

УДК 519.61:004.925.8

## УПРАВЛЯЕМЫЕ СЕРЕНДИПОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, СОХРАНЯЮЩИЕ МЕЖЭЛЕМЕНТНУЮ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Астионенко И.А., ст. преподаватель, Козуб Н.А., ст. преподаватель,  
Литвиненко Е.И., к.т.н., доцент, Хомченко А.Н., д. ф.-м. н., профессор

*Херсонский национальный технический университет*

В статье описан новый подход к построению базисных функций серендиповых конечных элементов высших порядков. Предложен метод, сочетающий преимущества прямого геометрического моделирования и традиционной матричной алгебры. Показана возможность эффективного управления функцией формы на конечном носителе.

*Ключевые слова: серендиповы элементы, базисные функции, спектр узловых нагрузок, обратные задачи серендиповых аппроксимаций, способ взвешенного усреднения альтернативных базисов.*

Астионенко І.О., Козуб Н.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. КЕРОВАНІ СЕРЕНДИПОВІ ПОВЕРХНІ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ МІЖЕЛЕМЕНТНУ НЕПЕРЕРВНІСТЬ / Херсонський національний технічний університет, Україна

У статті описаний новий підхід до побудови базисних функцій серендипових скінченних елементів вищих порядків. Запропоновано метод, що поєднує переваги прямого геометричного моделювання і традиційної матричної алгебри. Показана можливість ефективного керування функцією форми на скінченному носії.

*Ключові слова: серендипові елементи, базисні функції, спектр вузлових навантажень, обернені задачі серендипових апроксимацій, спосіб зв'язаного усереднення альтернативних базисів.*

Astionenko I.A., Kozub N.A., Litvinenko E.I., Khomchenko A.N. DIRECTED SERENDIPITY SURFACES KEEPING THE INTERELEMENT CONTINUITY / Kherson National Technical University, Ukraine

A new approach to the building of basis functions of serendipian finite elements of higher orders is described in the article. A way combining advantages of direct geometric modeling and traditional matrix algebra is proposed. A possibility of effective form function control on the finite carrier is shown.

*Key words: serendipian elements, basis functions, nodal load spectrum, inverse problems of serendipity approximation, method of weighted averaging of alternative bases.*

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При построении базисных функций на двумерных серендиповых конечных элементах (СКЭ), имеющих 16 и более узлов, приходится возвращаться к использованию внутренних узлов или добавлять базисные функции, ассоциируемые с параметром, не включенным в связи между элементами [1]. При использовании таких элементов добавление многочленных компонент легко осуществить локально, чтобы добиться уточнения в области, где неизвестная функция изменяется особенно быстро и, следовательно, аппроксимация может давать наибольшую погрешность. Проблема заключается в создании альтернативных моделей серендиповых элементов с дополнительными степенями свободы, которые можно ансамблировать со стандартными элементами без нарушений межэлементной непрерывности. Здесь описан простой и наглядный способ построения альтернативных моделей серендиповых элементов, позволяющий решать обратные задачи серендиповых аппроксимаций.

### АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Появление серендиповых элементов связывают с развитием техники изопараметрических преобразований криволинейных элементов [2]. Первые попытки модифицировать серендиповы модели описаны в работе [3]. Геометрические приемы построения серендиповых базисов и способ взвешенного усреднения альтернативных моделей можно найти в [4-6].

### ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Основная задача статьи – изучить возможность управления базисными функциями с целью оптимизации интерполяционных и вычислительных качеств серендиповых моделей высших порядков. Хорошо известно, что эти модели имеют неестественный спектр поузлового распределения равномерной массовой силы. Чтобы получить естественный спектр, мы используем результаты наблюдений за блуждающими частицами внутри элемента с поглощениями в граничных узлах. Задача сводится к построению полиномов с естественным спектром узловых значений.

*Фізико-математичні науки*

В качестве примера мы рассматриваем СКЭ-16 – серендипов конечный элемент с 16 равномерно расположенными узлами на контуре (см. рис.1).

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Построение базисных функций начнем с углового узла 1. В состав базисной функции для узла 1 включим уравнения противоположащих сторон квадрата, уравнения прямой и кривой второго порядка, которые проходят через узлы 2, 3, 4, 14, 15, 16. Тогда уравнение базисной функции для узла 1 получим в виде:

$$N_1 = K_1(1-\xi)(1-\eta)(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1)(K\xi + M\eta + 1) \quad (1)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $K_1, A, B, C, D, E, K, M$  составим систему уравнений, используя интерполяционную гипотезу Лагранжа и предположение о совпадении теоретического и экспериментального значений в поузловом распределении равномерной массовой силы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} N_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,022, \\ N_1(-1; -1) = 4K_1(A + B + C - D - E + 1)(-K - M + 1) = 1, \\ N_1\left(-\frac{1}{2}; -1\right) = 3K_1\left(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + C - \frac{1}{2}D - E + 1\right)\left(-\frac{1}{2}K - M + 1\right) = 0, \\ N_1(0; -1) = 2K_1(C - E + 1)(-M + 1) = 0, \\ N_1\left(\frac{1}{2}; -1\right) = K_1\left(\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B + C + \frac{1}{2}D - E + 1\right)\left(\frac{1}{2}K - M + 1\right) = 0, \\ N_1\left(-1; \frac{1}{2}\right) = K_1\left(A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C - D + \frac{1}{2}E + 1\right)\left(-K + \frac{1}{2}M + 1\right) = 0, \\ N_1(-1; 0) = 2K_1(A - D + 1)(-K + 1) = 0, \\ N_1\left(-1; -\frac{1}{2}\right) = 3K_1\left(A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C - D - \frac{1}{2}E + 1\right)\left(-K - \frac{1}{2}M + 1\right) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

В правой части первого уравнения системы (2) записано экспериментальное значение относительной частоты поглощения в первом узле частиц, стартовавших из барицентра СКЭ. В левой части этого же уравнения интеграл представляет собой долю первого узла в поузловом распределении равномерной массовой силы. С геометрической точки зрения, это значение представляет собой среднюю аппликату поверхности, которую задает функция  $N_1(\xi, \eta)$ . В некоторых задачах это значение интерпретируется как узловая доля генерируемого в КЭ тепла внутреннего источника. В схемах случайных блужданий – это среднее значение переходных вероятностей для всех траекторий, оканчивающихся в узле 1.

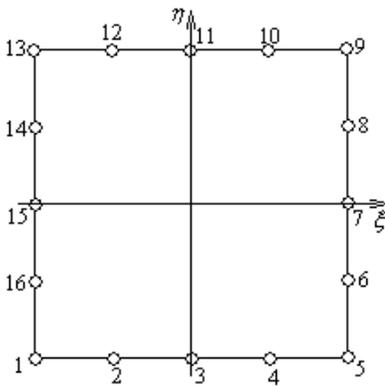


Рис.1. СКЭ-16

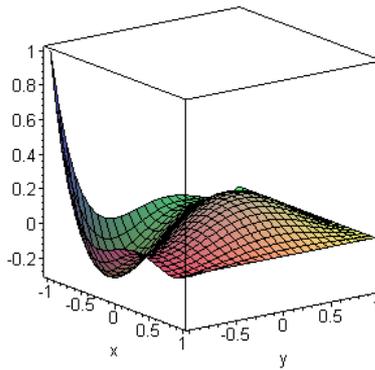


Рис.2. Визуализация базисной функции  $N_1$

Несложно увидеть, что через узлы 2, 3, 4 и 14, 15, 16 можно провести девять различных прямых, уравнение которых в общем виде записано в последней скобке уравнения (1). При решении системы (2) получаем ровно девять комплектов неизвестных коэффициентов, что позволяет построить девять моделей элементов СКЭ-16, которые удовлетворяют интерполяционной гипотезе Лагранжа, однако только три из них обладают свойством геометрической изотропии.

Один из вариантов базисной функции для первого узла имеет вид:

$$N_1 = \frac{187}{1000} (1 - \xi)(1 - \eta) \left( -\frac{500}{561} \xi^2 + \frac{311}{561} \xi \eta - \frac{500}{561} \eta^2 + \frac{61}{561} \xi + \frac{61}{561} \eta + 1 \right) (2\xi + 2\eta + 1); \quad (3)$$

Геометрический анализ показывает, что эта поверхность (см. рис.2) представляет собой композицию плоскости, проходящей через сторону квадрата  $\xi = 1$  и точку  $(-1; -1; 1)$  плоскости, проходящей через сторону квадрата  $\eta = 1$  и точку  $(-1; -1; 1)$  плоскости, проходящей через прямую  $2\xi + 2\eta + 1 = 0$ , а также эллиптического параболоида с вершиной в точке  $\left( \frac{61}{689}; \frac{61}{689}; \frac{1561}{2067} \right)$ , проходящего через узлы 2, 3, 15, 16.

Аналогично построим базисную функцию для узла 2. Эта базисная функция содержит уравнения противоположных сторон квадрата ( $\xi = \pm 1, \eta = 1$ ), прямую, проходящую через узел 4 ( $\xi = \frac{1}{2}$ ), и произвольную прямую, проходящую через узел 3. Тогда функцию для узла 2 запишем в виде:

$$N_2 = K_2 (1 - \xi^2) (1 - \eta) \left( \frac{1}{2} - \xi \right) (A\xi + B\eta + 1). \quad (4)$$

Для нахождения коэффициентов  $A, B, K_2$  составим систему:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} N_2(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,065, \\ N_2\left(-\frac{1}{2}; -1\right) = \frac{3}{2} K_2 \left(-\frac{1}{2} A - B + 1\right) = 1, \\ N_2(0; -1) = K_2 (-B + 1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В правой части первого уравнения системы (5) записано экспериментальное значение относительной частоты попадания во второй узел частиц, стартовавших из барицентра СКЭ. Решив систему, найдем значения коэффициентов базисной функции для узла 2 и получим функцию в виде (см. рис.3):

$$N_2 = -\frac{203}{800} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - 2\xi) \left( \frac{1600}{609} \xi + \eta + 1 \right) \quad (6)$$

В состав базисной функции  $N_3$  включим уравнения противоположных сторон квадрата ( $\xi = \pm 1, \eta = 1$ ) и уравнение параболы, проходящей через узлы 2 и 4:

$$N_3 = K_3 (1 - \xi^2) (1 - \eta) (A\xi^2 + B\eta + 1) \quad (7)$$

Система для нахождения коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} N_3(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,098, \\ N_3(0; -1) = 2K_3 (-B + 1) = 1, \\ N_3\left(-\frac{1}{2}; -1\right) = \frac{3}{2} K_3 \left(\frac{1}{4} A - B + 1\right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В правой части первого уравнения системы (8) записано экспериментальное значение относительной частоты попадания в третий узел частиц, стартовавших из барицентра СКЭ. Решив систему, найдем значения коэффициентов базисной функции для узла 3 и получим функцию в виде (см. рис.4):

$$N_3 = \frac{1141}{2000} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \left( -\frac{4000}{1141} \xi^2 + \frac{141}{1141} \eta + 1 \right) \quad (9)$$

Запишем полученный базис СКЭ-16:

$$N_i = \frac{187}{1000} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \left( -\frac{500}{561} \xi^2 + \frac{311}{561} \xi_i \xi \eta_i \eta - \frac{500}{561} \eta^2 - \frac{61}{561} \xi_i \xi - \frac{61}{561} \eta_i \eta + 1 \right) \times \\ \times (-2 \xi_i \xi - 2 \eta_i \eta + 1); \quad i = 1, 5, 9, 13; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1; \quad (10)$$

$$N_i = -\frac{203}{800} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + 4 \xi_i \xi) \left( -\frac{3200}{609} \xi_i \xi - \eta_i \eta + 1 \right) \\ i = 2, 4, 10, 12; \quad \xi_i = \pm \frac{1}{2}; \quad \eta_i = \pm 1; \quad (11)$$

$$N_i = \frac{1141}{2000} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) \left( -\frac{4000}{1141} \xi^2 - \frac{141}{1141} \eta_i \eta + 1 \right), \quad (12) \\ i = 3, 11; \quad \eta_i = \pm 1.$$

Чтобы получить базисные функции для узлов 6, 8, 14, 16 и 7, 15, необходимо сделать циклическую перестановку  $\xi$  и  $\eta$  соответственно в формулах (11) и (12).

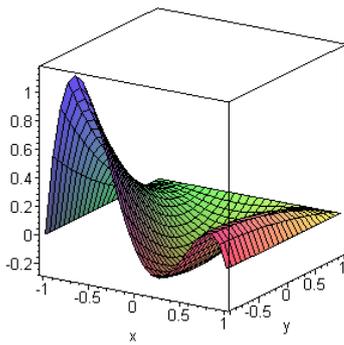


Рис.3. Визуализация базисной функции  $N_2$

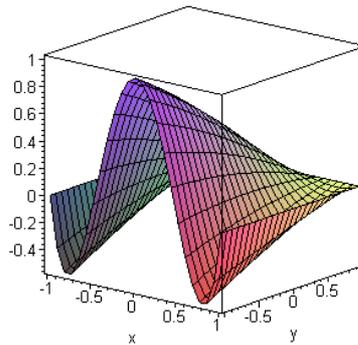


Рис.4. Визуализация базисной функции  $N_3$

## ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Полученные результаты свидетельствуют о множественности решения задачи построения базиса СКЭ-16, согласованного с экспериментальным спектром. Представляет интерес изучение возможности распространения указанного подхода на СКЭ-8, а также на трехмерные модели СКЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
2. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved iso-parametric “quadri Lateral” elements for finite element analysis // Internat. J. Solids Struct., 4, 1968. – P. 31-42.
3. Taylor R.L. On completeness of shape functions for finite element analysis // Internat. J. Numer. Methods Engrg., 4, No. 1, 1972.- P. 17-22.

4. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям: Тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257-258.
5. Хомченко А.Н., Камаева Л.И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб./ Горький: ГГУ, 1985. – С. 14-17.
6. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. Вычислительные эксперименты с альтернативными базами серендиповых аппроксимаций // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горький: ГГУ, 1988. – С. 103-105.

УДК 514.725.22:514.748.2

## О РЕГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ С ВЫРОЖДЕННОЙ ИНДИКАТРИСОЙ КРИВИЗНЫ

Величко О.В., к. ф.-м. н., ассистент, \*Сорокина Е.А., преподаватель

*Запорожский национальный университет  
\*Запорожский колледж радиоэлектроники ЗНТУ*

В статье введено понятие индикатрисы  $n$ -го порядка плоской регулярной кривой. Получена формула для кривизны индикатрисы. Описан класс кривых, индикатрисами 1-го порядка которых являются отрезки.

*Ключевые слова: кривая, кривизна кривой, индикатриса, натуральное уравнение.*

Величко О.В., \*Сорокина К.О. ПРО РЕГУЛЯРНІ КРИВІ З ВИРОДЖЕНОЮ ІНДИКАТРИСОЮ КРИВИНИ / Запорізький національний університет, \*Запорізький коледж радіоелектроніки Україна

У статті введено поняття індикатрисі  $n$ -го порядку плоскої регулярної кривої. Отримана формула для кривини індикатрисі. Описано клас кривих, індикатрисами 1-го порядку яких є відрізки.

*Ключові слова: крива, кривина кривої, індикатриса, натуральне рівняння.*

Velichko H.V., \*Sorokina K.A. ON THE REGULAR CURVES WITH THE DEGENERATE INDIKATRIX OF THE KURVATURE / Zaporizhzhya national university, \*Zaporizhzhya college of radio electronics Ukraine.

The notion of the  $n$ -power indicatrix of the plane regular curve is introduced in the article. The formula for the curvature of the indicatrix is obtained. The class of the curves, which have the segment as the indicatrix of the first power, is described.

*Key words: the curve, curvature of the curve, indicatrix, natural equation.*

В современной дифференциальной геометрии при изучении геометрических объектов используются многообразия Грассмана и их подмногообразия. Обзор последних достижений в этой области можно найти в монографии [1]. Одним из подмногообразий Грассмана является грассманов образ поверхности. В данной работе рассматривается аналог понятия «грассманов образ поверхности» - индикатриса кривизны плоской кривой.

В этой статье мы выясняем, может ли индикатриса вырождаться (то есть иметь постоянную нулевую кривизну). Другими словами: может ли прямая или ее часть являться индикатрисой некоторой кривой.

Пусть плоская регулярная кривая  $\gamma$  задана векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , где  $s$  – длина дуги (натуральный параметр). В каждой точке  $M(s)$  кривой  $\gamma$  построим касательный вектор  $k(s) \cdot \vec{r}'(s)$ , где  $k(s)$  – «ориентированная» кривизна кривой в этой точке.

**Определение.** Индикатрисой кривизны плоской регулярной кривой  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  (в дальнейшем мы ее будем называть просто индикатрисой) называется годограф вектор – функции  $\vec{R}(s) = k(s) \cdot \vec{r}'(s)$ .

Таким образом, индикатриса является плоской кривой. Из определения индикатрисы непосредственно следует, что:

а) индикатриса прямой состоит из одной точки;

б) индикатрисой дуги окружности радиуса  $R$  является дуга окружности радиуса  $R^{-1}$ , повернутая на прямой угол по сравнению с исходной дугой.