

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ЗАМКНУТОМ ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ ГИЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Александров А.И., к.т.н., доцент, Прокопенко Е.В., ассистент

Запорожский национальный университет

Задача минимизации выпуклого дифференцируемого функционала на замкнутом выпуклом множестве гильбертового пространства сведена к решению нелинейного операторного уравнения, построенного с использованием метрического проектора этого пространства на это множество.

Ключевые слова: выпуклый дифференцируемый функционал, гильбертово пространство.

Александров О.І., Прокопенко О.В. ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ ОПУКЛОГО ДИФЕРЕНЦІЙОВНОГО ФУНКЦІОНАЛА НА ЗАМКНЕНІЙ ОПУКЛІЙ МНОЖИНІ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ / Запорізький національний університет, Україна.

Задача мінімізації опуклого диференційовного функціонала на замкненій опуклій множині гільбертового простору зведена до розв'язування нелінійного операторного рівняння, яке побудовано з використанням метричного проектора цього простору на цю множину.

Ключові слова: опуклий диференційовний функціонал, гільбертовий простір.

Alexandrov A.I., Prokopenko E.V. THE MINIMIZATION PROBLEM FOR A CONVEX DIFFERENTIABLE FUNCTIONAL ON THE CLOSED CONVEX SET OF A HILBERT SPACE / Zaporizhzhya national university, Ukraine.

The minimization problem for a convex differentiable functional on the closed convex set of a Hilbert space is reduced to the solution of a non-linear operator equation that is construct with the use of a metrical projector this space on this set.

Key words: convex differentiable functional, Hilbert space.

ВВЕДЕНИЕ

Использование теории операторов [1,2] для решения экстремальных задач [3,4] в линейном нормированном пространстве позволяет существенно расширить круг традиционно используемых методов поиска экстремума при условии, что рассматриваемая экстремальная задача может быть сведена к решению операторного уравнения. Подобное сведение удалось осуществить даже для экстремальных задач с ограничениями, но лишь в простейших случаях [4,5], когда поиск экстремума производился в конечномерном пространстве. Поэтому попытка получения аналогичного результата в бесконечномерном пространстве, предпринятая в этой статье, является полезной как для самой теории экстремальных задач [3], так и для ее многочисленных приложений [6,7].

1 ВЫПУКЛЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство H [8], для которого скалярное произведение любых его элементов x и y будем обозначать символом (x, y) . Везде в этой статье будем предполагать, что вещественный функционал φ , заданный на всем пространстве H , является выпуклым [3] на непустом выпуклом замкнутом множестве U [3], содержащемся в H , и дифференцируемым по Гато [9] в каждой точке множества U . Таким образом, задано отображение $\varphi' : U \rightarrow H$, которое в каждой точке $x \in U$ определяется соотношением:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + t \cdot h) - \varphi(x)}{t} = (\varphi'(x), h) \quad \forall h \in H. \quad (1)$$

Справедливы следующие два утверждения о свойствах рассматриваемого функционала φ .

Теорема 1. Для любых элементов $x, y \in U$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) \geq \varphi(y) + (\varphi'(y), x - y). \quad (2)$$

Доказательство. Для любого числа $t \in (0, 1)$ и для любых элементов $x, y \in U$ справедливо неравенство

$$\varphi(y + t \cdot (x - y)) \leq (1 - t)\varphi(y) + t \cdot \varphi(x),$$

из которого вытекает оценка

$$\frac{\varphi(y + t \cdot (x - y)) - \varphi(y)}{t} \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Осуществляя в этой оценке предельный переход при $t \rightarrow 0 + 0$, получим неравенство

$$(\varphi'(y), x - y) \leq \varphi(x) - \varphi(y),$$

из которого следует неравенство (2). **Теорема доказана.**

Теорема 2. Для того, чтобы точка $u \in U$ удовлетворяла условию оптимальности

$$\varphi(u) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in U \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$(\varphi'(u), x - u) \geq 0 \quad \forall x \in U. \quad (4)$$

Доказательство. Если для точки $u \in U$ выполнено условие (3), то для любого $x \in U$ и для любого числа $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(u + t \cdot (x - u)) - \varphi(u)}{t} \geq 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \rightarrow 0 + 0$, получим соотношение (4), которое вытекает с учетом (1).

Пусть теперь для точки $u \in U$ выполнено соотношение (4). Тогда из условия (2) при $y = u$ и условия (4), можно получить неравенства

$$\varphi(u) \leq \varphi(x) - (\varphi'(u), x - u) \leq \varphi(x),$$

справедливые для всех $x \in U$. Таким образом для рассматриваемой точки $u \in U$ выполнено соотношение (3). **Теорема доказана.**

2 ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для непустого замкнутого выпуклого множества $U \subset H$ рассмотрим проекционный оператор $P_U : H \rightarrow H$, который задан следующими соотношениями [8]:

$$x \in H; y = P_U(x); y \in U; \|x - y\| = \inf_{z \in U} \|x - z\|, \quad (5)$$

где $\|x - z\| = \sqrt{(x - z, x - z)}$, $\|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$.

Основные свойства этого оператора могут быть выражены следующими утверждениями.

Теорема 3. Для любых элементов $x, y \in H$ справедливо неравенство

$$\|P_U(x) - P_U(y)\| \leq (P_U(x) - P_U(y), x - y).$$

Теорема 4. Для любых элементов $x, y \in H$ справедливо неравенство

$$\|P_U(x) - P_U(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Теорема 5. Для любого элемента $x \in H$ и любого $y \in U$ справедливо неравенство

$$(x - P_U(x), y - P_U(x)) \leq 0.$$

Теорема 6. Для любых $x, y \in H$ соотношение

$$x = P_U(y)$$

эквивалентно системе соотношений

$$x \in U; (y - x, u - x) \leq 0 \quad \forall u \in U.$$

Теорема 7. Для любых $x, \tilde{y} \in H$ и для любого положительного числа E соотношение

$$x = P_U(x - E \cdot \tilde{y})$$

эквивалентно системе соотношений

$$x \in U; (\tilde{y}, u - x) \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Теоремы 3-6 доказаны в работе [8], а теорема 7 является тривиальным следствием теоремы 6 и вытекает из нее при замене элемента y на элемент $x - E \cdot \tilde{y}$. Указанные свойства проекционного оператора $P_U : H \rightarrow H$ вместе с теоремой 2 позволяют выразить условие оптимальности (3) для элемента $u \in U$ в виде операторного равенства, в которое входит этот элемент.

3 КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ФОРМЕ РАВЕНСТВА

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть для функционала φ , пространства H и множества $U \subset H$ выполнены все условия, указанные в начале первого раздела, и отображение $\varphi' : U \rightarrow H$ задано соотношением (1). Тогда для того, чтобы точка $u \in U$ удовлетворяла условию оптимальности (3) необходимо и достаточно, чтобы при любом положительном значении E выполнялось равенство

$$u = P_U(u - E \cdot \varphi'(u)), \quad (6)$$

в котором оператор $P_U : H \rightarrow H$ задан соотношениями (5).

Доказательство. Как следует из теоремы 7, равенство (6) для элемента $u \in U$ и любого положительного числа E эквивалентно условию

$$(\varphi'(u), x - u) \geq 0 \quad \forall x \in U,$$

которое полностью совпадает с (4). Но так как (в силу теоремы 2) условие (4) эквивалентно условию оптимальности (3) для элемента $u \in U$, то равенство (6), выполненное для элемента $u \in U$ при любом положительном E , также эквивалентно условию (3). **Теорема доказана.**

Из теоремы 7 следует, что если условие (6) выполнено для элемента $u \in U$ лишь при некотором положительном значении E , то это же условие выполнено для этого же элемента и при любом другом положительном значении E . Это означает, что множество всех элементов $u \in H$, удовлетворяющих операторному уравнению (6), не изменится при изменении входящего в это уравнение параметра E на положительной части вещественной числовой прямой. Кроме того, множество всех решений операторного уравнения (6) в пространстве H совпадает с множеством всех точек минимума рассматриваемого функционала φ на рассматриваемом множестве U .

В заключение отметим, что условие оптимальности, аналогичное (6), было доказано в работе [4] лишь для случая, когда функционал φ задан в конечномерном евклидовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. – М: МГУ, 1986. – 368с.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552с.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том I. – М.: Наука, 1973. – 431с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1972. – 415с.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Мир, 1979. – 399с.
8. Александров А.И. Неподвижные точки непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. – Запорожье: ЗГУ, 2002. – 77с.

УДК 519.61:004.925.8

УПРАВЛЯЕМЫЕ СЕРЕНДИПОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, СОХРАНЯЮЩИЕ МЕЖЭЛЕМЕНТНУЮ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Астионенко И.А., ст. преподаватель, Козуб Н.А., ст. преподаватель,
Литвиненко Е.И., к.т.н., доцент, Хомченко А.Н., д. ф.-м. н., профессор

Херсонский национальный технический университет

В статье описан новый подход к построению базисных функций серендиповых конечных элементов высших порядков. Предложен метод, сочетающий преимущества прямого геометрического моделирования и традиционной матричной алгебры. Показана возможность эффективного управления функцией формы на конечном носителе.

Ключевые слова: серендиповы элементы, базисные функции, спектр узловых нагрузок, обратные задачи серендиповых аппроксимаций, способ взвешенного усреднения альтернативных базисов.

Астионенко І.О., Козуб Н.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. КЕРОВАНІ СЕРЕНДИПОВІ ПОВЕРХНІ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ МІЖЕЛЕМЕНТНУ НЕПЕРЕРВНІСТЬ / Херсонський національний технічний університет, Україна

У статті описаний новий підхід до побудови базисних функцій серендипових скінченних елементів вищих порядків. Запропоновано метод, що поєднує переваги прямого геометричного моделювання і традиційної матричної алгебри. Показана можливість ефективного керування функцією форми на скінченному носії.

Ключові слова: серендипові елементи, базисні функції, спектр вузлових навантажень, обернені задачі серендипових апроксимацій, спосіб зв'язуваного усереднення альтернативних базисів.

Astionenko I.A., Kozub N.A., Litvinenko E.I., Khomchenko A.N. DIRECTED SERENDIPITY SURFACES KEEPING THE INTERELEMENT CONTINUITY / Kherson National Technical University, Ukraine

A new approach to the building of basis functions of serendipian finite elements of higher orders is described in the article. A way combining advantages of direct geometric modeling and traditional matrix algebra is proposed. A possibility of effective form function control on the finite carrier is shown.

Key words: serendipian elements, basis functions, nodal load spectrum, inverse problems of serendipity approximation, method of weighted averaging of alternative bases.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При построении базисных функций на двумерных серендиповых конечных элементах (СКЭ), имеющих 16 и более узлов, приходится возвращаться к использованию внутренних узлов или добавлять базисные функции, ассоциируемые с параметром, не включенным в связи между элементами [1]. При использовании таких элементов добавление многочленных компонент легко осуществить локально, чтобы добиться уточнения в области, где неизвестная функция изменяется особенно быстро и, следовательно, аппроксимация может давать наибольшую погрешность. Проблема заключается в создании альтернативных моделей серендиповых элементов с дополнительными степенями свободы, которые можно ансамблировать со стандартными элементами без нарушений межэлементной непрерывности. Здесь описан простой и наглядный способ построения альтернативных моделей серендиповых элементов, позволяющий решать обратные задачи серендиповых аппроксимаций.

АНАЛИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Появление серендиповых элементов связывают с развитием техники изопараметрических преобразований криволинейных элементов [2]. Первые попытки модифицировать серендиповы модели описаны в работе [3]. Геометрические приемы построения серендиповых базисов и способ взвешенного усреднения альтернативных моделей можно найти в [4-6].

ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Основная задача статьи – изучить возможность управления базисными функциями с целью оптимизации интерполяционных и вычислительных качеств серендиповых моделей высших порядков. Хорошо известно, что эти модели имеют неестественный спектр поузловое распределения равномерной массовой силы. Чтобы получить естественный спектр, мы используем результаты наблюдений за блуждающими частицами внутри элемента с поглощениями в граничных узлах. Задача сводится к построению полиномов с естественным спектром узловых значений.

Фізико-математичні науки