциями $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$, получаем общие формулы, которые позволяют выражать искомые функции U, V, W, X, Y, Z через начальные - $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$ и их частные производные. Эти формулы записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} U = L_{UU}U_0 + L_{UV}V_0 + ... + L_{UZ}Z_0, \\ V = L_{VU}V_0 + L_{VV}V_0 + ... + L_{VZ}Z_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z = L_{ZU}U_0 + L_{ZV}V_0 + ... + L_{ZZ}Z_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где L_{UU}, $L_{UV},...,L_{ZZ}$ - линейные дифференциальные операторы, которые относятся к начальным функциям $U_0(x, y), V_0(x, y), W_0(x, y), X_0(x, y), Y_0(x, y), Z_0(x, y)$. Эти операторы зависят от переменной z и в них присутствуют производные по переменным x, y от функций начальной плоскости $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$ при z=0. Подставив общие формулы для U, V, W, X, Y, Z в (2.4), определяем напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, которые действуют на плоскостях, параллельных z=0. После преобразований для этих напряжений будем иметь:

$$\begin{cases} \sigma_x = A_U U_0 + A_V V_0 + ... + A_Z Z_0, \\ \sigma_Y = B_U U_0 + B_V V_0 + ... + B_Z Z_0, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = C_U U_0 + C_V V_0 + ... + C_X X_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $A_U, A_V,..., A_Z, B_U, B_V,...,B_Z, C_U, C_V,..., C_Z$ - дифференциальные операторы.

Все эти преобразования осуществляет программа, написанная авторами в MAPLE [3], ниже приведен вывод операторов с ее помощью. Решение систем в виде операторов на рис. 2.3.

$$Luu := \frac{1}{2}\,\frac{(-2+2\,\nu)\cos(\gamma\,z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{z\sin(\gamma\,z)\,\alpha^2}{(-1+\nu)\,\gamma}$$
$$Lvu := \frac{1}{2}\,\frac{\beta\,\alpha\,z\sin(\gamma\,z)}{\gamma\,(-1+\nu)}$$

$$Lwu := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{(2\nu-1)\,\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lxu := \frac{\alpha^2 z\cos(\gamma z)}{-1+\nu}+\frac{(\alpha^2-\beta^2\nu+\beta^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lyu := \frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha\,\beta}{-1+\nu}+\frac{\sin(\gamma z)\,\nu\,\alpha\,\beta}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lzu := -\frac{\sin(\gamma z)\,z\,\alpha\,\gamma}{-1+\nu}$$

$$Luv := \frac{1}{2}\frac{\beta\,\alpha\,z\sin(\gamma z)}{\gamma\,(-1+\nu)}$$

$$Lvv := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2 z\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lwv := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\beta}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{(2\nu-1)\,\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lxv := \frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha\,\beta}{-1+\nu}+\frac{\sin(\gamma z)\,\nu\,\alpha\,\beta}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lyv := \frac{\beta^2 z\cos(\gamma z)}{-1+\nu}+\frac{(-\alpha^2\nu+\alpha^2+\beta^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lzv := -\frac{\sin(\gamma z)\,z\,\beta\,\gamma}{-1+\nu}$$

$$Luw := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)\,\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lvw := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\beta}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)\,\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lww := -\frac{1}{2}\frac{(2-2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu}-\frac{1}{2}\frac{(z\,\alpha^2+\beta^2 z)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lxw := -\frac{\sin(\gamma z)\,z\,\alpha\,\gamma}{-1+\nu}$$

$$Lyw := -\frac{\sin(\gamma z)\,z\,\beta\,\gamma}{-1+\nu}$$

$$Lzw := -\frac{(z\,\alpha^2+\beta^2 z)\cos(\gamma z)}{-1+\nu}-\frac{(-\beta^2-\alpha^2)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lux := -\frac{1}{4}\frac{\alpha^2 z\cos(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma^2}-\frac{1}{4}\frac{(3\,\alpha^2-4\,\alpha^2\nu+4\,\beta^2-4\,\beta^2\nu)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma^3}$$

$$Lvx := \frac{1}{4}\frac{\alpha\,\beta\sin(\gamma z)}{\gamma^3(-1+\nu)}-\frac{1}{4}\frac{\alpha\,\beta\,z\cos(\gamma z)}{\gamma^2(-1+\nu)}$$

$$Lwx := \frac{1}{4}\frac{\alpha\,z\sin(\gamma z)}{\gamma\,(-1+\nu)}$$

$$Lxx := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu}+\frac{1}{2}\frac{z\sin(\gamma z)\,\alpha^2}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lyx := \frac{1}{2}\frac{\beta\,\alpha\,z\sin(\gamma z)}{\gamma\,(-1+\nu)}$$

$$Lzx := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)\,\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Luy := \frac{1}{4}\frac{\alpha\,\beta\sin(\gamma z)}{\gamma^3(-1+\nu)} - \frac{1}{4}\frac{\alpha\,\beta\,z\cos(\gamma z)}{\gamma^2(-1+\nu)}$$

$$Lvy := -\frac{1}{4}\frac{\beta^2 z\cos(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma^2} - \frac{1}{4}\frac{(-4\,\alpha^2\nu + 4\,\alpha^2 + 3\,\beta^2 - 4\,\beta^2\nu)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma^3}$$

$$Lwy := \frac{1}{4}\frac{\beta\,z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)}$$

$$Lxy := \frac{1}{2}\frac{\beta\,\alpha\,z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)}$$

$$Lyy := \frac{1}{2}\frac{(-2+2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{\beta^2 z\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lzy := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\beta}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)\,\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Luz := \frac{1}{4}\frac{\alpha\,z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)}$$

$$Lvz := \frac{1}{4}\frac{\beta\,z\sin(\gamma z)}{\gamma(-1+\nu)}$$

$$Lwz := \frac{1}{4}\frac{z\cos(\gamma z)}{-1+\nu} + \frac{1}{4}\frac{(4\nu-3)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lxz := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\alpha}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(2\nu-1)\,\alpha\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lyz := \frac{1}{2}\frac{z\cos(\gamma z)\,\beta}{-1+\nu} + \frac{1}{2}\frac{(2\nu-1)\,\beta\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

$$Lzz := -\frac{1}{2}\frac{(2-2\nu)\cos(\gamma z)}{-1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{(z\,\alpha^2 + \beta^2 z)\sin(\gamma z)}{(-1+\nu)\,\gamma}$$

Рис. 2.3. Выведенные программой, дифференциальные операторы В.З. Власова

ВЫВОДЫ

В статье была представлена схема получения решения уравнений теории упругости по методу начальных функций Власова в виде операторно-символических рядов. Для построения операторов использовались бигармонические уравнения. Так как получение решения в аналитической форме является весьма сложной задачей, то при составлении математической модели той или иной задачи теории упругости авторы отдают предпочтение системе компьютерной математики Maple, которая, благодаря своим обширным возможностям в области программирования и вычисления символьных операций, позволяет строить модель каждой из задач, используя метод начальных функций Власова [1]. Были рассмотрены и проанализированы два способа составления системы, из которой выводятся операторы Власова, по мнению авторов, второй способ является более эффективным, так как содержит меньшее количество итераций.

Все перечисленные положения позволяют создать новую библиотеку и препроцессор в MAPLE, с помощью которых будет возможно решать задачи теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры Maple: Искусство программирования. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2006. – 792 с.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.

3. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 528 с.

4. Толок В.А., Шапар В.В. Операторно-символьные ряды Власова В.З. в решении задач теории упругости в системе Maple // Гідроакустичний журнал. – 2006. - № 3. – С. 66-74.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В 3D ЗАДАЧАХ АКУСТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Гахов А.В., старший преподаватель

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Рассматриваются вопросы построения математических моделей и методов их численного анализа в качестве инструментальных компьютерных средств исследования дифракции акустических волн на плоскопараллельных структурах в резонансном диапазоне.

Ключевые слова: математическое моделирование, методы дискретных особенностей, численный анализ, дифракция

Гахов А.В. Математичні моделі та обчислювальний експеримент у 3D задачах акустичної дифракції на пласкопаралельних структурах / Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна, Україна.

Розглядаються питання побудови математичних моделей та методів їх чисельного аналізу як інструментальні комп'ютерні засоби дослідження дифракції акустичних хвиль на пласкопаралельних структурах у резонансному діапазоні.

Ключові слова: математичне моделювання, методи дискретних особливостей, чисельний аналіз, дифракція

Gahov A.B. Mathematical models and numerical experiment in 3D problems of acoustic diffraction on flatness structures / V.N. Karazin Kharkov National University, Ukraine

Problems of mathematical modeling and construction of methods for numerical analysis have been considered as computer tools for investigation of acoustic waves on flatness structures in resonant band.

Key words: mathematical modelling, discrete singularities methods, numerical analysis, diffraction

ВВЕДЕНИЕ

Проблема усовершенствования математических моделей 3D дифракции волн (как акустических, так и электромагнитных) для исследований с целью построения на их базе эффективных численных методов, позволяющих вычислять рассеянные поля в ближней и дальней зонах, были рассмотрены в работах [1,2,3,4,5] на базе подходов, получивших название методов дискретных особенностей (МДО).

В работе [4] дано теоретическое обоснование и подведен итог исследований «практической сходимости» соответствующих численных методов.

Указанные работы опирались на метод потенциалов, а вычислительные эксперименты фактически проводились для рассеивающих объектов простой формы (прямоугольные и сферические экраны), находящихся в однородной среде в неограниченном пространстве.

Задачи, более близкие к приложениям, приводят к аналитическим трудностям при построении моделей МДО и к трудностям в их реализации на компьютерах (большие размерности). Поэтому была актуальной разработка более специализированных методов дискретных особенностей, которые, учитывая главные требования приложений, позволяли бы максимально использовать упрощения в постановках исходных краевых задач по другим направлениям. Таким методом оказался метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов [6,7,8].

Автором настоящей работы этим методом ранее была построена математическая модель в форме гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ) для процесса дифракции звуковых волн на жестком экране, расположенном на плоском разделе двух сред с разными звукопроводящими свойствами [9]. Также была рассмотрена аналогичная задача в полупространстве с жесткой границей [10]. Проблема состоит в том, что в последней задаче, наряду с важным для практики рассмотрением жесткого экрана на плоском слое конечной толщины, делаются идеализирующие предположения о безграничной протяженности этого слоя и стенки, на которой он находится. Отметим, что эффект безграничной