

3. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 528 с.
4. Толоч В.А., Шапар В.В. Операторно-символьные ряды Власова В.З. в решении задач теории упругости в системе Maple // Гідроакустичний журнал. – 2006. - № 3. – С. 66-74.

УДК 519.6

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В 3D ЗАДАЧАХ АКУСТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Гахов А.В., старший преподаватель

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина*

Рассматриваются вопросы построения математических моделей и методов их численного анализа в качестве инструментальных компьютерных средств исследования дифракции акустических волн на плоскопараллельных структурах в резонансном диапазоне.

*Ключевые слова: математическое моделирование, методы дискретных особенностей, численный анализ, дифракция*

Гахов А.В. Математичні моделі та обчислювальний експеримент у 3D задачах акустичної дифракції на плоскопараллельних структурах / Харьківський національний університет ім. В.Н.Каразіна, Україна.

Розглядаються питання побудови математичних моделей та методів їх чисельного аналізу як інструментальні комп'ютерні засоби дослідження дифракції акустичних хвиль на плоскопараллельних структурах у резонансному діапазоні.

*Ключові слова: математичне моделювання, методи дискретних особливостей, чисельний аналіз, дифракція*

Gahov A.B. Mathematical models and numerical experiment in 3D problems of acoustic diffraction on flatness structures / V.N. Karazin Kharkov National University, Ukraine

Problems of mathematical modeling and construction of methods for numerical analysis have been considered as computer tools for investigation of acoustic waves on flatness structures in resonant band.

*Key words: mathematical modelling, discrete singularities methods, numerical analysis, diffraction*

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема усовершенствования математических моделей 3D дифракции волн (как акустических, так и электромагнитных) для исследований с целью построения на их базе эффективных численных методов, позволяющих вычислять рассеянные поля в ближней и дальней зонах, были рассмотрены в работах [1,2,3,4,5] на базе подходов, получивших название методов дискретных особенностей (МДО).

В работе [4] дано теоретическое обоснование и подведен итог исследований «практической сходимости» соответствующих численных методов.

Указанные работы опирались на метод потенциалов, а вычислительные эксперименты фактически проводились для рассеивающих объектов простой формы (прямоугольные и сферические экраны), находящихся в однородной среде в неограниченном пространстве.

Задачи, более близкие к приложениям, приводят к аналитическим трудностям при построении моделей МДО и к трудностям в их реализации на компьютерах (большие размерности). Поэтому была актуальной разработка более специализированных методов дискретных особенностей, которые, учитывая главные требования приложений, позволяли бы максимально использовать упрощения в постановках исходных краевых задач по другим направлениям. Таким методом оказался метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов [6,7,8].

Автором настоящей работы этим методом ранее была построена математическая модель в форме гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ) для процесса дифракции звуковых волн на жестком экране, расположенном на плоском разделе двух сред с разными звукопроводящими свойствами [9]. Также была рассмотрена аналогичная задача в полупространстве с жесткой границей [10]. Проблема состоит в том, что в последней задаче, наряду с важным для практики рассмотрением жесткого экрана на плоском слое конечной толщины, делаются идеализирующие предположения о безграничности протяженности этого слоя и стенки, на которой он находится. Отметим, что эффект безграничной

*Фізико-математичні науки*

протяженности плоской стенки не исследовался ранее ни для трехмерного пространства, ни для аналогичных задач дифракции в двумерной постановке.

Цель настоящего исследования состояла в совместном рассмотрении трёх разных идеализированных постановок математических задач дифракции акустических волн для физической структуры, составленной из рассеивающего экрана на подложке, существенно больших размеров, чем сам экран, получение для них дискретных моделей и реализация численных экспериментов, которые позволяли бы судить о степени схожести рассеянных полей в этих постановках.

Для реализации поставленной цели решались следующие задачи:

1. Проверка единственности решений рассматриваемых задач дифракции.
2. Усовершенствование – трансформация стандартных математических моделей в форме краевых задач для уравнения Гельмгольца в ГСИУ.
3. Разработка численных методов решения дискретных задач, соответствующих модели в форме ГСИУ.
4. Усовершенствование методов численного анализа дискретных задач с точки зрения компьютерных аспектов моделирования рассеянных полей на их базе.

### ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

**Постановка 1.** Рассматривается задача рассеяния плоской скалярной волны на плоском ограниченном абсолютно жестком экране  $\Sigma$ , расположенном на расстоянии  $d > 0$  над жесткой стенкой в плоскости раздела сред с разными характеристиками.

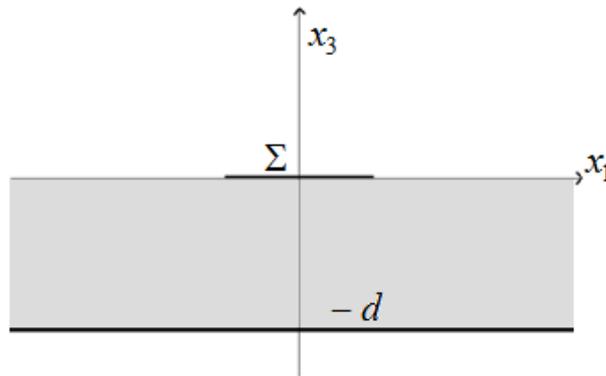


Рис. 1. Падение плоской волны на экран. Физические среды над и под плоскостью экрана  $x_3 = d$  различны, область под экраном ограничена снизу жесткой стенкой ( $x_3 = 0$ )

Обозначим верхнее полупространство как  $D_+$ , его плотность  $\rho_+ > 0$  и скорость распространения волны  $a_+ > 0$ . Аналогично, второе полупространство обозначим как  $D_-$ , плотность  $\rho_- > 0$  и скорость распространения волны  $a_- > 0$ . Падающую волну и, соответственно, рассеянное поле мы считаем имеющими постоянную частоту  $\omega > 0$ , так что волновое число равно  $k_{\pm} = \frac{\omega}{a_{\pm}} > 0$ ,  $x \in D_{\pm}$ .

Падающее поле  $p(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  в нашей модели рассматривается в форме плоской скалярной волны, пришедшей от бесконечно далёкого источника, с учётом структуры среды ее распространения, которое имело бы место при отсутствии там рассеивающего экрана  $\Sigma$ .

Полное, то есть фактически наблюдаемое в процессе рассеяния (в присутствии экрана  $\Sigma$ ) поле  $v(x)$ , ищем в виде [11]:

$$v(x) = p(x) + w(x), \quad (x \in \mathbb{R}^3) \quad (1)$$

где  $w(x)$  - рассеянное экраном поле, которое необходимо определить.

Рассеянное экраном поле  $w(x)$  может быть найдено из следующих условий:

- 1) Выполнение уравнений Гельмгольца  $\Delta w + k_+^2 w = 0$  ( $x \in D_+$ ) и  $\Delta w + k_-^2 w = 0$  ( $x \in D_-$ )

2) Условие на бесконечности (условие Зоммерфельда)

$$\left( \frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ik_{\pm} w(x) = o\left( \frac{1}{|x|} \right), w(x) = O\left( \frac{1}{|x|} \right), |x| \rightarrow \infty \text{ (равномерно по направлениям } \frac{x}{|x|} \text{)} \quad (3)$$

3) Условие Мейкснера (условие конечности энергии в окрестности  $U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)$  края экрана  $\partial\Sigma$ ):

$$\int_{U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (4)$$

$$4) \quad \frac{1}{\rho_-} \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d-0} = \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d+0}, (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad (5)$$

$$w|_{x_3=d-0} = w|_{x_3=d+0}, (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma} \quad (6)$$

$$5) \text{ Условие абсолютной жесткости стенки } \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = 0 \quad (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad (7)$$

**Постановка 2.** Рассматривается задача рассеяния плоской скалярной волны на плоском ограниченном абсолютно жестком экране  $\Sigma$ , расположенном на расстоянии  $d > 0$  над жесткой стенкой в однородном пространстве.

Обозначим полупространство  $\{x \in \mathfrak{R}^3 : x_3 > -d\}$  как  $D$ , его плотность  $\rho > 0$  и скорость распространения волны  $a > 0$ . Падающую волну и, соответственно, рассеянное поле мы считаем имеющими постоянную частоту  $\omega > 0$ , так что волновое число равно  $k = \frac{\omega}{a} > 0$ ,  $x \in D$

Рассеянное экраном поле  $w(x)$  может быть найдено из следующих условий:

$$1) \text{ Выполнение уравнения Гельмгольца } \Delta w + k^2 w = 0 \quad (x \in D) \quad (8)$$

$$2) \left( \frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ikw(x) = o\left( \frac{1}{|x|} \right), w(x) = O\left( \frac{1}{|x|} \right), |x| \rightarrow \infty \text{ (равномерно по направлениям } \frac{x}{|x|} \text{)} \quad (9)$$

$$3) \int_{U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (10)$$

$$4) \quad \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}, (x_1, x_2) \in \Sigma \quad (11)$$

$$w|_{x_3=0} = w|_{x_3=+0} \quad ((x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}) \quad (12)$$

$$5) \text{ Условие абсолютной жесткости стенки } \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-d+0} = 0 \quad (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad (13)$$

**Постановка 3.** Рассматривается задача рассеяния плоской скалярной волны на системе из двух плоских ограниченных абсолютно жестких экранов  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$ , расположенных в параллельных плоскостях на расстоянии  $d > 0$  в однородном пространстве.

Падающую волну и, соответственно, рассеянное поле мы считаем имеющими постоянную частоту  $\omega > 0$ , так что волновое число равно  $k = \frac{\omega}{a} > 0$ ,  $x \in \mathfrak{R}^3$ . Обозначим  $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ .

Рассеянное экраном поле  $w(x)$  может быть найдено из следующих условий:

$$1) \text{ Выполнение уравнения Гельмгольца } \Delta w + k^2 w = 0 \quad (x \in \mathfrak{R}^3 \setminus \bar{\Sigma}) \quad (14)$$

$$2) \left( \frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ikw(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), w(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty \text{ (равномерно по направлениям } \frac{x}{|x|}) \quad (15)$$

$$3) \int_{U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (16)$$

4) Условия непрерывности

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}, (x_1, x_2) \in \Sigma_+, \frac{\partial w}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-d} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-d}, (x_1, x_2) \in \Sigma_- \quad (17)$$

$$w|_{x_3=0} = w|_{x_3=+0} \left( (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}_+ \right), w|_{x_3=-d-0} = w|_{x_3=-d+0} \left( (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}_- \right) \quad (18)$$

### ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

При практическом исследовании корректности краевых задач для таких хорошо изученных уравнений, как уравнение Гельмгольца, ключевым является проверка единственности их решения (что указывает на учёт всех существенных краевых условий). Для постановок краевых задач дифракции в однородном пространстве это давно сделано для общего случая методом, основанном на формулах Грина [12]. Формально Постановка 1 таким результатом не охватывается в виду неоднородности пространства.

**Теорема 1** Если функции  $w_1 = w_1(x)$  и  $w_2 = w_2(x)$  принадлежат классу  $H_1(\mathfrak{R}^3 \setminus \bar{\Sigma})$  (в обозначениях [13]) и удовлетворяют условиям задачи (1)-(7) тогда  $w_1 = w_2$ , т.е. решение соответствующих задач единственно в данном классе функций.

Обозначим сужение функции  $w_1$  на полупространство  $D_+$  через  $w_+^1$ , а сужение на полупространство  $D_-$  через  $w_-^1$ . Тогда требование удовлетворения условиям (2)-(7) для функции  $w_1 = \{w_+^1, w_-^1\}$  будет означать:

$$\Delta w_+^1 + k_+^2 w_+^1 = 0 \quad (x \in D_+) \text{ и } \Delta w_-^1 + k_-^2 w_-^1 = 0 \quad (x \in D_-) \quad (19)$$

$$\frac{1}{\rho_-} \frac{\partial w_-^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d-0} = \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial w_+^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d+0} \quad (\tilde{x} \in \Sigma) \quad (20)$$

$$w_-^1 \Big|_{x_3=d-0} = w_+^1 \Big|_{x_3=d+0}, \frac{1}{\rho_-} \frac{\partial w_-^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d-0} = \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial w_+^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d+0} \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}) \quad (21)$$

$$\left( \frac{x}{|x|}, \text{grad } w_{\pm}^1(x) \right) - ik_{\pm} w_{\pm}^1(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), w_{\pm}^1(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty \quad (22)$$

$$\int_{U^+_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w_+^1|^2 + |\nabla w_+^1|^2) dx < \infty, \int_{U^-_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w_-^1|^2 + |\nabla w_-^1|^2) dx < \infty \quad (23)$$

$$\frac{\partial w_{\pm}^1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = 0 \quad (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2, \quad (24)$$

где  $U^{\pm}_{\partial\Sigma}(\varepsilon)$  - окрестности края экрана  $\partial\Sigma$  в полупространствах  $D_{\pm}$ .

Заметим, что для функции  $\bar{w}_1 = \{\bar{w}_+^1, \bar{w}_-^1\}$  (где черта означает комплексное сопряжение) выполняются в точности условия (19)-(21), (23), а в условии (22) разность величин меняется на их сумму.

Аналогичным условиям удовлетворяют и функции  $w_2 = \{w_+^2, w_-^2\}$  и  $\bar{w}_2 = \{\bar{w}_+^2, \bar{w}_-^2\}$ . Введем в рассмотрение функцию  $u = w_1 - w_2$ ,  $u \in H_1(\mathfrak{R}^3 \setminus \bar{\Sigma})$ , тогда  $u = \{u_+, u_-\}$ , где  $u_+ = w_+^1 - w_+^2$ ,  $u_- = w_-^1 - w_-^2$ . Теорема будет доказана, если мы покажем, что  $u_+ \equiv 0$  на  $D_+$  и  $u_- \equiv 0$  на  $D_-$ . Функции  $u = \{u_+, u_-\}$  и  $\bar{u} = \{\bar{u}_+, \bar{u}_-\}$  удовлетворяет условиям (19) - (24) по построению.

Пусть  $S^R = S_+^R \cup S_-^R$  сфера достаточно большого радиуса  $R$ , охватывающая наш плоский экран  $\Sigma$ , который лежит на диаметре, разделяющем сферу на две полусферы  $S_+^R$  и  $S_-^R$ .

В связи с тем, что наш экран  $\Sigma$  имеет ребра, окружим его поверхностью  $\Sigma^\varepsilon = \Sigma_+^\varepsilon \cup \Sigma_-^\varepsilon$  в виде кольцеобразного валика с малым радиусом  $\varepsilon$ . Так как мы рассматриваем задачу в полупространстве, ограниченном плоскостью  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ , то обозначим  $F^R = \left\{x \in D_- : x_3 = \frac{1}{R}\right\}$  и

$$\Omega_-^R = \left\{x \in S_-^R : x_3 \geq \frac{1}{R}\right\} \cup \left\{x \in F^R : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\right\}$$

Тогда  $T_+^R$  и  $T_-^R$  - области, ограниченные поверхностью  $\Sigma^\varepsilon$ , разрезом  $P$ , сферой  $S^R$  и плоскостью  $F^R$ .

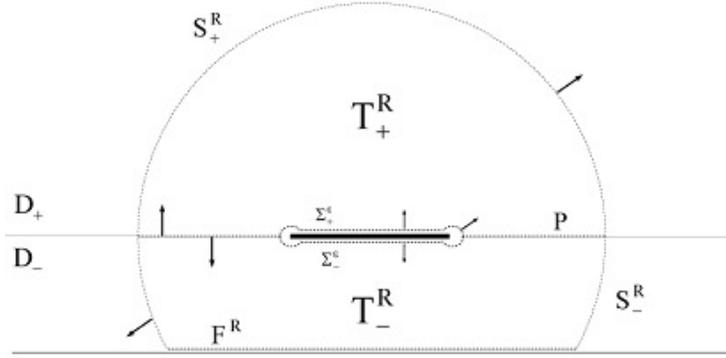


Рис. 2. К доказательству теоремы единственности

В областях  $T_+^R$  и  $T_-^R$ , для функций  $u = \{u_+, u_-\}$  и  $\bar{u} = \{\bar{u}_+, \bar{u}_-\}$  применима вторая формула Грина:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{T_+^R} (u_+ \Delta \bar{u}_+ - \bar{u}_+ \Delta u_+) d\tau &= \int_{S_+^R} \left( u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial n_+} - \bar{u}_+ \frac{\partial u_+}{\partial n_+} \right) d\sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_+^\varepsilon} \left( u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial n_+} - \bar{u}_+ \frac{\partial u_+}{\partial n_+} \right) d\sigma + \int_P \left( u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial n_+} - \bar{u}_+ \frac{\partial u_+}{\partial n_+} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{T_-^R} (u_- \Delta \bar{u}_- - \bar{u}_- \Delta u_-) d\tau &= \int_{\Omega_-^R} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_-^\varepsilon} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma + \int_P \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (26)$$

где под  $\frac{\partial}{\partial n_+}, \frac{\partial}{\partial n_-}$  понимается дифференцирование по нормали.

Пользуясь тем фактом, что на поверхности  $P$  выполняется равенство  $\frac{\partial}{\partial n_+} = -\frac{\partial}{\partial n_-}$ , а дифференцирование по внешней нормали для поверхностей  $S_+^R$  и  $\Omega_-^R \setminus F^R$  равносильно дифференцированию по радиусу сферы в соответствующей точке поверхности, используя условие (22), получаем:

$$0 = \frac{1}{\rho_+} \cdot \int_{\Sigma_+^\varepsilon} \left( u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial n_+} - \bar{u}_+ \frac{\partial u_+}{\partial n_+} \right) d\sigma + \frac{1}{\rho_-} \cdot \int_{\Sigma_-^\varepsilon} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma + \frac{1}{\rho_-} \cdot \int_{F^R} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma -$$

$$-\frac{2ik_+}{\rho_+} \cdot \int_{S_+^R} u_+ \cdot \bar{u}_+ \cdot d\sigma - \frac{2ik_-}{\rho_-} \cdot \int_{\Omega_-^R \setminus F^R} u_- \cdot \bar{u}_- \cdot d\sigma + \Theta\left(\frac{1}{R}\right), \quad (27)$$

$$\Theta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\rho_+} \cdot \int_{S_+^R} \left[ u_+ \cdot o\left(\frac{1}{R}\right) - \bar{u}_+ \cdot o\left(\frac{1}{R}\right) \right] \cdot d\sigma + \frac{1}{\rho_-} \cdot \int_{\Omega_-^R \setminus F^R} \left[ u_- \cdot o\left(\frac{1}{R}\right) - \bar{u}_- \cdot o\left(\frac{1}{R}\right) \right] \cdot d\sigma, \quad \Theta\left(\frac{1}{R}\right)_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Заметим, что на поверхности  $F^R$  (при  $R \rightarrow \infty$ ) выполняется равенство  $\frac{\partial}{\partial n_-} = -\frac{\partial}{\partial x_3}$ , тогда вследствие условия (24)

$$\int_{F^R} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (28)$$

Рассмотрим более подробно интегралы по  $\Sigma_+^\varepsilon$  и  $\Sigma_-^\varepsilon$ . В силу выполнения условия Майкснера (23) для функций  $u = \{u_+, u_-\}$  и  $\bar{u} = \{\bar{u}_+, \bar{u}_-\}$  интегралы по таким вспомогательным поверхностям будут стремиться к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В противном случае ребро бы излучало энергию [14]

Учитывая вышесказанное и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в равенстве (27), получаем:

$$0 = -\frac{2ik_+}{\rho_+} \cdot \int_{S_+^R} u_+ \cdot \bar{u}_+ \cdot d\sigma - \frac{2ik_-}{\rho_-} \cdot \int_{\Omega_-^R \setminus F^R} u_- \cdot \bar{u}_- \cdot d\sigma + \frac{1}{\rho_-} \cdot \int_{F^R} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_-} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} \right) d\sigma + \Theta\left(\frac{1}{R}\right) \quad (29)$$

Введем сферические координаты  $(R, \theta, \varphi)$  в интегралах по  $S_+^R$  и  $\Omega_-^R \setminus F^R$ , полагая  $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ :  
Переходя к пределу в (29), получаем, что

$$\frac{2ik_+}{\rho_+} \cdot \int_{S_+^R} |R \cdot u_+|^2 \cdot d\Omega + \frac{2ik_-}{\rho_-} \cdot \int_{S_-^R} |R \cdot u_-|^2 \cdot d\Omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (30)$$

Каждое из слагаемых в (30) положительно и имеет одинаковую скорость стремления к 0, поэтому верно:

$$\int_{S_+^R} |R \cdot u_+|^2 \cdot d\Omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{и} \quad \int_{S_-^R} |R \cdot u_-|^2 \cdot d\Omega \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (31)$$

Если функция  $u = \{u_+, u_-\}$  удовлетворяет условию (31), тогда она должна либо быть равна тождественно нулю либо иметь скорость убывания более чем  $\frac{1}{R}$ . Однако из теоремы Реллиха [14] следует, что всякое поле, убывающее быстрее, чем  $\frac{1}{R}$ , тождественно равно нулю во всем пространстве.

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ГСИУ

Для задачи (1)-(7) граничное ГСИУ пока было построено только методом параметрических представлений гиперсингулярных и псевдодифференциальных операторов (ППГИПО) в работе [10], где предполагалось и использовалось различие сред над и под экраном (т.е.  $k_+ \neq k_-$ ). К задачам в Постановках 2,3 приложим метод потенциалов [5], и, в принципе, метод ППГИПО.

Докажем применимость метода ППГИПО для вывода граничного ГСИУ, эквивалентного краевой задаче (8)-(13), которую можно рассматривать как предельный и не рассмотренный ранее случай  $k_+ = k_-$ .

Неизвестную функцию  $w(x)$  будем искать в виде следующего представления:

$$w(x) = \begin{cases} F^{-1} \left\{ c_+ (\lambda) e^{-x_3 \gamma} \right\} (\tilde{x}) & , \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, x_3 > 0 \\ F^{-1} \left\{ c_-^1 (\lambda) e^{-(x_3+d)\gamma} + c_-^2 (\lambda) e^{(x_3+d)\gamma} \right\} (\tilde{x}) & , \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, -d < x_3 < 0 \end{cases} \quad (32)$$

где  $c_+(\lambda), c_-(\lambda), c_\pm^2(\lambda) \in \wp$  - неизвестные функции, подлежащие определению;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ ,  $\gamma_\pm(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k_\pm^2}$ , причем, учитывая (9), выбираем ту ветвь корня, для которой  $\text{Im } \gamma \leq 0$  ( $|\lambda| < k$ ) или  $\text{Re } \gamma \geq 0$  ( $|\lambda| \geq k$ ).

Действие оператора  $F^{-1}$  (обратного оператора Фурье) рассматриваем на пространстве обобщенных функций [13]:

$$(F^{-1}\{g\})(\tilde{x}), \psi(\tilde{x}) = \left( g(\tilde{x}), \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{R}^2} \psi(\tilde{x}) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\tilde{x} \right), (g(\lambda) \in \wp', \psi(\tilde{x}) \in \wp)$$

Из условия (13) получаем, что  $c_-(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} c_-^1(\lambda) \equiv c_-^2(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathfrak{R}^2$ . Следовательно

$$w(x) = \begin{cases} F^{-1}\{c_+(\lambda) e^{-x_3 \gamma}\}(\tilde{x}), & \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, x_3 > 0 \\ F^{-1}\{c_-(\lambda)(e^{-(x_3+d)\gamma} + e^{(x_3+d)\gamma})\}(\tilde{x}), & \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, -d < x_3 < 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} = \begin{cases} F^{-1}\{-\gamma \cdot c_+(\lambda) e^{-x_3 \gamma}\}(\tilde{x}), & \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, x_3 > 0 \\ F^{-1}\{-\gamma \cdot c_-(\lambda)(e^{-(x_3+d)\gamma} - e^{(x_3+d)\gamma})\}(\tilde{x}), & \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, -d < x_3 < 0 \end{cases} \quad (34)$$

Из непрерывности нормальной производной при переходе через  $x_3 = 0$  следует

$$F^{-1}\{-\gamma \cdot c_+(\lambda)\} = F^{-1}\{-\gamma \cdot c_-(\lambda) \cdot (e^{-d\gamma} - e^{d\gamma})\}, \lambda \in \mathfrak{R}^2$$

и, так как равенство выполняется в каждой точке плоскости, получаем

$$\gamma \cdot c_+(\lambda) = \gamma \cdot c_-(\lambda) \cdot (e^{-d\gamma} - e^{d\gamma}), \lambda \in \mathfrak{R}^2 \quad (35)$$

В предположении, что  $\gamma \neq 0$  ( $\lambda \in \mathfrak{R}^2$ ):

$$c_-(\lambda) = \frac{c_+(\lambda)}{(e^{-d\gamma} - e^{d\gamma})}, \lambda \in \mathfrak{R}^2 \quad (36)$$

Из условия (12) следует, что:

$$\text{supp} \left( F^{-1} \left\{ c_+(\lambda) \cdot \left( 1 + \frac{e^{d\gamma} + e^{-d\gamma}}{e^{d\gamma} - e^{-d\gamma}} \right) \right\} \right) \subseteq \Sigma \quad (37)$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию (вследствие (37)  $\text{supp}(u) \subseteq \Sigma$ ):

$$u(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1} \left\{ c_+(\lambda) \left( 1 + \frac{e^{d\gamma} + e^{-d\gamma}}{e^{d\gamma} - e^{-d\gamma}} \right) \right\}, ((x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2) \quad (38)$$

Для получения уравнения относительно неизвестной функции (38) воспользуемся условием (11):

$$F^{-1}\{-\gamma \cdot c_+(\lambda)\} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} \stackrel{\text{def}}{=} p(x), ((x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2) \quad (39)$$

Окончательно, псевдодифференциальное уравнение для неизвестной функции  $u(\tilde{x})$  (38) имеет вид:

$$u * F^{-1} \left\{ \frac{-\gamma_+}{\rho_+ \cdot \left( 1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)} \right\} = f(\tilde{x}), (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2), \quad (40)$$

где \* - символ свертки.

Исследование структуры ядра уравнения (43) показывает, что это гиперсингулярное уравнение, причем имеет практически такую же структуру, как исследованные в [4].

$$K(\tilde{x}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \cdot \frac{e^{ik|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{e^{ik|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} + H(|\tilde{x}|), \quad \tilde{x} = (x_1, x_2), \quad (41)$$

где  $H(\xi) = P(\xi) + F^{-1}\{L\}(\xi) \in C^1(\mathfrak{R}^2)$

### ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Для численного решения ГСИУ (41) построим соответствующую структуре ядра модификацию известного обобщенного метода замкнутых дискретных вихревых рамок [3,4]. Ищем приближение к решению указанных уравнений в классе кусочно-постоянных функций:

$$u(\tilde{x}) = \sum_{\mu \in M} u_\mu \cdot I_\mu(\tilde{x}), \quad (42)$$

где  $|M| < \infty$ ,  $\Sigma = \bigcup_{\mu \in M} \Sigma_\mu$ ,  $\Sigma_\mu \cap \Sigma_\eta = \emptyset$  ( $\mu \neq \eta$ ), сеть  $\{\Sigma_\mu\}_{\mu \in M}$  образуется путем равномерного

разбиения  $\Sigma$  на квадраты,  $u_\mu = u(\tilde{x}_\mu)$ , где  $\tilde{x}_\mu$  - центр квадрата  $\Sigma_\mu$  (точка коллокации),

$$I_\mu(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_\mu \\ 0, & \tilde{x} \notin \bar{\Sigma}_\mu \end{cases} \text{ - индикаторная функция квадрата } \Sigma_\mu.$$

Подстановка функции вида (42) в ГСИУ (40) позволяет получить дискретную модель в форме системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$u(\tilde{x}) * K(\tilde{x}) = \sum_{\mu \in M} u_\mu \cdot \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_\mu} K(|\tilde{x} - \tilde{x}_\nu|) d\tilde{x} = f(\tilde{x}_\nu), \quad \forall \nu \in M: \tilde{x}_\nu \in \Sigma_\nu, \quad (43)$$

где а.ф.р. перед знаком интеграла обозначает, что интеграл понимается в обобщенном смысле по Адамару [3,4].

Для вычисления коэффициентов полученной СЛАУ необходимо воспользоваться видом ядра (41):

$$\text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_\mu} K(\tilde{x}) d\tilde{x} = - \oint_{\partial \Sigma_\mu} \left( dl \times \nabla_{\tilde{x}} \frac{e^{ik_*|\tilde{x}-\tilde{x}_\nu|}}{|\tilde{x}-\tilde{x}_\nu|} \right) \cdot \hat{n} + \frac{k^2}{2} \cdot \text{v.p.} \iint_{\Sigma_\mu} \frac{e^{ik_*|\tilde{x}-\tilde{x}_\nu|}}{|\tilde{x}-\tilde{x}_\nu|} d\tilde{x} + \iint_{\Sigma_\mu} P(|\tilde{x}-\tilde{x}_\nu|) d\tilde{x}, \quad (44)$$

где v.p. перед знаком интеграла обозначает, что интеграл понимается в смысле Коши.

Отметим, что последний интеграл в выражении (44) имеет гладкое ядро, однако его вычисление на компьютере, как правило, требует детального изучения его свойств.

Вид дискретных математических моделей для Постановок 1,3 был известен ранее [3,5,10], и использован нами в данной работе наряду с (43)-(44) для разработки конкретных численных методов, позволивших создать соответствующее программное средство компьютерного моделирования и провести счёт на персональном компьютере.

### ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Программная реализация численных методов, разработанных на базе дискретных математических моделей МДО, выполнена на языке Fortran 90 с использованием библиотек IMSL и БЧА НИВЦ МГУ, позволяющих вычислять как непосредственно рассеянное поле в любой точке пространства, так и различные характеристики (например, диаграмму направленности, поперечник рассеяния).

Вычисления проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core 2 Duo 2.4GHz, объемом оперативной памяти 1Gb и операционной системой Windows Vista Home Edition.

Таблица 1. - Пример расчета для Постановки 1 при малом отличии параметров сред.

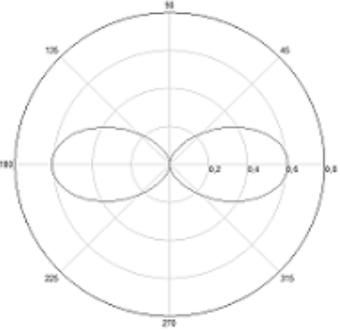
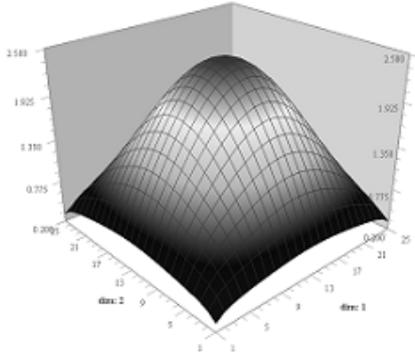
1	2	3
Параметры	Модуль функции диаграммы направленности	Модуль функции плотности
1	2	3
$k_1 = 2\pi, k_2 = 1.8\pi$ $25 \times 25, d = 0.2$ Время счета: 900.7сек		

Таблица 2. - Пример расчета для Постановки 2.

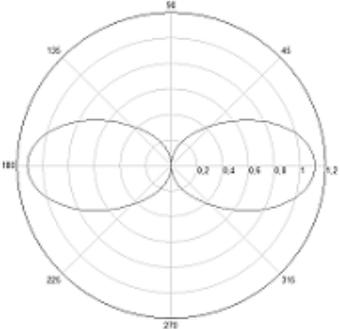
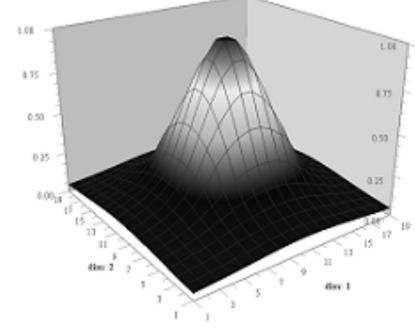
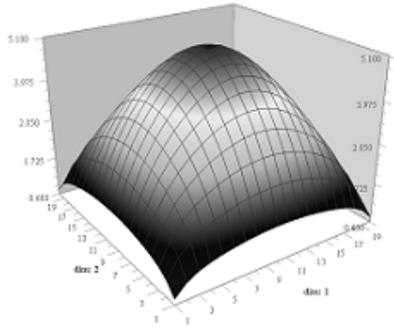
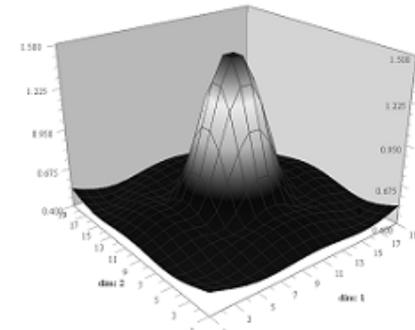
Параметры	Модуль функции диаграммы направленности	Модуль рассеянного поля в области над экраном
$k = 2\pi$ $25 \times 25, d = 0.1$ Время счета: 108.0сек		

Таблица 3. - Пример расчета для Постановки 3.

Параметры	Модуль функции плотности на верхнем экране	Модуль рассеянного поля в области над экраном
$k = 2\pi$ $20 \times 20, 40 \times 40$ $d = 0.1$ Время счета: 4737.3сек		

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана единственность решения задачи дифракции плоской акустической волны на абсолютно жестком экране в типичной постановке для плоскопараллельных сред с кусочно-постоянными характеристиками.

Получено граничное гиперсингулярное интегральное уравнение для задачи 3D дифракции акустических волн на абсолютно жестком плоском экране методом ППГИПО в постановке, выпадающей из общего случая, рассмотренного ранее в работе [10].

Одновременное рассмотрение разных вариантов математических постановок задачи дифракции акустических волн на плоском жестком экране при наличии подложки и разработка численных методов их решения на базе дискретных моделей позволяет, например, проводить сравнение разных вариантов компьютерного моделирования рассеянного поля для физической задачи, где размеры подложки намного превышают размеры экрана, а свойства слоя материала подложки мало разнятся от свойств окружающей среды.

Разработаны программные средства компьютерного моделирования, удовлетворяющие требованиям к качеству программного обеспечения, которые позволяют передавать их другим исследователям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // ДАН СССР. – 1984.- Т.286, вып. 1. - С. 96-100.
2. Захаров Е. В., Лифанов И. К., Лифанов П. И. Квадратурные формулы для гиперсингулярного интеграла на сфере и численное решение уравнения с ним // Дифференц. уравнения. -2001.- Т. 37.- № 10.
3. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.
4. Вайнико Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К, 2001.– 508 с.
5. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. – К.: Наукова Думка, 2002.- 343с.
6. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003. – Харьков-Херсон, 2003. – С.53-58.
7. Антоненко А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного интегрального уравнения задач дифракции на плоском экране // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».- Вип.1. - № 590, 2003. - С. 9-14.
8. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". - №733. – 2006. – С. 58-75.
9. Гахов А. В. Математическое моделирование рассеяния акустических волн на жестком экране в слоисто-неоднородном полупространстве // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". - №775. - Вып. 7. - 2007. - С.92-98.
10. Гахов А. В. Численное исследование рассеяния скалярных волн плоским экраном на границе слоя в полупространстве над жесткой плоскостью // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления".- №780. - Вып. 8. - 2007. - С.79-93.
11. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.- М.: Мир, 1987. – 311с.
12. Ладженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.- 2-е изд. - М.: Наука, 1973.
13. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике - М.: Наука, 1979. - 318 с.
14. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. - М., 1964.